

## Exercícios propostos

### Capítulo 20

5.1. Considere a função de produção  $f(l, k) = 4l^{1/4}k^{1/4}$ .

- Obtenha as funções de procura condicionada de factores. Que tipo de informação económica nos dão estas funções?
- Obtenha a função custo e interprete-a.
- Qual é o significado económico do valor 4 (quatro), nesta função de produção?

5.2. Uma empresa tem a função de produção  $f(l, k) = Al^{1/2}k^{1/6}$ , onde  $l$  representa o número de horas de trabalho,  $k$  representa o número de unidades de capital e  $A$  é uma constante positiva.

- Determine as funções de procura condicionadas dos dois factores produtivos.
- Sabendo que o preço do trabalho é  $w = €6$  por hora e o preço do capital é  $r = €2$  por unidade, determine  $A$  para que o custo total de produzir uma unidade de output seja de €80. Interprete economicamente a constante  $A$ .

5.3. Uma empresa opera com uma tecnologia descrita pela função de produção  $f(l, k) = l^{0.5}k^{0.75}$ , onde  $l$  representa a quantidade do factor trabalho e  $k$  representa a quantidade do factor capital. O capital é um factor fixo no curto prazo.

- Esta tecnologia apresenta a lei dos rendimentos marginais decrescentes? Que tipo de rendimentos de escala apresenta esta tecnologia?
- A empresa emprega presentemente 4 unidades de capital. Os preços unitários de trabalho e capital são respectivamente  $w_l = 2$  e  $w_k = 25$ . Obtenha o custo em função da quantidade produzida  $y$ . Qual é a quantidade produzida que minimiza o custo médio e o custo variável médio?
- Sem cálculos: qual é forma genérica da curva de custo médio de curto prazo? (Crescente, decrescente, em forma de U, etc..)
- Obtenha as funções de procura condicionada dos factores e a função de custo de longo prazo. Obtenha a curva de custo médio para os preços da alínea anterior (o custo fica só em função de  $y$ ).
- Represente graficamente no mesmo gráfico as curvas de custo médio de curto prazo com  $k = 4$  (alínea b)) e a de longo prazo da alínea d). Para que valores de  $y$  são os dois custos médios iguais, e para que valores é um superior ao outro? Qual é a razão dessa relação?

5.4. Determine a função de custo  $c(w_1, w_2, y)$  correspondente às seguintes tecnologias:

- $f(l, k) = \min\{2l, 3k\}$ ;
- $f(l, k) = 2l + 3k$ ;
- $f(l, k) = \max\{2l, 3k\}$ .

5.5. O custo de produção depende da procura do produto produzido? Explique.

5.6. Considere uma empresa que produz apenas um produto a partir de dois factores, capital e trabalho. Os preços dos factores são, respectivamente,  $w$  e  $r$ ;  $l$  e  $k$  são as quantidades de trabalho e capital, respectivamente. A função de produção é a seguinte:

$$f(l, k) = l^\alpha k^\beta$$

- Calcule a função de custo médios no longo prazo.
- Comente a seguinte afirmação: "Os custos aumentam mais (menos) que proporcionalmente com a quantidade de produção quando  $\alpha + \beta < 1$  ( $\alpha + \beta > 1$ )".

## Capítulo 21

5.7. Diga qual ou quais das afirmações seguintes são verdadeiras e explique porquê.

- Os custos fixos médios nunca aumentam com o produto.
- Os custos médios são sempre maiores ou iguais do que os custos variáveis médios.
- O custo médio nunca pode aumentar quando o custo marginal é decrescente.

5.8. Uma adega cooperativa encontra no mercado apenas duas linhas de engarrafamento de vinho: a pequena e a grande. Se instalar a pequena, a sua curva de custos totais será:

$$c_s^p(y) = y^3 - 10y^2 + 35y$$

e, se instalar a grande, a sua curva de custos totais será:

$$c_s^g(y) = y^3 - 20y^2 + 108y,$$

onde  $y$  é a quantidade de vinho engarrafada.

- Considerando que o único factor fixo no curto prazo é a linha de engarrafamento, obtenha analiticamente a curva de custo total de longo prazo e represente graficamente as curvas de custo total médio de curto prazo e de longo prazo.
- Estude os rendimentos à escala desta adega cooperativa.

5.9. Uma empresa num mercado de concorrência perfeita tem a seguinte função de custo de curto prazo  $c_s(y) = y^3 - 2y^2 + 5y + 6$ .

- Determine a função de custos variáveis da empresa.
- Determine a função do custo marginal da empresa.

5.10. Para cada uma das situações seguintes, determine as funções de custos de curto e longo prazo. Explique todo o seu raciocínio usando os conceitos teóricos adequados.

- $f(l, k) = l^{0,5} k^{0,5}$ ;  $r = 1$ ;  $w = 4$ ;  $k = 2$ .
- $f(l, k) = 4k + 2l$ ;  $r = 5$ ;  $w = 4$ ;  $k = 2$ .
- $f(l, k) = \min\{2k, 3l\}$ ;  $r = 8$ ;  $w = 12$ ;  $k = 9$ .

