Exercícios propostos

Capítulo 16

4.1. As curvas da procura e oferta são dadas por respetivamente D(p) = 270 – 10p e S(p) = 15 + 5p.

a) Obtenha a quantidade e preço de equilíbrio.
b) Agora o governo passa a cobrar um imposto *ad valorem* de 20%. Obtenha o novo equilíbrio, o imposto em €/unidade, a receita fiscal, e a carga excedentária do imposto.
c) Qual é a carga fiscal suportada por produtores e consumidores. Porque razão não é a carga fiscal suportada igualmente por ambos?
d) Suponha que o governo substitui o imposto *ad valorem* de 20% por um imposto de quantidade de €3. Explique as consequências desta política sem fazer cálculos.
e) Calcule o equilíbrio com o imposto de quantidade, e confirme as suas conclusões anteriores.

4.2. A curva inversa da oferta e procura são $P_S(q) = 1 + q$ e $P_D(q) = 17 – q$.

a) Obtenha o preço e quantidade de equilíbrio.
b) O governo introduz um imposto de quantidade de €2. Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto.
c) Como é que a carga fiscal é partilhada por produtores e consumidores? Porquê?
d) A procura aumenta para $P_D(q) = 26 – q$. O que poderia originar este aumento de procura?
e) Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto. Explique as alterações.

4.3. O ponto de partida é o mesmo que o do exercício anterior: $P_S(q) = 1 + q$ e $P_D(q) = 17 – q$. Mas o governo introduz um imposto *ad valorem* de 25% em vez do imposto de quantidade de €2.

a) Explique (quase) sem cálculos que este imposto tem o mesmo efeito que o imposto de quantidade de €2 da alínea 16.2.b).
b) Calcule o equilíbrio de mercado e confirme as conclusões da alínea anterior.

c) Agora a procura aumenta para $P_D(q) = 26 – q$. Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto. Compare com 16.2.e) e explique.

4.4. As curvas inversas da oferta e procura são $P_S(q) = 1 + 0.5q$ e $P_D(q) = 21 – 0.5q$.

a) Obtenha o preço e quantidade de equilíbrio.
b) O governo introduz um imposto de quantidade de €2. Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto.
c) O preço de uma matéria prima crucial aumenta e as empresas enfrentam um custo extra de €11 por unidade. Qual é a nova curva inversa da oferta?
d) Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto. Explique as alterações.

4.5. O ponto de partida é o mesmo que o do exercício anterior: $P_S(q) = 1 + 0.5q$ e $P_D(q) = 21 – 0.5q$. Mas o governo introduz um imposto *ad valorem* de 20% em vez do imposto de quantidade de €2.

a) Explique (quase) sem cálculos que este imposto tem o mesmo efeito que o imposto de quantidade de €2 da alínea 16.2.b).
b) Calcule o equilíbrio de mercado e confirme as conclusões da alínea anterior.
c) E como anteriormente, as empresas sofrem um agravamento dos custos em €11 por unidade. Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto. Compare com 16.4. d) e explique.

4.6. Num mercado a curva inversa da oferta é $P_S(q) = 0.4q$. Existem dez consumidores idênticos. Cada consumidor i tem uma curva de procura inversa $P_{Di}(q_i) = 30 – q_i$.

a) Obtenha a curva da procura inversa de mercado.
b) Obtenha o equilíbrio de mercado.
c) O governo agora obriga cada consumidor a pagar um imposto de quantidade de €5. Obtenha o novo equilíbrio, a receita fiscal e a carga excedentária do imposto.
d) O governo agora altera o imposto: cada consumidor tem que pagar um imposto de €5 por cada uma das primeiras cinco unidades que comprar. Qualquer unidade acima de 5 está isenta de imposto. O que acontece ao equilíbrio de mercado, receita fiscal e carga excedentária do imposto?
e) Discuta a desejabilidade e aplicabilidade dum imposto deste tipo.

4.7. Qual o efeito de um subsídio num mercado com uma curva da oferta horizontal? E num mercado com uma curva de oferta vertical?

4.8. Suponha que a curva da oferta é vertical. Qual é a carga excedentária de um imposto neste mercado?

Capítulo 18 - Tecnologia

4.9. Explique por que razão algumas tecnologias são convexas.

4.10. Considere a função de produção $f(k, l, m) = 20k^{\alpha}l^{\beta}m^{\gamma}$. Explique, justificando devidamente, em que condições esta função pode ter rendimentos constantes, crescentes e decrescentes à escala.

