Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Matemática 2

Exame em Época Normal 08/01/2014

Parte I

1. *Mostre que a série numérica* $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n^\beta+1}-\sqrt{n^\beta}\right)$ *é convergente se e só se* $\beta>2$.

Multiplicando e dividindo o termo geral pela sua expressão conjugada temos

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n^\beta+1}-\sqrt{n^\beta}\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\sqrt{n^\beta+1}-\sqrt{n^\beta}\right)\left(\sqrt{n^\beta+1}+\sqrt{n^\beta}\right)}{\sqrt{n^\beta+1}+\sqrt{n^\beta}}$$
$$=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n^\beta+1}+\sqrt{n^\beta}}$$

O termo geral apenas será um infinitésimo se $\beta>0$, pelo que para termos convergência da série, essa condição deve ser verificada. Comparemos então com a série de termo geral $1/n^{\beta/2}$:

$$\lim\frac{\dfrac{1}{\sqrt{n^\beta+1}+\sqrt{n^\beta}}}{\dfrac{1}{n^{\beta/2}}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+n^{-\beta}}+1}=\frac{1}{2}\quad(\neq 0,\infty).$$

Então a série em análise tem a mesma natureza que $\sum\frac{1}{n^{\beta/2}}$, pelo que é convergente se e só se $\beta/2>1$, i.e. se $\beta>2$.

2. *Desenvolva a função* $f(x)=x\log x$ *em série de potências de* $(x-2)$*, indicando o maior intervalo (não necessariamente aberto) onde esse desenvolvimento é válido. Aproveite o resultado para determinar o valor de* $f^{(12)}(2)$.

Comecemos por notar que $f''(x)=1/x$. Podemos então escrever

$$f''(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{2-(2-x)}=\frac{1/2}{1-\left(\dfrac{2-x}{2}\right)}$$

Se $x\in]0,4[$ esta última expressão pode ser identificada com a soma de uma série geométrica de razão $(2-x)/2$ pelo que, para esses valores de x, se tem $f''(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n$. No intervalo de convergência absoluta, podemos obter o desenvolvimento de f primitivando duas vezes (termo a termo) o desenvolvimento em série obtido para f''.

$$f'(x)=\int f''(x)dx=\int\left(\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n\right)dx=\sum_{n\geq}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int(x-2)^n\,dx=C+\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

Como $f'(2)=\log 2+1$, devemos ter $C=\log 2+1$. Finalmente,

$$
\begin{aligned}
f(x) = \int f'(x)dx = &\tilde{C} + (\log 2 + 1)(x-2) + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)(n+2)}(x-2)^{n+2} \\
=&2\log 2 + (\log 2 + 1)(x-2) + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)n}(x-2)^n
\end{aligned}
$$

Devemos agora verificar se a série é convergente nos extremos do intervalo $]0,4[$. Quando $x=0$ a série é dada por

$$
2\log 2 + (\log 2 + 1)(0-2) + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)n}(-2)^n = 2\log 2 + (\log 2 + 1)(0-2) + \sum_{n\geq 2} \frac{2}{(n-1)n}
$$

que é absolutamente convergente (comparar com $1/n^2$). Quando $x=4$ a série é dada por

$$
2\log 2 + (\log 2 + 1)(4-2) + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}(n-1)n}2^n = 2\log 2 + (\log 2 + 1)(0-2) + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n 2}{(n-1)n}
$$

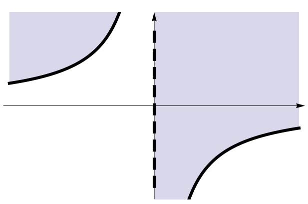
que é absolutamente convergente (comparar o seu módulo com $1/n^2$). Assim, o maior intervalo onde o desenvolvimento obtido é válido é o intervalo $[0,4]$.

Relativamente ao valor de $f^{(12)}(2)$, este pode ser obtido usando a unicidade do desenvolvimento em série, junjtamente com a série de Taylor de f, para concluir que $f^{(12)}(2) = c_{12}12!$, em que c_{12} é o coeficiente de $(x-2)^{12}$ no desenvolvimento em série de f. Assim, concluímos que

$$
f^{(12)}(2) = 12! \frac{(-1)^{12}}{2^{12-1}(12-1)12} = \frac{14175}{8}.
$$

3. *Considere a função* $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(x,y) = \left(xy \sin\left(\sqrt{1/x + y}\right) \quad , \quad \frac{2xy}{x^4+y^2} \right)$.