5.11. Considere uma empresa que produz o output  $y$  com uma tecnologia que gera a função de custos totais de produção  $c(y) = 2 + 15y - 6y^2 + y^3$ .

- Esta função de custos é característica do curto ou do longo prazo? Explique, usando a definição de curto prazo e de longo prazo.
- Determine as expressões genéricas das funções de custos médios e marginal da empresa e represente-as em gráficos adequados.
- Calcule o volume de produção para o qual a empresa consegue o custo variável médio mais baixo.
- Explique, usando o gráfico da alínea b), porque é que a curva de custo marginal intersecta as curvas de custo total médio e custo variável médio nos respectivos pontos mínimos.

5.12. Considere a função de produção:  $f(l, k) = 2\sqrt{kl}$  e os preços unitários dos factores trabalho e capital de €9 e de €4, respectivamente.

- Calcule as quantidades óptimas de factores que o empresário deverá utilizar para produzir um volume de produção de 100 unidades de produto e o respectivo custo. Interprete economicamente este custo.
- Se o empresário só puder gastar €504 na compra de factores de produção, determine a quantidade de factores que pode ser adquirida e o respectivo volume de produção.
- Determine a função custo total de longo prazo e explique o respectivo significado económico.
- Que tipo de rendimentos à escala tem a função de produção? Explique que influência tem os rendimentos à escala da função de produção sobre a função de custo total de longo prazo que determinou na alínea c).
- Suponha que o empresário vai usar a quantidade  $k = 64$  u.f. de factor capital. Determine a função custo total de curto prazo e explique o seu significado económico.
- Determine o nível de produção para o qual os custos totais nos dois períodos temporais são iguais. Qual é o significado económico deste nível de output?

## Capítulo 22

5.13. Considere a empresa do exercício 5.9.

- Qual é o nível de produção que minimiza os custos médios variáveis?
- Desenhe a sua oferta de curto prazo.

5.14. Uma empresa num mercado de concorrência perfeita tem a função de custo de curto prazo  $c_s(y) = y^2 + 1$ .

- Determine a oferta de curto prazo desta empresa.
- Determine o lucro máximo.

5.15. Num mercado de concorrência perfeita, uma empresa produz de acordo com a função de produção  $f(l) = \min \{l^{1/2}, 10\}$ , onde  $l$  representa a quantidade de trabalho. Se o preço do produto final é €1, qual é a função procura de trabalho?

5.16. Num mercado de concorrência perfeita, uma empresa produz de acordo com a função de produção  $f(l, k) = 8l^{1/4}k^{1/2}$ , onde  $l$  representa o número de horas de trabalho e  $k$  representa o número de unidades de capital. Admitindo que o salário é igual a €1 por hora e o preço de cada unidade de capital é €1, determine:

- A função custo de longo prazo desta empresa
- A função oferta de longo prazo da empresa.
- O lucro máximo da empresa no longo prazo.

5.17. A função de produção da Júlia é  $f(l, k) = [\min \{l, 3k\}]^{1/2}$ , onde  $l$  representa o número de horas de trabalho e  $k$  representa o número de unidades de capital. Admitindo que o salário é igual a €3 por hora e o preço de cada unidade de capital é €9, determine:

- A função oferta de longo prazo da empresa.

- b) O lucro máximo da empresa no longo prazo.

5.18. Suponha que o custo de produzir milho depende da fertilidade da terra, de tal forma que a função custo de longo prazo é dada por  $c(y, f) = (1 + y^2)/f$  para  $y > 0$  e  $c(0, f) = 0$ , onde  $y$  representa o número de toneladas de milho produzidas.

- Determine a função de custos médios de longo prazo para um nível de fertilidade  $f$ .
- Qual é o nível de produção que minimiza os custos médios de longo prazo para um nível de fertilidade  $f$ ?
- Qual é o preço mais baixo a que pode ser vendida uma tonelada de milho de forma a cobrir os custos de produção?

## Capítulo 23

5.19. Considere um mercado onde operam 100 empresas que utilizam a mesma tecnologia. A função de produção de cada empresa é dada por  $f(x_1, x_2) = (\min\{x_1, 4x_2\})^{1/2}$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  representam as quantidades de dois factores de produção variáveis, que custam €2 e €4 por unidade, respectivamente. Para além dos custos associados aos factores variáveis, cada empresa tem ainda custos fixos no valor de €20 no curto prazo.

- Determine a função oferta de curto prazo de cada empresa.
- Determine a função oferta de mercado de curto prazo.
- Admitindo que a procura de mercado é  $D(p) = 300 - 500p/6$ , determine o preço de equilíbrio e o lucro de cada empresa no curto prazo.
- Calcule o valor do excedente do produtor.

5.20. Considere uma indústria constituída por 1000 empresas que utilizam a função de produção  $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2^{1/2}$ , onde  $x_1$  e  $x_2$  representam as quantidades de dois factores de produção que custam €1 por unidade. No longo prazo, ambos os factores são variáveis, mas no curto prazo cada empresa tem 100 unidades do factor 2.