4.11. Quais são as diferenças entre isoquantas e curvas de indiferença? E entre mapas de curvas de indiferença e mapas de isoquantas? E entre taxa marginal de substituição de bens de consumo e taxa de substituição técnica de factores de produção? E entre os conceitos de utilidade marginal decrescente e produtividade marginal decrescente?

4.12. Na mesma função de produção podem coexistir rendimentos crescentes à escala com rendimentos decrescentes à escala? Explique.

4.13. Diga se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas e explique porquê.

a) A "Lei do Produto Marginal Decrescente" também po0deria ser designada como "Lei dos Custos Marginais Crescentes".
b) A curva do custo marginal intersecta a curva do custo fixo médio no seu mínimo.

4.14. Desenhe uma isoquanta correspondente a cada uma das funções de produção que se seguem.

a) $f(l, k) = \min\{2l, l + k\}$;
b) $f(l, k) = lk$;
c) $f(l, k) = l + \min\{l, k\}$;
d) $f(l, k) = l^{1/2} + k$.

4.15. Num processo de produção, será possível termos um produto marginal decrescente relativamente a um fator de produção, e mesmo assim, rendimentos crescentes à escala?

Capítulo 19 - Maximização do Lucro

4.16. Se uma empresa beneficiar de rendimentos crescentes à escala para qualquer nível de produto, o que é que aconteceria aos seus lucros se os preços se mantivessem constantes e duplicássemos todos os fatores produtivos?

4.17. Se uma empresa operar com rendimentos decrescentes à escala para qualquer nível de produto e se decidir produzir com duas fábricas de igual dimensão, o que é que aconteceria aos lucros conjuntos?

4.18. Se $p * PMg_1 > w_1$, a empresa deverá aumentar ou reduzir a quantidade utilizada do fator 1, para aumentar os lucros?

4.19. Admita que uma empresa maximiza os lucros no curto prazo, com um fator variável x_1 e um fator fixo x_2. Se o preço de x_2 baixar, o que é que acontece ao nível de utilização de x_1? Como é que varia o nível de lucros da empresa?

4.20. Uma empresa tem uma função de produção que se pode escrever da seguinte forma: "O produto semanal é a raiz quadrada do mínimo das unidades utilizadas de capital e de trabalho". Suponha que, no curto prazo, a empresa tem de utilizar 16 unidades de capital, mas pode variar a quantidade utilizada de trabalho.

a) Escreva a expressão do produto marginal do trabalho em função da quantidade de trabalho utilizada.
b) Se o salário e o preço do capital forem iguais a 1 unidade (w = 1 e r = 1) e o preço do produto igual a 4 unidades (p = 4) qual será a quantidade de trabalho procurada no curto prazo?
c) E se w = 1 e p = 10?
d) Determine a procura de trabalho da empresa no curto prazo como função de w e p.

4.21. Considere uma empresa que produz apenas um produto a partir de dois fatores, capital e trabalho. Os preços dos fatores são, respetivamente, w e r; l e k são as quantidades de trabalho e capital, respetivamente. A função de produção é a seguinte:

$$f(l, k) = A l^{\alpha} k^{\beta}$$

a) Diga qual o significado dos parâmetros A, α e β.

b) Resolva o problema de maximização do lucro da empresa assumindo que $\alpha + \beta < 1$.

c) Discuta a possibilidade de equilíbrio da empresa para $\alpha + \beta > 1$.

d) De que informação necessita para determinar a produção ótima da empresa se $\alpha + \beta = 1$?

e) Assuma agora que o factor capital é fixo no curto prazo ($k = k'$) e que $\alpha < 1$. Resolva o problema de maximização do lucro de curto prazo.

4.22. A empresa Alfa opera num mercado competitivo sendo a sua tecnologia representada pela seguinte função de produção $f(l, k) = l^{1/2}k^{1/2}$ onde l e k representam as quantidades dos fatores produtivos trabalho e capital. O custo de cada unidade de trabalho e de capital é 5 e 2, respetivamente.

a) Sabendo que a empresa utiliza atualmente 50 unidades de trabalho e 375 unidades de capital no seu plano de produção, demonstre que a empresa não está a operar de forma eficiente.

b) Determine o acréscimo de produção que a empresa pode conseguir, sem alteração de custos, se passar a operar de forma eficiente.

