Séries Numéricas

Exercício 1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries são convergentes e calcule a respetiva soma:

$$(a) \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n : \qquad (b) \sum_{n\geq 0} x; \qquad (c) \sum_{n\geq 0} (1-|x|)^n ; \qquad (d) \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+n}.$$

Exercício 2. Utilize a teoria das séries geométricas para representar na forma de fração $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, os seguintes números racionais expressos na forma de dízima infinita periódica:

$(a)\, q_1 = 3,(6) \qquad (b)\, q_2 = 1,(18) \qquad (c)\, q_3 = 1,01(08) \qquad (d)\, q_4 = 1,(123) \qquad (e) q_5 = 0,(9).$

Exercício 3. Calcule a soma das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n\geq 0} 3^{-(5n+1)}; \quad (b) \sum_{n\geq 2} \frac{2^n+3^n}{6^n}; \quad (c) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1};$$

$$(d) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}; \quad (e) \sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n}\right).$$

Exercício 4. Seja (a_n) uma sucessão convergente.

Mostre que a série $\sum\limits_{n\geq 1} (a_n - a_{n+k})$ é convergente e que

$$\sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+k}) = a_1 + a_2 + ... + a_k - k \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Exercício 5. Determine a natureza das seguintes séries e a soma daquelas que são convergentes:

$$(a) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}; \qquad (b) \sum_{n\geq 3} \frac{1}{n^2-4}; \qquad (c) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+k)},\ k \in \mathbb{N};$$

$$(d) \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad (e) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+3)(n+6)}.$$

Exercício 6. Seja (a_n) uma sucessão de termos não nulos.
Mostre que que se $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, então $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a_n}$ é divergente.

Exercício 7. Seja (a_n) uma sucessão real tal que $\lim |a_n| = +\infty$.
Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{1+a_n}$.

Exercício 8. Estude, utilizando um critério de comparação, a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n\geq 2} \frac{\sin^2(n)}{n^3-1}; \quad (b) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n\,(n^2+1)}}; \quad (c) \sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}; \quad (d) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3+(-1)^n}\right)^n;$$

$$(e) \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad (f) \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}; \quad (g) \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n}; \quad (h) \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^4-3n^2-1};$$

$$(i) \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-\frac{1}{n}}}{n^k}; \quad (j) \sum_{n\geq 1} e^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n\sqrt{n}}; \quad (k) \sum_{n\geq 1} \left(n \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right)^{2n}; \quad (l) \sum_{n\geq 1} n^2 \left(\frac{2}{3}\right)^n;$$

$$(m) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)^n; \quad (n) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+3}\right)^{n\sqrt{n}}; \quad (o) \sum_{n\geq 1} \left(n \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)^{2n};$$

$$(p) \sum_{n\geq 1} e^{-n} (\log n)^n \quad (q) \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} e^{-n}; \quad (r) \sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n+1}{n^2+1}}; \quad (s) \sum_{n\geq 1} \frac{n\sqrt{n+1}}{(n+1)^3 \sqrt[3]{n^2+n}};$$

$$(t) \sum_{n\geq 1} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right); \quad (u) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} \left(\frac{9}{8}\right)^n; \quad (v) \sum_{n\geq 1} n! \left(\frac{3}{4}\right)^{n^2}; \quad (w) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(a^2+2)^n}.$$

Exercício 9. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ duas séries convergentes de termos positivos. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right); \qquad (b) \sum \frac{n+1}{n} a_n.$$

Exercício 10. Estude, quanto à natureza, a série de termo geral $\frac{a^n}{1+b^n}$ nos seguintes casos:

$$(i)\; 0 < a < b \qquad (ii)\; 0 < b \leq a < 1; \qquad (iii)\; 1 \leq b \leq a.$$

Exercício 11. Estude a convergência das seguintes séries, indicando, em particular, se a convergência é simples ou absoluta:

$$(a) \sum \frac{(-1)^n n^n}{\pi^n n!}; \qquad (b) \sum (-1)^n \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (c) \sum (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+1}$$

Exercício 12. Sejam (a_n) e (b_n) duas sucessões de termos positivos tais que as séries $\sum a_n$ e $\sum (b_n - b_{n+1})$ são convergentes.
Mostre que a série $\sum (a_n b_n)$ é uma série convergente.

Exercício 13. Pretende-se provar o seguinte Teorema:

> Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de termos positivos tais que
> $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}. \tag{1}$$
> Então
> $$\sum b_n \text{ diverge } \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge }.$$

Sejam pois duas sucessões (a_n) e (b_n) que verificam a condição (1).

(a) Seja $\omega_n = \dfrac{b_n}{a_n}$. Mostre que (ω_n) é decrescente.

(b) Deduza da alínea anterior a existência de uma constante $M \geq 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \;\; \omega_n \leq M$ e conclua.

Exercício 14. Utilizando o Teorema do exercício anterior, determine a natureza da série de termo geral
$$a_n = \frac{2 \times 5 \times 8 \times \cdots \times (3n-1)}{3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times (3n)}.$$

Exercício 15.

(a) Seja (u_n) uma sucessão de termos positivos. Mostre que
$$\sum u_n \text{ converge } \Rightarrow \sum u_n^2 \text{ converge.}$$

(b) A propriedade mantém-se válida se retirarmos a condição de positividade?

Exercício 16.

(a) Mostre que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

(b) Aplicando a desigualdade anterior, mostre que dada uma sucessão $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termos positivos,
$$\sum v_n \text{ converge } \Rightarrow \sum \frac{1}{n}\sqrt{v_n} \text{ converge.}$$

(c) Aplicação: Utilizando o resultado da alínea (d), justifique a convergência da série
$$\sum \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{n^2}}.$$

Exercício 17. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que $\sum u_n$ converge.
Mostre que a série de termo geral $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Exercício 18. Determine se são absolutamente convergentes, simplesmente convergentes ou divergentes as seguintes séries:

$$(a) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}; \quad (b) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \left(n^2+1\right)}{n^2+n+3}; \quad (c) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2\sqrt{n}};$$

$$(d) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad (e) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{6n-5}; \quad (f) \sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n.$$

Exercício 19. Seja (a_n) uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente.

Prove que a série $\sum a_n^2$ é também convergente e forneça um contra-exemplo para a impicação recíproca.