- Determine a função oferta de mercado de curto prazo.
- Determine a função oferta de mercado de longo prazo.

5.21. Considere um mercado concorrencial onde todas as empresas que utilizam a mesma tecnologia. A função custo de longo prazo de cada empresa é  $c(y) = y^2 + 4$ , se  $y > 0$  e  $c(0) = 0$ . A função procura deste mercado é dada por  $D(p) = 50 - p$ , onde  $p$  representa o preço do produto final. Determine o número de empresas no equilíbrio de longo prazo.

5.22. Considere um mercado em equilíbrio no longo prazo onde as funções procura e oferta de mercado são, respectivamente,  $D(p) = 200 - 2p$  e  $S(p) = 100 + 3p$ . Sabe-se também que neste mercado concorrencial existem 10 empresas cada uma com a seguinte função de custos de longo prazo:

$$c(y) = \begin{cases} \beta + 255 + \beta y^2, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

onde  $\beta$  é uma constante positiva.

- Determine o preço e a quantidade de equilíbrio de cada uma das empresas.
- Determine o valor da constante  $\beta$ .

- c) Comente a seguinte frase: “Não é completamente rigoroso chamar à função de custos totais deste exercício de longo prazo, uma vez que nela está presente um custo fixo dado por  $\beta + 255$  e que não depende da produção”.

## Exercícios resolvidos

Nesta secção, não se faz referência explícita à matéria sobre a qual incidem os exercícios. Caberá ao aluno a tarefa de identificar os conceitos teóricos de que necessita.

### Exercício R 5.1

No supermercado do Joaquim cada trabalhador ganha 6 €/hora e existem 10 caixas registadoras (i.e., capital) cujo custo de utilização foi estimado em 5 €/hora. A produção, medida em número de consumidores servidos, é dada pela função de produção seguinte:

$$f(L,K) = 0.5 L^{3/4} K^2$$

Admitindo que o número de caixas registadoras não se altera, responda às seguintes questões:

- De acordo com a informação fornecida, a decisão do Joaquim quanto ao número de empregados a contratar, é uma decisão de curto ou de longo prazo? Porquê?
- Se o Joaquim quiser servir 400 clientes por hora, quantos empregados deverá ter? Qual será o custo correspondente? Interprete economicamente os resultados que obteve.
- Derive a função de custo deste supermercado quando existem 10 caixas registadoras.
- Derive as equações de custo marginal, custo médio, custo variável médio e custo fixo médio. Represente-as graficamente.

#### Resolução:

$$b) 0.5L^{3/4}(10)^2 = 400 \rightarrow L^{3/4} = 8 \rightarrow L=16$$

$$c) L^{3/4} = y/50 \quad L^*(y) = (y/50)^{4/3}. \quad c(y) = 0.065y^{4/3} + 50$$

$$d) CMg(y) = dc(y)/dy = 0.087y^{1/3}$$

$$CMe(y) = c(y)/y = 0.065y^{1/3} + 50/y$$

$$CVMe(y) = c_v(y)/y = 0.065y^{1/3}$$

$$CFMe(y) = CF/y = 50/y$$

### Exercício R5.2

Uma empresa usa trabalho, L e capital, K para produzir uma quantidade y. A função de produção é dada por  $f(L,K) = L^{1/2} K^{3/4}$ . Admita que o preço do trabalho é  $w = 2$  e o do capital é  $r = 3$ .

- Se a empresa quiser produzir 32 unidades quais as quantidades de factores que deverá usar para minimizar o seu custo?
- Determine as funções procura condicionadas dos factores. Qual é o significado económico destas funções?
- Utilize os resultados obtidos em b) para determinar a combinação de factores de produção que a empresa vai usar para produzir  $y = 32$ .
- Compare os resultados obtidos nas alíneas a) e c). O que conclui? Justifique teoricamente a sua resposta.

#### Resolução:

$$a) PMgL = \frac{\partial f}{\partial L} = \frac{2}{4} (K^{3/4} L^{-1/2}) = \frac{1}{2} (K^{3/4} L^{-1/2}) \text{ ou } PMgL = \frac{1}{2} \frac{y}{L}$$

$$PMgK = \frac{\partial f}{\partial K} = \frac{3}{4} (K^{-1/4} L^{1/2}) = \frac{3}{4} (K^{-1/4} L^{1/2}) \text{ ou } PMgK = \frac{3}{4} \frac{y}{K}$$

$$TST = \frac{PMgL}{PMgK} = \frac{\frac{1}{2} (K^{3/4} L^{-1/2})}{\frac{3}{4} (K^{-1/4} L^{1/2})} = \frac{2}{3} \left( \frac{K}{L} \right)$$

Aplicando a condição de tangência:

$$k^*, L^*: TST = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{K}{L} \right) = \frac{2}{3} \rightarrow K = L$$