4.23. A empresa Beta opera num mercado competitivo sendo a sua tecnologia representada pela função de produção $f(l, k) = 2l + k$ onde l e k representam as quantidades dos fatores produtivos trabalho e capital. Determine em que condições é que o problema de maximização do lucro de longo prazo desta empresa tem solução.

Soluções dos exercícios propostos

4.1.

a) $S(P) = D(P) \Leftrightarrow 270 - 10*P = 15 + 5*P \Leftrightarrow -15*p = -255 \Leftrightarrow P = 17$

$S(17) = D(17) = 100$.

b) Com a introdução do imposto dois preços são relevantes: P_D e P_S, com $P_D = 1.2P_S$. $S(P_S) = D(P_D) \Leftrightarrow S(P_S) = D(1.2P_S) \Leftrightarrow 15 + 5*P = 270 – 10*1.2P \Leftrightarrow -255 = -5*P - 12*P \Leftrightarrow P_S = 15; P_D = 1.2P_S = 18$.

$S(15) = D(18) = 90$.

Imposto por unidade = 0.2x15 = 3.

Receita fiscal = 3 x 90 = 270.

Carga excedentária = 10*3/2 = 15.

c) Os consumidores pagam mais 1 euro e os produtores recebem 2 euros a menos, já que a procura é mais elástica do que a oferta.

A perda no Excedente do consumidor foi de: 1*90 + 1*10/2 = 95

A perda no Excedente do produtor foi de: 2*10/2 + 1*90 = 100

d) Não há alteração já que o imposto por unidade é o mesmo.

e) $P_D = P_S + 3$: $S(P_S) = D(P_D) \Leftrightarrow S(P_S) = D(P_S + 3) \Leftrightarrow 15 + 5*P = 270 - 10(P + 3) \Leftrightarrow -255 = -15*P - 30 \Leftrightarrow P_S = 225/15 = 15 \Leftrightarrow P_S = 15$. $P_D = P_S + 3 = 18$.

Restantes valores como em b).

4.2.

a) $P_S(Q) = P_D(Q) \Leftrightarrow Q = 8$.

$P_S(8) = P_D(8) = 9$.

b) $P_S(Q) + 2 = P_D(Q) \Leftrightarrow Q = 7$.

$P_S(7) = 8$; $P_D(7) = 10$.

Receita fiscal = 2 x 7 = 14.

Carga excedentária = (8 – 7) x (10 – 8)/2 = 1.

c) É igualmente partilhada já que as elasticidades da oferta e da procura são iguais.

d)

- Um maior número de consumidores;
- Níveis de rendimento mais altos;
- Alterações nas preferências;
- Aumento do preço de bens substitutos;
- ...

e) $P_S(Q) + 2 = P_D(Q) \Leftrightarrow 1 + Q + 2 = 26 - Q \Leftrightarrow Q = 11.5$.

$P_S(11.5) = 12.5$; $P_D(11.5) = 14.5$.

Receita fiscal = 2 x 11.5 = 23.

À medida que curva da procura se desloca paralelamente, a carga excedentária não se altera. De facto, sem imposto temos: $P_S(Q) = P_D(Q) \Leftrightarrow 1 + Q = 26 - Q \Leftrightarrow Q = 12.5$. Assim, o imposto provoca uma redução na quantidade de 1 (tal como com a curva de procura original) e a carga excedentária é a mesma.

4.3.

a) Com o imposto de quantidade de €2, temos $P_S = 8$; 25% de €8 são €2, logo $P_S = 8$ e $P_D = 10$ também são os preços de equilíbrio com o imposto de 25% sobre o valor.

b) $P_D(Q) = 1.25P_S(Q) \Leftrightarrow Q = 7$ como no exercício anterior. Os restantes valores são iguais.

c) $P_D(Q) = 1.25P_S(Q) \Leftrightarrow Q = 11$,

$P_S(11) = 12$; $P_D(11) = 15$.

Receita fiscal = 3 x 11 = 33.

Sem imposto, a quantidade de equilíbrio é 12.5 (ver ex. anterior), logo a carga excedentária é (12.5 – 11) x (15 – 12)/2 = 2.25. À medida que a procura aumenta, os preços de equilíbrio aumentam. O imposto de quantidade permanece constante, mas o valor em euros aumenta.

