Tópicos de Resolução

1. a)

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-b)\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b\times(-b) = b^2 .$$

b) A característica da matriz A é máxima se e só se $|A| \neq 0 \Leftrightarrow b^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$.

2. a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & a \\ 4 & 0 & b & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[-4L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & a-4 \\ 0 & -4 & b-4 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & a-4 \\ 0 & 0 & b-6 & -a \end{array}\right]$$

Se $b \neq 6,\ \forall a \in \mathrm{R}$: $r(A) = r(A\,|\,B) = n = 3$: sistema possível e determinado.
Se $b = 6$ e $a = 0$: $r(A) = r(A\,|\,B) = 2 < n = 3$: sistema possível e indeterminado, com 1 grau de liberdade.
Se $b = 6$ e $a \neq 0$: $r(A) = 2 < r(A\,|\,B) = 3$: sistema impossível.

b) Para $a = 0$ e $b = 6$, e utilizando os resultados da alínea a), obtém-se:

$$\begin{cases} x + \ \ y + \ \ z = 2 \\ \quad -4y + 2z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 + \frac{1}{2}z + \ z = 2 \\ y = 1 + \frac{1}{2}z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}z \\ y = 1 + \frac{1}{2}z \\ z = z \end{cases}$$

O conjunto de soluções é dado por: $\mathrm{C_S} = \left\{\left(1 - \frac{3}{2}k,\ 1 + \frac{1}{2}k,\ k\right),\ k \in \mathrm{R}\right\}$.

c) Utilizando os resultados da alínea a) conclui-se que as linhas da matriz ampliada $[A\,|\,B]$ são linearmente independentes para $(b \neq 6,\ \forall a \in \mathrm{R}) \vee (b = 6 \text{ e } a \in \mathrm{R}\setminus\{0\})$, porque para esses casos $r([A\,|\,B]) = 3$.

3. Temos por hipótese $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n) = \sum_{n\geq 0} a_n + 3 = 5$, pelo que $\sum_{n\geq 0} a_n = 2$. A série $\sum_{n\geq 0} a_n$ é geométrica de razão $\frac{1}{2c}$.

Como $S = \frac{a_0}{1-r} = 2$, obtém-se: $\dfrac{1}{1 - \frac{1}{2c}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2c}{2c-1} = 2 \Leftrightarrow -2c = -2 \Leftrightarrow c = 1$.

Note-se que, uma vez que a série $\sum_{n\geq 0} a_n$ é convergente, tem-se: $c \neq \frac{1}{2}$.

4. a) O domínio da função é: $D_f =]-1,\ +\infty[$
O conjunto dos pontos de acumulação (derivado) de D_f é dado por: $D'_f = [-1,\ +\infty[$.

b) No intervalo $]-1,\ 0[$ a função f é contínua por ser a composição de 2 funções contínuas em $]-1,\ 1[$; com efeito, temos: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 > -1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.
No intervalo $]0,\ +\infty[$ a função f é contínua por ser o produto de uma função contínua pela composta de uma função contínua.

Estudemos então a continuidade da função f no ponto $x=0$.

f é contínua no ponto $x=0$ se e só se $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$; ora:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} \ln\sqrt{1-x^2}=0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2e^{1-x^2}=0$ e $f(0)=0;$ pelo que f contínua no ponto $x=0$.

Conclui-se que f é contínua em todo o seu domínio.

c) A função f é diferenciável no ponto $x=0$ se e só se existe e é finito $f'(0)$. Temos:

- $f'(0^-)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\ln\sqrt{1-h^2}}{h}\underset{\text{RC}}{=}\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-h}{1-h^2}=0$
- $f'(0^+)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{h^2e^{1-h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+} he^{1-h^2}=0$

Como $f'(0^-)=f'(0^+)=0$, conclui-se que f é diferenciável em $x=0$ e que $f'(0)=0$.

5. a) $D_g=\mathrm{R}$.

$g'(x)=-2e^{-x}-(1-2x)e^{-x}=(2x-3)e^{-x}$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow(2x-3)e^{-x}=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$; pelo que $\dfrac{3}{2}$ é o único ponto crítico.

