LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Limites e Continuidade

Exercício 1. Calcule ou prove que não existem os seguintes limites:

$(a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x-1}{y-x+1}$ $\quad (b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad (c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y^2}{x-y}$

$(d)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \dfrac{x+y-2}{xyz}$ $\quad (e)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$ $\quad (f)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$

$(g)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$ $\quad (h)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \dfrac{y^2}{x}(z+3)\sin(4x)$ $\quad (i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^4+2y^2}$

$(j)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\log^2(x+y)}{\sin(\log(x+y))}$ $\quad (k)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{x^2-y^2-1}{x-1}$ $\quad (l)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2+(y-1)^2}$

$(m)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \dfrac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx}$

Exercício 2. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = (x^2+y)\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

a. Justifique que não existe $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ e não existe $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

b. Prove que existe limite da função no ponto $(0,0)$.

Exercício 3. Estude a continuidade das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2y^2}{(x-1)^2+y^2}+y & \text{se } (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,0) \end{cases}$ no ponto $(1,0)$.

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ no ponto $(0,0)$.

Exercício 4. Determine o valor do parâmetro real α de modo que a seguinte função tenha limite no ponto $(1,1)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y} + \alpha & \text{se } \ x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \dfrac{x^2+1}{y^2+1} - \alpha & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exercício 5. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x+y}$.

a. Considere, para $m \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$ o conjunto $A_{k,m} = \left\{(x,y) \in D_f : y = mx^k\right\}$.
Calcule para cada par $(k,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, o limite de f no ponto $(0,0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.

b. Considere o conjunto $X = \left\{(x,y) \in D_f : y = -x + x^2\right\}$.
Calcule o limite de f no ponto $(0,0)$ relativo a X.

c. Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0,0)$?

Exercício 6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} k + e^{-\dfrac{1}{|x^2+y^2-4|}} & \text{se } \ x^2+y^2 > 4 \\ 5 & \text{se } \ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}.$$

Determine o valor de k de modo a que a função seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

Exercício 7. Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade a $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ $\quad$ (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad$ (c) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$

(d) $f(x,y) = xsen\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$.

Exercício 8. Seja $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x-y}$. A função f é prolongável por continuidade a $\mathbb{R}^2$? Em caso afirmativo determine esse prolongamento.

Exercício 9. Determine os pontos de descontinuidade da função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} & \text{se } \ x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1+y & \text{se } \ x = 0 \\ y & \text{se } \ x = 1 \end{cases}.$$

Exercício 10. Considere a função $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x\,(2-\sin(x))}{1-|y|}}$.

a. Determine o domínio de f e represente-o geometricamente.
b. Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto e/ou fechado.
c. Justifique se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,1)$.