4.4.

a) $P_S(Q) = P_D(Q) \Leftrightarrow 1 + 0.5*Q = 21 - 0.5*Q \Leftrightarrow Q = 20$.

$P_S(20) = P_D(20) = 11$.

b) $P_S(Q) + 2 = P_D(Q) \Leftrightarrow 1 + 0.5*Q + 2 = 21 - 0.5*Q \Leftrightarrow Q = 18$.

$P_S(18) = 1 + 0.5*18 = 10$; $P_D(18) = 21 - 0.5*18 = 12$.

Receita fiscal = 2 x 18 = 36.

Carga excedentária = (12-10)*(20-18)/2 = 2.

c) $P_S(Q) = 12 + 0.5Q$.

d) $P_S(Q) + 2 = P_D(Q) \Leftrightarrow Q = 7$.

$P_S(7) = 15.5$; $P_D(7) = 17.5$.

Receita fiscal = 2 x 7 = 14.

A receita fiscal diminui porque a quantidade diminui. A carga excedentária não se altera.

4.5. O ponto de partida é o mesmo que o do exercício anterior: $P_S(q) = 1 + 0.5q$ e $P_D(q) = 21 – 0.1q$. Mas o governo introduz um imposto *ad valorem* de 20% em vez do imposto de quantidade de €2.

a) Com o imposto de quantidade de €2 temos $P_S = 10$; 20% de €10 são €2, logo $P_S = 10$ e $P_D = 12$ também são valores de equilíbrio com o imposto de 20% sobre o valor.

b) $P_D(Q) = 1.2P_S(Q) \Leftrightarrow Q = 18$, como no exercício anterior. Os restantes valores mantêm-se.

c) $P_D(Q) = 1.2P_S(Q) \Leftrightarrow Q = 6$,

   $P_S(6) = 15$; $P_D(6) = 18$.

   Receita fiscal = 3 x 6 = 18.

   Sem imposto, a quantidade de equilíbrio é 9, logo a carga excedentária é (9 – 6) x (18 – 15)/2 = 4.5. À medida que os custos aumentam, a curva de oferta desloca-se para cima e o preço de equilíbrio aumenta. O imposto permanece constante mas o seu valor em euros aumenta.

4.6. Num mercado a curva inversa da oferta é $P_S(q) = 0.4q$. Existem dez consumidores idênticos. Cada consumidor i tem uma curva de procura inversa $P_{Di}(q_i) = 30 – q_i$.

a) $P_D(q)= 30 – q \Leftrightarrow q = 30 - P_D$. Logo, $Q = 10q = 300 - 10 P_D \Leftrightarrow P_D(q) = 30 – q/10$.

b) $P_S(Q) = P_D(Q)$

   $0.4*Q = 30 – Q/10$

   $0.5*Q = 30$

   $Q = 60$

   $P_S(60)= P_D(60)=24$

   P=24 e Q = 60.

c) Novo equilíbrio: $P_S(Q) = P_D(Q) +5$

   $P_D = 25$, $P_S = 20$ e Q = 50.

   Receita fiscal = 5*50 = 250

   Carga excedentária do imposto = 5*10/2 = 25.

d) Na alínea anterior, cada consumidor compra 5 unidades. Tal como anteriormente, com a introdução deste imposto, cada consumidor comprará 5 unidades e pagará €20 ao produtor e o imposto de €5 ao Estado. No entanto, contrariamente à alínea anterior, cada consumidor comprará também uma sexta unidade ao preço de €24.

A receita fiscal será a mesma, mas não haverá carga excedentária.

d) Neste caso, um imposto deste tipo permite reunir receita fiscal sem causar ineficiência. No entanto, subjacente a este resultado está o facto de todos os consumidores serem iguais. Caso contrário, para obter o mesmo resultado, o Estado teria que lançar um esquema de tributação diferente para cada consumidor. Ainda que isto fosse possível, cada consumidor teria incentivo em comprar uma grande quantidade do bem (boa parte livre de imposto) e revender aos restantes consumidores. É um exemplo de eficiência à Pareto, não se preocupando com a distribuição. Se assim o fizesse, surgiriam hipóteses de troca.

4.7. A totalidade do subsídio é transferida para os consumidores se a oferta for horizontal. No entanto, com uma curva de oferta vertical, o subsídio seria totalmente recebido pelos produtores.