Então para produzir 32 unidades de y tem-se:

$$32 = K^{5/4} \text{ (ou } L^{5/4}) \Rightarrow K \text{ (ou } L) = 16.$$

b) As funções procura condicionadas dos factores são a solução do problema genérico de minimização de custos do produtor, ou seja:

$$\begin{aligned} & \min_{L,K} wL + rK \\ \text{Sujeito a } & L^{1/2} K^{3/4} = y \end{aligned}$$

Pelas condições de 1ª ordem, temos:

$$\begin{cases} \text{TST} = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{K}{L} \right) = \frac{w}{r} & (1) \\ L^{1/2} K^{3/4} = Y & (2) \end{cases}$$

Resolvendo a 1ª equação do sistema em ordem a K (por exemplo) obtém-se:

$$K = \frac{3w}{2r} L \quad (3)$$

Substituindo (3) na equação (2) do sistema e resolvendo para a única variável - L, obtém-se a f. procura condicionada de L (4):

$$L^{1/2} \left( \frac{3w}{2r} L \right)^{3/4} = Y \rightarrow L = \frac{Y^{4/5}}{\left( \frac{3}{2} \right)^{6/5} \left( \frac{w}{r} \right)^{6/5}} \quad (4)$$

Função procura condicionada para L

Substituindo (4) em (3) e resolvendo para K obtém-se a f. procura condicionada para K (5):

$$K = \frac{3w}{2r} \left[ \frac{Y^{4/5}}{\left( \frac{3}{2} \right)^{6/5} \left( \frac{w}{r} \right)^{6/5}} \right] \rightarrow K = \frac{Y^{4/5}}{\left( \frac{3}{2} \right)^{1/5} \left( \frac{w}{r} \right)^{1/5}} \quad (4)$$

Função procura condicionada para K

### Exercício R5.3

A empresa XYZ é uma empresa de serviços que tem como função de produção  $f(L,M,K) = 20 L^{1/4} M^{1/4} K^{1/2}$ . S representa o número de unidades de serviço-tipo produzidas e os factores de produção são respetivamente o número de horas de trabalho qualificado (L), o número de horas de trabalho não qualificado (M) e as instalações e equipamentos (K).

- Quantas horas de trabalho qualificado e não qualificado são necessárias para produzir de modo eficiente, no curto prazo, 400 unidades de serviços-tipo, considerando que a remuneração horária para o trabalho qualificado é de  $p_L = €8$  e para o trabalho não qualificado de  $p_M = €2$ . A utilização de K, em termos de unidades físicas, tem um valor de 32 u.f.
- Sabendo que no equilíbrio de longo prazo se deve ter:  $\frac{PMgL}{p_L} = \frac{PMgM}{p_M} = \frac{PMgK}{p_K}$  e que, o preço da utilização de K é de €5, verifique se a empresa se encontra em equilíbrio de longo prazo. Comente o resultado, referindo qual deverá ser a estratégia da empresa.

### Resolução:

a) Sendo K fixo, por estarmos no curto prazo, o problema do produtor consiste em determinar qual a quantidade de cada factor que deve adquirir tendo em conta duas restrições:

- A restrição da tecnologia e escala de produção empregue, o que pressupõe não alterar a “dimensão” de K.

2. A restrição económica: deve gastar com a aquisição da última unidade de cada factor de produção exatamente o mesmo que lhe rende essa unidade, em termos do que ela produz.

A segunda restrição significa que se chamarmos PMgL ao produto físico realizado pela última unidade contratada do factor L, o seu rendimento, em termos de valor do produto produzido, deverá ser igual ao que custa ao produtor essa unidade de factor:

$$p \cdot PMgL = P_L$$

(sendo p o preço do produto da empresa e P<sub>L</sub> o preço do factor).

Este raciocínio vale para todos os factores de produção e, assim, deverá ter-se

$$\frac{1}{p} = \frac{PMgL}{P_L} = \frac{PMgM}{P_M} = \dots = \text{constante}.$$

No curto prazo o produtor não pode fazer este raciocínio sobre K, apesar de ter de suportar os encargos resultantes da sua utilização. Isto é, havendo três factores de produção o seu custo total vem dado por:  $p_L L + p_M M + p_K K$ .

Note-se que o produtor não tem poder de decisão sobre os preços dos factores: nesse mercado ele é tomador de preço. E no curto prazo o que pode e tem de fazer é decidir quais são as quantidades de L e M que precisa adquirir de modo a que:

- 1) Atinja o seu objetivo de produção ( $S = 400$  neste exercício) e
- 2) Minimise o gasto com a aquisição dos factores “variáveis”.

Matematicamente isto corresponde a formalizar o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{Min } p_L L + p_M M + p_K K. \\ & L, M \\ & \text{s. a. } S = 20L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2} \end{aligned}$$

Sendo de sublinhar que embora ele não possa alterar a parcela de despesa que tem com K, essa parcela faz parte do custo total e L e M são as únicas variáveis sobre as quais vai tomar decisões.