(a) *Represente analitica e geometricamente o domínio de f, assim como o seu interior, exterior e fronteira. Indique uma sucessão de pontos na fronteira de D_f convergente para um ponto em D_f.*



$$
\begin{aligned}
D_f =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \frac{1}{x} + y \geq 0, x^4 + y^2 \neq 0\} \\
=&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \geq -\frac{1}{x}\} \\
Int(D_f) =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y > -\frac{1}{x}\} \\
Ext(D_f) =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y < -\frac{1}{x}\} \\
Fr(D_f) =&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y = -\frac{1}{x}\}
\end{aligned}
$$

Finalmente, em relação à sucessão pedida, basta tomar uma sucessão de termos na curva $y = -1/x$, cujo limite pertença à mesma curva. Um exemplo pode ser $u_n = \left(1 + 1/n, \frac{-1}{1+1/n}\right) \to (1,-1)$.

(b) *Calcule, ou mostre que não existe,* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Uma vez que o limite apenas existirá se existirem os limites de ambas as componentes, analisemos primeiro a segunda. Se calcularmos os limites direccionais,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} \frac{2xy}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^4+k^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2k}{x^2+k^2} = 2/k.$$

Como estes limites direccionais dependem da recta escolhida, não existe limite da segunda componente de f na origem, pelo que o limite de f na origem não existe.

(c) *Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ ao qual f pode ser prolongada por continuidade.*

A função f é contínua em todo o seu domínio, sendo que sobre a linha $y = -1/x$ toma o valor $(0, -2x^2/(x^6+1))$. Assim, se para $x \neq 0, y = -1/x$ definirmos f desse modo, ficaremos com uma função contínua para qualquer $x \neq 0$.

Como já vimos que f não tem limite em $(0,0)$, não poderá ser estendida por continuidade a esse ponto. Resta portanto verificar a possibilidade de a estender a pontos da forma $(0, y_0), y_0 \neq 0$. Calculando os respectivos limites, temos

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} xy\operatorname{sen}\sqrt{1/x+y} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0^-,y_0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} \frac{2xy}{x^4+y^2} = \frac{0}{y_0^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0^-,y_0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} \frac{-2x^2}{x^6+1} = 0$$

Por tudo isto concluímos que f pode ser estendida por continuidade a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. *Sejam $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subconjuntos compactos de de $\mathbb{R}^n$. Mostre que o conjunto $A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k$ é compacto.*

Um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ é compacto se e só se é limitado e fechado. Como a intersecção de todos os conjuntos A_k está contida em cada um deles, e sendo estes limitados, o conjunto A é limitado. Por outro lado, como os conjuntos A_k são fechados, o conjunto A, que é a intersecção destes, também será fechado. Finalmente, se mostrámos que A é limitado e fechado então ele é compacto.

Cotação: 2,0 + 2,0 + (1,5 + 1,5 + 1,5) + 1,5 = 10,0

Parte II

1. *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right) & , \quad xy \neq 0 \\ 0 & , \quad xy = 0 \end{cases}$$

(a) *Calcule as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.*

Uma vez que os pontos relevantes para o cálculo das derivadas parciais residem no ramo de f onde esta é nula, podemos aplicar as regras usuais de derivação no segundo membro da função, obtendo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

(b) *Mostre que para qualquer vector não nulo $u = (u_1, u_2)$ se tem* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = u_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) + u_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Em primeiro lugar observemos que, se $u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$, o mesmo argumento da alínea anterior garante que a derivada direccional é nula. Relativamente a vectores em que $u_1, u_2 \neq 0$, calculemos directamente a derivada direccional,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lim_{t \to 0} \frac{(tu_1)^2 \text{arctg}\left(\frac{tu_2}{tu_1}\right) - (tu_2)^2 \text{arctg}\left(\frac{yu_1}{tu_2}\right)}{t} = \lim_{t \to 0} t \left(u_1^2 \text{arctg}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) - u_2^2 \text{arctg}\left(\frac{u_1}{u"}\right)\right) = 0$$

Ora, se todas as derivadas direccionais são nulas na origem (incluindo as derivadas parciais), a relação proposta é obviamente verdadeira.

(c) *O resultado da alínea anterior permite estabelecer a diferenciabilidade de f na origem? Justifique.*

O resultado anterior **não** permite concluir sobre a diferenciabilidade de f na origem. Se f for diferenciável em $(0,0)$, então sabemos que $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0) = u \cdot \nabla f(0,0)$, o que é equivalente à relação demonstrada. No entanto não existe nenhum resultado que permita concluir o recíproco, que é em geral falso, pelo que não temos à partida garantia de diferenciabilidade (para esclarecer a situação teríamos que fazer a verificação através dos meios habituais).