4.8. Zero. A carga excedentária mede o valor da produção que é perdida. Ora, como a quantidade que é oferecida antes e depois do imposto é a mesma, não há carga excedentária. Por outras palavras: os produtores pagam a totalidade do imposto e tudo o que pagam vai para o governo. O montante que pagariam para evitar o imposto é exatamente igual à receita fiscal arrecada pelo governo, pelo que não há carga excedentária.

4.9. A hipótese de tecnologia convexa significa que, se existem duas combinações dos fatores produtivos (k, l) e (k', l') que produzem y unidades de produto final, então a sua média ponderada produzirá pelo menos y. A convexidade é um pressuposto natural em processos produtivos em que podemos facilmente replicar o processo de produção.

4.10. Uma vez que $f(tk, tl, tm) = 20(tk)^{\alpha}(tl)^{\beta}(tm)^{\gamma} = t^{\alpha+\beta+\gamma} f(k, l, m)$, para $t > 1$, esta função tem rendimentos constantes, crescentes e decrescentes à escala quando $\alpha+\beta+\gamma$ é igual a 1, maior do que 1 e menor do que 1, respetivamente.

4.11.

- Isoquanta é um conjunto de todas as combinações possíveis entres os fatores de produção 1 e 2 que são exatamente suficientes para produzir uma determinada quantidade de produto. As isoquantas são semelhantes às curvas de indiferença. As curvas de indiferença representam os diferentes cabazes de consumo que são exatamente suficientes para produzir um determinado nível de utilidade. Porém, há uma diferença entre a curva de indiferença e as isoquantas. As segundas são indexadas com a quantidade de produto e não com o nível de utilidade. Assim, a indexação das isoquantas é fixada pela tecnologia e não tem o tipo de natureza arbitrária que a utilidade têm.
- Uma curva de indiferença é um gráfico de uma função que mostra as combinações de bens, na quantidade que torna o consumidor indiferente. Este não tem preferência entre uma combinação sobre esta curva, já que sobre esta obtêm sempre o mesmo nível de utilidade. As curvas de indiferença representam assim as preferências do consumidor. A isoquanta é uma curva que representa várias combinações de fatores de produção (terra, capital e trabalho) que resultam na mesma quantidade de produto.
- A taxa de substituição técnica de fatores de produção é o declive da isoquanta e mede a troca entre dois fatores de produção. Mede a taxa à qual a empresa terá de substituir um fator de produção por outro para manter a produção constante. A taxa marginal de substituição de bens de consumo mede a taxa à qual o consumidor está disposto a substituir o bem A pelo bem B, esta taxa mede uma troca, o número de unidades do bem B (adquiridas) por unidade do bem A (sacrificadas), desde que a troca mantenha o consumidor no mesmo nível de utilidade.
- A lei da utilidade marginal decrescente expressa a relação económica em que a utilidade adicional é cada vez menor à medida que se consome mais uma unidade. O consumidor tem uma satisfação com um bem, mas a unidade seguinte já não lhe proporciona tanto prazer como a anterior. A lei do produto marginal decrescente postula que o produto marginal de um fator diminua à medida que vamos acrescentando cada vez mais desse fator.

4.12. Sim. É claro que a tecnologia pode exibir diferentes tipos de rendimentos à escala perante diferentes níveis de produção. Pode muito bem acontecer que, para níveis de produção baixos, a tecnologia exiba rendimentos crescentes à escala – à medida que multiplicamos todos os fatores de produção por um dado fator t, a produção aumenta em mais do que t. Mais tarde, para níveis de produção mais elevados, aumentar a escala em t pode apenas aumentar a produção na mesma proporção do fator t ou até em menor proporção.

4.13.

a) Verdadeira. Desde que tenhamos uma tecnologia monotónica, sabemos que o produto total irá aumentar à medida que aumentamos a quantidade do fator 1. Mas é natural que aumente a uma taxa decrescente. Nesse sentido o produto aumenta, mas aumenta cada vez menos, na margem é cada vez menor. Inversamente os custos tornam-se marginalmente sopriores. Esta lei apenas se aplica quando todos os outros fatores de produção se mantêm inalterados.
b) Falsa. A curva do custo fixo médio é uma reta, não sendo intersectada no seu mínimo. É uma reta decrescente dado o efeito diluidor do aumento da quantidade produzida.