#### RESOLUÇÃO PELA LAGRANGEANA

$$\text{Min } \mathcal{L}(L, M, \mu) = p_L L + p_M M + p_K K + \mu (S - 20L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2})$$

$L, M, \mu$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = p_L - \mu \frac{S}{4L} = 0 \\ 2) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M} = p_M - \mu \frac{S}{4M} = 0 \\ 3) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = S - 20L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2} = 0 \end{array} \right.$$

$\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{1}{4} 20L^{-3/4}M^{1/4}K^{1/2} = \frac{20L^{1/4}M^{1/4}K^{1/2}}{4L}$ <p>ou seja <math>\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{S}{4L}</math></p>
--

De 1) e 2) obtém-se

$$4) M = \frac{p_L}{p_M} L$$

e substituindo em 3) vem

$$S = 20 L^{1/4} \left( \frac{p_L}{p_M} L \right)^{1/4} K^{1/2} \Rightarrow S^2 = 20^2 L \left( \frac{p_L}{p_M} \right)^{1/2} K$$

E portanto

$$L = \frac{S^2}{400K} \cdot \left( \frac{p_M}{p_L} \right)^{1/2}.$$

Substituindo nesta expressão os dados do enunciado, ( $S = 400, K = 32$  e  $p_L = 8$  e  $p_M = 2$ ), obtém-se finalmente  $L = 6,25$  e  $M = 25$  (tendo em conta a relação 4)).

#### RESOLUÇÃO ALTERNATIVA PELA CONDIÇÃO DE TANGÊNCIA



Sabendo-se que  $TST = \frac{PMgL}{PMgM} = \frac{P_L}{P_M}$  pode obter-se de forma mais expedita a relação entre as quantidades (unidades físicas) de L e de M a adquirir, substituindo depois a relação existente entre estas quantidades na função de produção, como antes se fez:

$$TST = \frac{\frac{S}{4L}}{\frac{S}{4M}} = \frac{M}{L} = \frac{P_L}{P_M} \Rightarrow M = \frac{P_L}{P_M} \cdot L$$

b) Saber se o valor de K com que a empresa está a trabalhar no curto prazo é um equilíbrio de longo prazo equivale a verificar se, para este factor também se verifica a relação que antes se testou para o factor variável, isto é:

$$5) \quad \frac{1}{p} = \frac{PMgL}{p_L} = \frac{PMgM}{p_M} = \frac{PMgK}{p_K}$$

Como anteriormente se viu, a produtividade marginal de L (ou de M) pode-se apresentar como  $\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{S}{4L}$  (ou  $\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{S}{4M}$ ), valendo a pena destacar que isto significa, como diz a teoria, que ela depende não só do nível de produção como da quantidade do factor já usado (confira o significado de 'marginal'). Sendo conhecidos os resultados da alínea anterior obtém-se imediatamente os valores das produtividades, respetivamente:

$$PMgL = \frac{S}{4L} = \frac{400}{4 * 6,25} = 16 \quad e \quad PMgM = \frac{S}{4M} = \frac{400}{4 * 25} = 4$$

Ao maior preço do trabalho qualificado corresponde uma produtividade mais elevada que, no entanto, respeita a condição inicial antes explicitada, isto é:

$$\frac{PMgL}{p_L} = \frac{16}{8} = 2 \quad e \quad por \ sua \ vez \quad \frac{PMgM}{p_M} = \frac{4}{2} = 2.$$

Assim a condição 5) implica que também se tenha  $\frac{PMgK}{p_K} = 2$  ou, tendo em conta a forma anterior de calcular a produtividade marginal e os valores (dados) de K e do seu preço,

$$6) \quad \frac{PMgK}{p_K} = \frac{\frac{S}{2K}}{p_K} = \frac{400}{2 * 32 * 50} = 0,125$$

o que significa que a condição de equilíbrio de longo prazo não é respeitada. Como poderemos interpretar este resultado ou qual deverá então ser a estratégia da empresa?

Responder a esta pergunta equivale a calcular qual deveria ser a quantidade a usar de K tendo presente que são conhecidos quer a sua produtividade (ao nível predefinido de produção) quer o seu preço.

A produtividade de K,  $PMgK = \frac{S}{2K} = \frac{400}{2 * 32} = 6,25$ , está claramente abaixo da produtividade do trabalho qualificado e no entanto, por unidade física do seu uso, o respetivo preço é muito superior. Tendo presente que no mercado dos factores a empresa, por definição é tomadora de preço, isto revela que o preço relativo do trabalho (qualificado e não qualificado) é muito baixo. Ou dito de outro modo a empresa está a usar uma tecnologia que não tem em conta o preço relativo dos factores: não faz sentido económico usar máquinas que ficam mais caras do que o trabalho que elas vão substituir (Lembrar que a função de produção é de factores substituíveis!).

Que tecnologia deveria a empresa adotar?

Admitindo que os preços se mantinham, isso corresponde a resolver em ordem a K a equação 6) no pressuposto que o rácio Produtividade Marginal / Preço era o mesmo dos outros factores.

$$6') \quad \frac{PMgK}{p_K} = \frac{\frac{S}{2K}}{p_K} = \frac{400}{2 * K * 50} = 2 \Rightarrow K = 2$$

Este resultado mostra, essencialmente, que dada uma determinada função de produção, que exprime as restrições de natureza tecnológica, é a proporção no preço dos factores que determina se uma combinação específica desses factores é a mais económica. Isto é, determina se a tecnologia que conduziu às proporções inicialmente encontradas (na lógica do curto prazo) é economicamente ótima.

