Primitivas e Cálculo Integral

Cálculo de primitivas

Exercício 1. Calcule as primitivas das funções definidas pelas seguintes expressões:

(a) $4x^3 + x^2 - x + 1$;

(b) $\sin(3x) - \dfrac{1}{2}x^5 + \sqrt{x}$;

(c) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3}\cos(5x)$;

(d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - e^{3x} - \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{2}{5}e^{-2x}$;

(e) $\tan(x) + \dfrac{1}{1+x}$;

(f) $(2-4x)^5$;

(g) $\sin(x)e^{\cos(x)}$;

(h) $x^2e^{x^3} - x\cos(x^2)$;

(i) $x^2(x^3+1)^3$;

(j) $\dfrac{(1+\ln(x))^5}{x}$;

(k) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2} + \dfrac{1}{(1+x^2)\arctan x}$;

(l) $\dfrac{e^x}{1+e^x} + \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$;

(m) $\dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)} + \dfrac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}$;

(n) $\sin^3(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x)$;

(o) $\dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{x+5}{x+7}$;

(p) $\dfrac{1}{1+4x^2} + \dfrac{1}{3+4x^2}$;

(q) $\dfrac{x^2+5x-2}{1+x^2}$;

(r) $\dfrac{x^2-7x+5}{9+x^2}$;

(s) $\dfrac{x}{\sqrt{2-5x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2-5x^2}}$;

(t) $\dfrac{x^4}{e^{x^5}} + \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

Exercício 2.

a. Mostre que $\cos(x) = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ e que $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.

b. Deduza da alínea anterior que $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ e que $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Calcule $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$ e $\displaystyle\int \sin^2(x)dx$.

c. Inspirando-se nas alíneas anteriores e utilizando o binómio de Newton, calcule

$$\int \cos^4(x)dx \text{ e } \int \sin^6(x)dx.$$

Exercício 3. Calcule as primitivas das seguintes funções recorrendo à fórmula de primitivação por partes:

(a) xe^{2x};

(b) $x^2 \sin(2x)$;

(c) $(x^2 + x + 1)e^{3x}$;

(d) $\arctan(3x)$;

(e) $\ln(x)$;

(f) $\arccos(x)$;

(g) $\arccos(x) + \arcsin(x)$;

(h) $\arctan(x) + \arctan(1/x)$;

(i) $e^x \sin(2x)$

(j) $e^{2x} \cos(x)$

(k) $\sqrt{x}\ln(x)$;

(l) $\ln^2(x)$

(m) $x^2 \arctan x$;

(n) $x^3 e^{x^2}$.

Exercício 4. Primitive as funções racionais definidas pelas seguintes expressões:

(a) $\dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$;

(b) $\dfrac{1}{(x^2 - 1)(x + 2)}$;

(c) $\dfrac{x}{x^2 + 4}$;

(d) $\dfrac{x^2 + 2}{(x + 1)(x^2 + 1)}$;

(e) $\dfrac{x^3 + 3}{x^2 - 1}$;

(f) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$.

Exercício 5. Calcule as seguintes primitivas recorrendo à mudança de variável indicada:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$, $x = \tan(t)$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\tan(x)dx}{1 + \cos(x)}$, $t = \cos(x)$;

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1 - \sin(x))\cos(x)}$, $t = \sin(x)$;

(d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1 + e^x}}$, $x = \ln(t^2 - 1)$;

(e) $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}dx$, $x = 2\cos(t)$;

(f) $\displaystyle\int \frac{tdt}{\sqrt{t} + \sqrt[3]{t}}$, com $t = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ a escolher).

Exercício 6. Considere as funções «cosseno hiperbólico» e «seno hiperbólico» definidas respetivamente por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ e } \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a. Mostre que para todo o $x \in \mathbb{R}$,

(a) $\cosh' = \sinh$ e $\sinh' = \cosh$;

(b) $\sinh(2x) = 2\cosh(x)\sinh(x)$;

(c) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (Relação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica).

b. Recorrendo à mudança de variável $t = 2\sinh(x)$ calcule

$$\int \sqrt{4+t^2}dt.$$

Integrais definidos

Exercício 7. Calcule geometricamente os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^3 (2x-4)dx$;

(b) $\displaystyle\int_0^2 (4x-2)dx$;

(c) $\displaystyle\int_{-2}^3 [x]dx$;

(d) $\displaystyle\int_{-1}^1 t\cos(t)dt$;

(e) $\displaystyle\int_1^0 [3x]dx$;

(f) $\displaystyle\int_a^b xdx$.

Exercício 8. Calcule a área da região do plano delimitada pelas linhas de equações:

(a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$;

(b) $y = x^4 - 4x^2$ e $y = \sqrt{4-x^2}$;

(c) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$;

(d) $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$ e $y = x^2$.

Exercício 9. Mostre que se f é contínua em $[a;b]$ e se $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, então f possui pelo menos uma raiz em $[a;b]$.

Exercício 10. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$. Para $x \neq 0$ define-se a «média de f no intervalo $[0;x]$» por

$$M_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

a. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 0} M_f(x)$.
b. Prove que M_f é constante se e só se f é constante.
c. Prove que o contradomínio de M_f está contido no de f.

Exercício 11. Seja, para $x > 0$, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}} dt$. Mostre que $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

Exercício 12. Para $t \in [0;1]$ considere $x = \arctan(t)$.

a. Mostre que $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e que $\sin(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

b. Seja $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{(\tan(x)+1)(1+\sin^2(x))} dx$.

Procedendo à substituição $x = \arctan(t)$, mostre que $I = \int_0^1 \frac{t}{(1+2t^2)(t+1)} dt$.

c. Calcule I.

Integrais impróprios

Exercício 13. Calcule os seguintes integrais impróprios (ou mostre que são divergentes):

(a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^3}$;

(b) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)dx}{x^2+1}$;

(d) $\int_0^1 \ln(x)dx$;

(e) $\int_3^5 \frac{dx}{x-3}$;

(f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Um último desafio

Exercício 14. Considere, para $n \in \mathbb{N}_0$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

a. Calcule I_0 e I_1.

b. Mostre que para todo o $n \geq 2$,

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

c. Mostre que se $n = 2k$ é um número par ($k \in \mathbb{N}_0$),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx = \frac{\pi(2k)!}{2 \times 4^k (k!)^2}.$$

d. Obtenha uma expressão análoga para n ímpar.