4.14.

a) Quando k está nas ordenadas e l nas abcissas, a isoquanta correspondente ao nível de produção y é uma reta vertical ($l = y/2$) acima da bissetriz ($k = l$) e uma reta de declive -1 ($k = y - l$) abaixo da bissetriz.
b) Trata-se de uma função de produção Cobb-Douglas. A isoquanta correspondente ao nível de produção y é uma curva decrescente, convexa e que não toca nos eixos. Todas as isoquantas têm o mesmo declive ao longo de qualquer raio que parta da origem.
c) Igual à de a).
d) Trata-se de uma função de produção quase-linear (linear em k). A isoquanta correspondente ao nível de produção y é uma curva decrescente, convexa e que toca nos dois eixos. Todas as isoquantas têm todas o mesmo declive ao longo de qualquer reta vertical (quando k está nas ordenadas e l está nas abcissas).

4.15. Sim. É perfeitamente possível a tecnologia exibir rendimentos crescentes à escala e o produto marginal ser decrescente para cada fator. Os rendimentos à escala descrevem o que acontece quando aumentamos todos os fatores de produção na mesma proporção, enquanto o produto marginal decrescente descreve o que acontece quando aumentamos um dos fatores de produção enquanto os outros se mantêm inalterados.

4.16. O lucro aumentará, na medida em que a produção aumentaria mais do que o custo dos fatores.

4.17. Se a empresa realmente operar com rendimentos decrescentes à escala, o facto de dividir a escala por 2 faria com que o produto fosse mais do que metade do anterior. Por conseguinte, a subdivisão da empresa faria com que o lucro fosse superior ao que obteria se operasse na forma de uma grande empresa. Esta é uma das razões pelas quais ter rendimentos decrescentes à escala, generalizando, se afigura pouco provável.

4.18. Aumenta.

4.19. A utilização de x_1 não varia. Os lucros aumentarão.

4.20.

a) $PMg_l = 0{,}5l^{-0,5}$ para $l < 16$ e $PMg_l = 0$ para $l \geq 16$.

b) A quantidade de trabalho procurada no curto prazo é 4 (já que minimiza o prejuízo).

c) A quantidade de trabalho procurada no curto prazo é 16.

d) $p^* PMg_l(w, p) = w$

$p^*\ 0.5^*\ l^{-0.5} = w$

$0.5^*\ l^{-0.5} = w/p$

$0.5^*\ l^{-0.5} = (p/w)^2$

$l\ = 2(p/w)^2$

$l\ = (p)^2/\ (4 * (w)^2)$ para $p < 8w$

$l(w, p) = p^2/(4w^2)$ para $p < 8w$ e $l(w, p) = 16$ para $p \geq 8w$.

4.21.

a) A é a escala de produção, o número de unidades produzidas quando $k = l = 1$, já que $f(1, 1) = A$. O parâmetro α (β) dá informação sobre o a variação do PMg_l (PMg_k): se $\alpha < 1$ ($\beta < 1$) verifica-se a Lei dos Rendimentos Decrescentes para o factor trabalho (capital). Por outro lado, a tecnologia exibe rendimentos à escala constantes, crescentes ou decrescentes para $\alpha + \beta$ igual a 1, maior do que 1 ou menor do que 1.

b) Resolvendo o problema de maximização do lucro da empresa, isto é, determinando a quantidade de k e de l que Max $pAl^{\alpha}k^{\beta}$ - wl - rk, obtém-se:

$$l(p, w, r) = (pA)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{1-\beta}{1-\alpha-\beta}} \quad \text{e}$$

$$k(p, w, r) = (pA)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

Substituindo na função de produção, obtém-se a função oferta

$$y(p, w, r) = (pA)^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{r}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

c) Não existe equilíbrio para $\alpha + \beta > 1$, já que $\alpha + \beta > 1$ corresponde a rendimentos crescentes à escala.

d) No caso $\alpha + \beta = 1$, os rendimentos são constantes à escala. Só existe equilíbrio se os preços do produto final e dos fatores forem tais que o lucro máximo é 0.

e) Com k = k' fixo, o problema tem solução já que $\alpha < 1$. Uma vez que se trata de uma tecnologia Cobb-Douglas, no óptimo temos p.PMgl = w ⇔ $pA\alpha l^{\alpha-1}k^{\beta} = w$

⇔ $l(p,w,r,k') = \left(\frac{pA\alpha}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} k^{\frac{\beta}{1-\alpha}}$

4.22.

a) No ótimo, a combinação de fatores produtivos é tal que a taxa de substituição técnica iguala o simétrico do rácio dos preços dos fatores, isto é, TST = - PMg_l/ PMg_k = - w/r. Uma vez que TST = - PMg_l/ PMg_k = -k/l, quando são usadas 50 unidades de trabalho e 375 unidades de capital, temos TST = -375/50 = 7,5. No entanto, - w/r = -5/2 = -2,5.

b) O custo actual é 50 * 5 + 375*2 = 1000.