Acabamos de ver que neste caso não é: aos preços vigentes a combinação de factores deveria ser feita na proporção de L=6,25, M=25 e K=2. Mas se substituirmos estes valores na função de produção verificamos que o nível de produção conseguido com estas quantidades de inputs é de apenas 100. Quer isto dizer que precisaríamos de multiplicar por 4 a quantidade produzida.

Verificando que a função é homogénea de grau 1, facilmente concluímos que é por esse mesmo factor que precisamos multiplicar a quantidade a adquirir de cada um dos factores. Então o equilíbrio de “longo prazo” para estes preços será dado por  $L=25$ ,  $M=100$  e  $K=8$ . Até que ponto esta “tecnologia” é mais económica do que a inicialmente disponível?

Calculando os custos correspondentes vem,

$$CT_{INICIAL} = p_L L + p_M M + p_K K = 6,25 * 8 + 25 * 2 + 50 * 32 = 1700.$$

$$CT_{OPTIMIZADO} = p_L L + p_M M + p_K K = 25 * 8 + 100 * 2 + 50 * 8 = 800 .$$

#### Exercício R5.4

A empresa GESI produz um dado produto na quantidade  $y$  e utiliza como factores de produção trabalho ou capital. Cada unidade de  $k$  proporciona 4 unidades de output enquanto cada unidade de  $l$  proporciona 2 unidades de output. Os factores trabalho e capital são adquiridos em mercados perfeitamente competitivos aos preços de, respetivamente,  $w = 4$  e  $r = 4$ .

- Escreva a expressão genérica da função de produção da empresa, justificando o seu raciocínio. Com base nesta caracterização da tecnologia da empresa, que combinação de inputs irá a empresa utilizar se pretender minimizar os custos de produção?
- Determine as funções de procura dos factores como função da quantidade produzida.
- Obtenha as funções de custo total, custo médio e custo marginal da empresa.

#### Resolução

a)  $k$  e  $l$  são substitutos perfeitos na produção. Para produzir uma unidade de produto  $y$ , a empresa utiliza ou  $k$  ou uma combinação de ambos. Então, se a empresa dispuser de uma determinada quantidade  $k$  de factor capital e de uma determinada quantidade  $l$  de factor trabalho, a empresa pode produzir determinada quantidade de output de acordo com a seguinte tecnologia:  $f(k,l) = 4k + 2l$ . Pela função de produção, os inputs  $k$  e  $l$  são substitutos perfeitos entre si  $\rightarrow$  a função de produção é do tipo aditivo e a TST é constante. A empresa irá usar a combinação de inputs que lhe minimiza o custo de produção. Como os preços de  $k$  e de  $l$  são iguais, e sabendo que uma unidade de capital produz o dobro de uma unidade de trabalho, então a empresa irá usar apenas factor capital.

b) Como vimos, dados os preços dos inputs e a restrição tecnológica, a empresa, somente utiliza o factor capital na produção pelo que só há uma única função procura de factores. Assim:  $l(y) = 0$  e, como  $y = 4k$ , temos  $k(y) = y/4$ .

c)  $c(y) = r k(y) + w l(y) = 4*0 + 4*y/4 = y$ ;  $CMc(y) = CMg(y) = 1$ .

#### Exercício R5.5

Suponha que existem 80 empresas num mercado de concorrência perfeita em que a empresa representativa tem a função de custo  $c(q) = 100 + 4q^2$  sendo a procura de mercado  $D(p) = 1280 - 30p$ .

- Obtenha o preço e a quantidade de equilíbrio no mercado.
- Determine o lucro da empresa.
- Deverá a empresa continuar a produzir no curto prazo? Haverá equilíbrio neste mercado, no longo prazo? Justifique.

#### Resolução

a. O equilíbrio de mercado obtém-se quando a quantidade procurada pelos consumidores é igual à quantidade oferecida pelas empresas. Como a curva da procura já está explicitada no enunciado, falta obter a curva da oferta.

A curva da oferta de mercado obtém-se agregando as curvas da oferta individuais das empresas de modo a que a quantidade oferecida no mercado corresponda à soma das quantidades produzidas. Assim,  $S(p) = \sum q_i$ . Como, por hipótese, as empresas maximizam o lucro, as quantidades que produzem correspondem à igualdade entre o preço e o custo marginal. Então, pode deduzir-se a curva da oferta individual de cada empresa (da empresa representativa uma vez que adoptam todas a mesma tecnologia) invertendo a curva do custo marginal e igualando este custo ao preço. Assim,  $CMg = 8q \Rightarrow p = 8q \Leftrightarrow q_i^s = p/8$ . Como existem 80 empresas no mercado,  $S(p) = 80p/8 = 10p$ . Igualando as quantidades procuradas e oferecidas, vem:  $1280 - 30p = 10p \Leftrightarrow p = 32$ ; e  $Q = 10 \times 32 = 320$ .