2. *Considere funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(u,v) \mapsto F(u,v)$ e $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $W(x,y) = xF(xy, y/x)$. Mostre que* $x\dfrac{\partial W}{\partial x} + y\dfrac{\partial W}{\partial y} - W = 2x^2 y \dfrac{\partial F}{\partial u}$.

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial W}{\partial x} &= x\left(F(xy, y/x) + x\left(\frac{\partial F}{\partial u}y + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{-y}{x^2}\right)\right) \\
&= xF(xy, y/x) + x^2 y \frac{\partial F}{\partial u} - y\frac{\partial F}{\partial v} \\
y\frac{\partial W}{\partial y} &= yx\left(\frac{\partial F}{\partial u}x + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{x}\right) \\
&= x^2 y \frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial F}{\partial v}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
x\frac{\partial W}{\partial x} + y\frac{\partial W}{\partial y} - W &= xF(xy, y/x) + x^2 y\frac{\partial F}{\partial u} - y\frac{\partial F}{\partial v} + x^2 y\frac{\partial F}{\partial u} + y\frac{\partial F}{\partial v} - xF(xy, y/x) \\
&= 2x^2 y\frac{\partial F}{\partial u}.
\end{aligned}$$

3. *Determine os pontos críticos da função $f(x,y) = (3-x)(3-y)(x+y-3)$. Indique, justificadamente, se f possui extremantes locais ou globais.*

Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(3-y)(x+y-3) + (3-x)(3-y) = 0 \\[2ex] -(3-x)(x+y-3) + (3-x)(3-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-y)(6-2x-y) = 0 \\[2ex] (3-x)(6-x-2y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{r} y=3 \\ \\ x=3 \vee x=0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{r} y=6-2x \\ \\ (3-x)(-6+3x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=3 \\ \\ x=3 \vee x=0 \end{array}\right. \vee \left\{\begin{array}{r} y=6-2x \\ \\ x=3 \vee x=2 \end{array}\right.$$

Assim, os ponto críticos são: $(3,0),(0,3),(3,3),(2,2)$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ os seus extremantes são necessariamente pontos críticos. Devemos então proceder à classificação dos pontos críticos já determinados. A matriz Hesseana de f é dada por

$$H_f(x,y)=\left(\begin{array}{cc} 2(-3+y) & -9+2x+2y \\ -9+2x+2y & 2(-3+x) \end{array}\right)$$

Assim,

$$H_f(3,0)=\left(\begin{array}{cc} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{array}\right), \quad \Delta_1=-6<0, \Delta_2=-9<0$$

$$H_f(0,3)=\left(\begin{array}{cc} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{array}\right), \quad \Delta_1=0, \Delta_2=-9<0$$

$$H_f(3,3)=\left(\begin{array}{cc} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{array}\right), \quad \Delta_1=0, \Delta_2=-9<0$$

$$H_f(2,2)=\left(\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{array}\right), \quad \Delta_1=-2<0, \Delta_2=3>0$$

Assim, o único extremante local (maximizante) é o ponto $(2,2)$. Finalmente, como $f(4,4)>f(2,2)$, vemos que o maximizante é apenas local, pelo que f não tem extremantes globais, tendo apenas um maximizante local.

4. *Seja $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $u(x,y)=x^3-3xy^2$. Determine uma função inteira $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ tal que $f(0)=i$ e $Re f=u$.*

Como f é holomorfa em $\mathbb{C}$ verifica as condições de Cauchy-Riemann. Escrevendo $f=u+iv$ sabemos que:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2 \Rightarrow v=\int 3x^2-3y^2dy=3x^2y-y^3+\varphi(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=6xy \Rightarrow v=\int 6xy\,dx=3x^2y+\psi(y)$$

Então, comparando as duas expressões obtidas para v, concluímos que $v(x,y)=3x^2y-y^3+C$. Agora, como $f(0)=i$, sabemos que $v(0,0)=1$, pelo que $C=1$. Finalmente,

$$f(x+iy)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3+1).$$

5. *Mostre que se* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é uma função holomorfa tal que* $f'(z) = 0,\ z \in \Omega$ *então* f *é constante.*

Sendo $f = u + iv$ uma função Holomorfa, sabemos que f verifica as condições de Cauchy-Riemann e que

$$f'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0$$

.

Assim, resulta desta igualdade que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Usando agora as condições de Cauchy-Riemann, sabemos que $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ e que $\frac{\partial u}{\partial y} - -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Como todas as derivadas parciais de u e v são nulas, u e v são constantes, pelo que $f = u + iv$ é também constante.

Cotação: (1,5 + 1,0 + 0,5) + 1,5 + 2,0 + 2,0 + 1,5 = 10,0