	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$
F	$\downarrow$	$-2e^{-\frac{3}{2}}$	$\uparrow$

A função g é crescente em $\left]\dfrac{3}{2},\ +\infty\right[$ e decrescente em $\left]-\infty,\ \dfrac{3}{2}\right[$ e admite um mínimo relativo: $\dfrac{3}{2}$.

b) Temos $\int(1-2x)e^{-x}dx=-e^{-x}(1-2x)-\int -e^{-x}(-2)dx=-e^{-x}(1-2x)+2e^{-x}=e^{-x}+2xe^{-x}$; logo:

$$\int_0^{+\infty}(1-2x)e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b(1-2x)e^{-x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[e^{-x}+2xe^{-x}\right]_0^b=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b}+2be^{-b}-1\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b}+2be^{-b}\right)-1=$$
$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^b}+\frac{2b}{e^b}\right)-1=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b}+\lim_{b\to+\infty}\frac{2b}{e^b}-1=$$
$$=0+\lim_{b\to+\infty}\frac{2b}{e^b}-1\underset{\text{RC}}{=}\lim_{b\to+\infty}\frac{2}{e^b}-1=-1.$$

Conclui-se que o integral é convergente e é igual a -1.

6. A primitiva obtém-se de forma imediata: $h(x)=\int\dfrac{x^2}{x^3-1}dx=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{3x^2}{x^3-1}dx=\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+c,$ com c real.

Fazendo $h(0)=3$, tem-se: $\dfrac{1}{3}\ln\left|-1\right|+c=3\Leftrightarrow c=3,$ pelo que: $h(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3-1\right|+3.$

7. A função φ é 3 vezes diferenciável em R, pelo que as funções $\varphi,\ \varphi'$ e φ'' são também diferenciáveis e logo contínuas em R.

A função φ admite extremos locais em *a*, *b* e *c*, e consequentemente temos: $\varphi'(a)=\varphi'(b)=\varphi'(c)=0.$

Sendo $\varphi'(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,\ b]$, diferenciável em $]a,\ b[$ e tal que $\varphi'(a)=\varphi'(b)$, as condições do teorema de Rolle verificam-se, pelo que: $\exists c_1 \in]a,\ b[\ :\ \varphi''(c_1)=0.$

Repetidamente $\varphi'(x)$ é contínua no intervalo $[b,\ c]$, diferenciável no intervalo $]b,\ c[$ e $\varphi'(b)=\varphi'(c)$, e portanto, verificam-se as condições do teorema de Rolle, pelo que: $\exists c_2 \in]b,\ c[\ :\ \varphi''(c_2)=0.$

No intervalo $[c_1,\ c_2]$, a função $\varphi''(x)$ é contínua, diferenciável em $]c_1,\ c_2[$ e $\varphi''(c_1)=\varphi''(c_2).$

Conclui-se, pelo teorema de Rolle, que $\exists c_3 \in]c_1,\ c_2[\ :\ \varphi'''(c_3)=0.$

8. Por definição, o conjunto de vetores $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \cdots,\boldsymbol{u}_k\}$ é linearmente independente se:
$\lambda_1\boldsymbol{v}+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{u}_k=\mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$, isto é, se o sistema é determinado.

Substituindo o vector $\boldsymbol{v}$ pela sua expressão tem-se:

$$\lambda_1\boldsymbol{v}+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{u}_k=\mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1(\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\alpha_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\alpha_k\boldsymbol{u}_k)+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{u}_k=\mathbf{0}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1\alpha_1\boldsymbol{u}_1+(\lambda_1\alpha_2+\lambda_2)\boldsymbol{u}_2+\cdots+(\lambda_1\alpha_k+\lambda_k)\boldsymbol{u}_k=\mathbf{0}.$$

Como, por hipótese, o conjunto $\{\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \cdots,\boldsymbol{u}_k\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, esta igualdade é equivalente a:

$$\begin{cases}\lambda_1\alpha_1=\mathbf{0}\\ \lambda_1\alpha_2+\lambda_2=\mathbf{0}\\ \vdots\\ \lambda_1\alpha_k+\lambda_k=\mathbf{0}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=\mathbf{0}\quad\vee\quad\lambda_1=\mathbf{0}\\ \lambda_2=-\lambda_1\alpha_2\\ \vdots\\ \lambda_k=-\lambda_1\alpha_k\end{cases}$$

Para este sistema ser determinado, $\alpha_1\neq\mathbf{0}$, pois se $\alpha_1=\mathbf{0}$ a equação $\lambda_1\alpha_1=0$ é verificada para qualquer $\lambda_1\in$ R e não apenas para $\lambda_1=0$. Tem-se assim $\alpha_1\neq 0$.

Substituindo λ_1 por 0 nas restantes equações do sistema, tem-se:

$$(\lambda_2=0,\ \forall\alpha_2)\wedge(\lambda_3=0,\ \forall\alpha_3)\wedge\cdots\wedge(\lambda_k=0,\ \forall\alpha_k).$$

Conclui-se, que o conjunto $\{\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}_2,\ \boldsymbol{u}_3,\ \cdots,\boldsymbol{u}_k\}$ é um conjunto linearmente independente de vetores se e só se $\alpha_1\neq\mathbf{0}$ e $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_k\in$ R.