- b. O lucro é calculado para cada empresa. Formalmente, vem:  $\pi = (\text{Receita Média} - \text{Custo Médio}) \times q_i^s$ . Como o mercado é concorrencial,  $\text{Receita Média} = \text{Receita Marginal} = p = 32$ . Por sua vez,  $\text{Custo Médio} = c(q)/q = 100/q + 4q$ . Como o lucro é calculado para cada empresa, temos que  $q = q_i^s$ . Assim, temos que achar primeiro a quantidade que cada empresa oferece. Como existem 80 empresas,  $q_i^s = S(p)/80 = 4$  e, portanto,  $\text{CMe} = 41$ .  
Portanto, temos  $\pi = (32 - 41) \times 4 = -36$ .
- c. No curto prazo a empresa tem lucro negativo. Mas como  $|\pi| < FC$ , a empresa sofrerá um prejuízo maior se encerrar a sua actividade.

### Exercício R5.6

A empresa Quartz vende num mercado concorrencial e tem a seguinte função de lucro:  $\pi(q) = pq - 2q^3 + 20q^2 - 80q - 10$ .

- Determine a função oferta de curto prazo da empresa.
- Determine e represente graficamente o ponto de encerramento da empresa. Indique, no gráfico, o limiar de rentabilidade da empresa e explique o seu significado.
- A procura do mercado da empresa é  $D(p) = 1000 - 10p$ . Sabendo que existem 20 empresas no mercado todas iguais, calcule o preço de equilíbrio.

#### Resolução:

a)  $c(q) = 2q^3 - 20q^2 + 80q + 10$ ;

$$q_i^s: \begin{cases} p = \text{CMg} \\ p \geq \text{minCVMe} \end{cases}$$

$$p = 6q^2 - 40q + 80 \rightarrow q_i^s = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 * 6 * (80 - p)}}{2 * 6} \rightarrow q_i^s = \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12}$$

$$\text{CVMe} = 2q^2 - 20q + 80 \rightarrow \text{min CVMe} : \frac{d\text{CVMe}}{dq} = 0 \rightarrow q = 5$$

Assim,  $q=5$  é a produção da empresa com o mais baixo custo variável médio. Logo, o custo variável médio mínimo da empresa é €30. Portanto, a empresa só começará a produzir no curto prazo quando o preço de mercado for maior ou igual a €30. A curva de oferta da empresa no curto prazo é então igual a:

$$q_i^s = \begin{cases} \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} & p \geq 30 \\ 0 & p < 30 \end{cases}$$

b) O ponto ou limiar de encerramento é  $p < 30$ . O limiar de rentabilidade corresponde ao preço de mercado que anula o lucro da empresa. Este preço é igual ao valor mais baixo do custo total médio de produção; no gráfico, o valor mínimo do custo total médio corresponde ao ponto de intersecção das funções de custo marginal e de custo total médio.

c) Cada uma das 20 empresas do mercado tem a seguinte curva de oferta:

$$q_i^s = \begin{cases} \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} & p \geq 30 \\ 0 & p < 30 \end{cases}$$

Então a curva de oferta de mercado  $S(p)$  é igual à soma horizontal das curvas de oferta de cada uma das 20 empresas, ou seja:

$$S(p) = \begin{cases} 20 \times \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} & p \geq 30 \\ 0 & p < 30 \end{cases}$$

Quando o mercado estiver em equilíbrio:

$$\begin{aligned}
S(p) = D(p) &\rightarrow 20 \times \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} = 1000 - 10p \rightarrow \frac{40 + \sqrt{24p - 320}}{12} = 50 - 0,5p \\
&\rightarrow 24p - 320 = (560 - 6p)^2 \rightarrow p = \frac{6744 \mp \sqrt{6744^2 - 4 \times 36 \times 313920}}{2 \times 36} \rightarrow p^* \\
&= 86,36 \rightarrow Q^* = 136,44
\end{aligned}$$

## Soluções dos exercícios propostos

5.1.

- A procura condicionada de trabalho é dada por  $l(y) = (y^2/16)*(r/w)^{1/2}$ . A procura condicionada de capital é  $k(y) = (y^2/16)*(w/r)^{1/2}$ . Estas funções dão as quantidades de factores que conduzem ao mínimo dos custos de produção sujeito à restrição de produzir uma quantidade de produto final  $y$ .
- A função custo é dada por  $c(y) = y^2(rw)^{1/2}/8$ .
- A constante 4 (quatro) representa a escala de produção, isto é, o número de unidades de produto final que são obtidas quando se utiliza 1 unidade de cada factor produtivo.

5.2.

- Resolvendo o problema de minimização de custos, obtém-se  $l(y) = (y/A)^{3/2}*(3r/w)^{1/4}$  e  $k(y) = (y/A)^{3/2}*(w/3r)^{3/4}$ .
- $A = 0,1^{2/3}$ . A constante  $A$  representa a escala de produção, o número de unidades produzidas quando se utilizam 1 unidade de trabalho e 1 unidade de capital.