Assim, resolvendo l*5 + k*2 = 1000 e -k/l = -2,5, obtemos l = 100 e k = 250, o que permite produzir f(100, 250) = $100^{1/2}250^{1/2}$= 50*$10^{1/2}$ =158,11.

Uma vez que f(50, 375) = 136,93, o acréscimo de produção é 158,11 - 136,93 = 21,18.

4.23. Neste caso, a tecnologia é tal que os factores produtivos são substitutos perfeitos. Assim, no óptimo a empresa só usa trabalho e temos y = 2l se w < 2r, só usa capital e temos y = k se w > 2r, podendo usar os dois factores só se w = 2r. Por outro lado, a tecnologia exibe rendimentos constantes à escala, o que implica que, para que o problema tenha solução, no óptimo o lucro tem que ser nulo. Assim:

1. Se w < 2r, temos que ter lucro máximo = 0 ⇔ py – wl = 0 ⇔ p2l –wl = 0 ⇔ p = w/2. Ou seja, o problema tem solução se 2p = w <2r.
2. Se w > 2r, temos que ter lucro máximo = 0 ⇔ py – rk = 0 ⇔ pk –rk = 0 ⇔ p = r. Ou seja, o problema também tem solução se 2p = 2r < w.

3. Se $w=2r$, temos que ter lucro máximo = 0 ⇔ $py - wl - rk = 0$ ⇔ $p(2l + k) - wl - rk = 0$ ⇔ $p(2l + k) - 2rl - rk = 0$ ⇔ $p = r$. Ou seja, o problema tem solução se $2p = 2r = w$.

Em suma, o problema de maximização do lucro tem solução se $p = \min\{w, 2r\}/2$.

Exercícios resolvidos

R4.1. Uma empresa opera com uma tecnologia descrita pela função de produção $q = L^{0.5}K^{0.75}$. O capital, K, é um fator fixo no curto prazo.

a) Esta tecnologia apresenta a lei dos rendimentos marginais decrescentes? Que tipo de rendimentos de escala apresenta esta tecnologia?

b) A empresa emprega presente 4 unidades de capital. Os preços unitários de L e K são respetivamente $w = 2$ e $r = 25$. Obtenha o custo em função de q. Qual é a quantidade produzida que minimiza os custos médio e variável médio?

c) Obtenha as quantidades dos fatores e o custo em função de w, r e q. Obtenha a curva de custo para os preços da alínea anterior (só em função de q).

d) Represente graficamente as curvas de custo de curto prazo com $K = 4$ (alínea b)) e a de longo prazo da alínea c). Para que valores de q são os dois custo iguais, e para que valores é um superior ao outro? Qual é a razão dessa relação?

Resolução:

a) Verifica-se a lei dos rendimentos marginais decrescentes para ambos os fatores. Rendimentos crescentes à escala.

b) $L = q^2/8$, $C = 0.25q^2 + 100$. $q = 20$ minimiza o custo médio. O custo variável médio é sempre crescente.

c) $L = (r/1.5w)^{0.6}q^{0.8}$, $K = (1.5w/r)^{0.4}q^{0.8}$.
$C = (1.5^{-0.6} + 1.5^{0.4})\ w^{0.4}r^{0.6}q^{0.8}$. $\rightarrow$ $C = 17.8427q$.

d) Os custos médios são iguais para q = 16.33; o custo médio de curto prazo é superior ao de longo prazo para todos os outros valores de q (as curvas são tangentes em q = 16.33). Para q = 16.33 e aos preços de fatores vigentes, a quantidade ótima (no longo prazo) de capital é 4, a mesma que está a ser usada no curto prazo. Para todos os outros valores de q, o K ótimo é diferente de 4, logo o custo médio de curto prazo é superior ao de longo prazo.