

NOME _____

Número _____ Curso _____

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 24 de junho de 2014 - Duração: 2 horas -

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

e seja A^T a matriz transposta de A . Então:

(A) $\det [AA^T] = 6$.

(B) $\det [AA^T] = -36$.

(C) $\det [AA^T] = 0$.

(D) $\det [AA^T] = 36$.

2. Considere a função $f(x) = \frac{\ln(|x+3|-2)}{(x+7)(x-4)}$ e seja D_f o domínio de f . Então:

(A) $D_f = (]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[) \setminus \{-7, 4\}$ e $\text{front}(D_f) = \{-7, -5, -1, 4\}$.

(B) $D_f = (]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[)$ e $\text{front}(D_f) = \{-5, -1\}$.

(C) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-7, 4\}$ e $\text{front}(D_f) = \{-7, 4\}$.

(D) $D_f = (]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[) \setminus \{-7, 4\}$ e $\text{front}(D_f) = \{-7, -5, -1, 4\}$.

3. Considere a função $f(x) = \frac{x + 2x \cos x}{e^{2x} - 1}$. Então:

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}$.

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$.

4. Seja f uma função contínua e diferenciável em \mathbb{R} tal que $f'(a) = 0$ e $f'(b) = 0$, sendo que $f'(x) \neq 0, \forall x \in]a, b[$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?(A) A função f nunca se anula em $]a, b[$.(B) Os pontos a e b são pontos de extremo local de f .(C) A função f tem no máximo um zero no intervalo $]a, b[$.(D) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $]a, b[$.

5. A área compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = -x^2 + 4$ e $g(x) = x^2 - 4$ para $x \in [0, 2]$, é:

- (A) 8.
- (B) $\frac{16}{3}$.
- (C) 16.
- (D) $\frac{32}{3}$.

Grupo II

(Cotações: 3.5 (=2.0+1.5); 4.0(=2.0+2.0); 3.0 (=1.5+1.5); 2.0)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - \alpha y - z = 1 \\ 2x + y - \alpha z = \beta \\ -x + (\alpha + 1)y + z = -1 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β , indicando nos casos adequados o grau de indeterminação (ou o n.º de graus de liberdade).

(b) Resolva o sistema, indicando qual o respetivo conjunto solução, nos casos: (i) $\alpha = 3$ e $\beta = 1$,
(ii) $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

2. Considere a função $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

(a) Verifique se a função é prolongável por continuidade ao ponto $x = 1$, estude a função quanto à existência de extremos locais e determine os intervalos de monotonia.

(b) Estude a função quanto às concavidades e à existência de assíntotas oblíquas.

3. Determine:

(a) o raio de convergência e o maior intervalo aberto em que a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{5^n} (x+2)^n$ é absolutamente convergente.

(b) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x) = x^{\frac{1}{5}}$, em torno do ponto 1, e aproveite o resultado para calcular um valor aproximado de $\sqrt[5]{1,1}$.

4. Considere uma função f duas vezes diferenciável em $[a, b]$ e com $f(a) = f(b) = 0$. Mostre que

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx = -2 \int_a^b f(x)dx.$$