5.3

- O PMg de  $l$  é decrescente em  $l$ , logo o trabalho apresenta rendimentos decrescentes. A função de produção exibe rendimentos crescentes à escala.
- $l(y) = y^2/8$  e  $c^s(y) = y^2/4 + 100$ . A quantidade produzida que minimiza o custo médio é 20 e a que minimiza o custo variável médio é 0.
- Forma em U.
- $l(y) = y^{4/5}(2w_k/3w_l)^{3/5}$ ,  $k(y) = y^{4/5}(3w_l/2w_k)^{2/5}$  e  $c(y) = y^{4/5} w_l^{2/5} w_k^{3/5} [(2/3)^{3/5} + (3/2)^{2/5}]$
- A curva de custo médio de longo prazo é sempre decrescente, tocando na curva de custo médio de curto prazo para apenas o valor  $y = 16,33$ . (Este valor pode ser encontrado fazendo  $k(y) = 4 \Leftrightarrow y^{4/5}(3w_l/2w_k)^{2/5} = 4$  e resolvendo para  $y$ .) Para todos os outros valores de  $y$ , a curva de custo médio de curto prazo está acima da de longo prazo.

5.4.

- No óptimo temos  $2l = 3k = y$ ; logo,  $l(y) = y/2$  e  $k(y) = y/3$  e  $c(y) = y(w/2 + r/3)$ .
- No óptimo temos  $l(y) = y/2$  e  $k(y) = 0$  se  $w/2 < r/3$ ;  $l(y) = 0$  e  $k(y) = y/3$  se  $w/2 > r/3$ ; e  $l(y) = c$  e  $k(y) = (y - 2c)/30$ , com  $0 \leq c \leq y/2$ , se  $w/2 = r/3$ . Logo,  $c(y) = \min\{wy/2, ry/3\}$ .
- No óptimo temos  $l(y) = y/2$  e  $k(y) = 0$  se  $w/2 \leq r/3$ ;  $l(y) = 0$  e  $k(y) = y/3$  se  $w/2 \geq r/3$ ; e  $l(y) = c$ . Logo,  $c(y) = \min\{wy/2, ry/3\}$ .

5.6.

- Resolvendo o problema de minimização de custos, obtém-se  $l(y) = y^{1/\alpha+\beta} (\alpha r / \beta w)^{\beta/\alpha+\beta}$  e  $k(y) = y^{1/\alpha+\beta} (\beta w / \alpha r)^{\alpha/\alpha+\beta}$ .  
Logo,  $c(y) = y^{1/\alpha+\beta} w^{\alpha/\alpha+\beta} r^{\beta/\alpha+\beta} [(\beta/\alpha)^{\alpha/\alpha+\beta} + (\alpha/\beta)^{\beta/\alpha+\beta}]$  e  
 $CMe(y) = c(y)/y = y^{(1-\alpha-\beta)/\alpha+\beta} w^{\alpha/\alpha+\beta} r^{\beta/\alpha+\beta} [(\beta/\alpha)^{\alpha/\alpha+\beta} + (\alpha/\beta)^{\beta/\alpha+\beta}]$ .
- V.

5.7

- V
- V
- V

5.8 Uma adega cooperativa encontra no mercado apenas duas linhas de engarrafamento de vinho: a pequena e a grande. Se instalar a pequena, a sua curva de custos totais será:

$$c_p(y) = y^3 - 10y^2 + 35y$$

e, se instalar a grande, a sua curva de custos totais será:

$$c_g(y) = y^3 - 20y^2 + 108y$$

onde  $y$  é a quantidade de vinho engarrafada.

- Uma vez que  $c_p(y) > c_g(y)$  se e só se  $y > 7,3$ , temos  $c(y) = c_p(y)$  se  $y \leq 7,3$  e  $c(y) = c_g(y)$  se  $y \geq 7,3$ . O custo médio de curto prazo com a linha de engarrafamento pequena é  $CMe_p(y) = y^2 - 10y + 35$ . O custo médio de curto prazo com a linha de engarrafamento grande é  $CMe_g(y) = y^2 - 20y + 108$ . O custo total médio de longo prazo é a curva envelope dos custos de curto prazo, isto é  $CMe_l(y) = y^2 - 10y + 35$  para  $y \leq 7,3$  e  $CMe_l(y) = y^2 - 20y + 108$  para  $y \geq 7,3$ .
- Os rendimentos à escala desta adega cooperativa são crescentes para  $y < 5$  e  $7,3 < y < 10$  e são decrescentes para  $5 < y < 7,3$  e  $y > 10$ .

5.9

- $c_v(y) = y^3 - 2y^2 + 5y$ .
- $CMg(y) = 3y^2 - 4y + 5$ .

5.10

- Curto prazo:  $k=2 \Rightarrow l(y) = 0,5y^2$ ;  $c_s(y) = 2y^2+2$ . Longo prazo:  $k(y)=2y$ ;  $l(y)=0,5y$ ;  $c(y)=4y$ .
- Curto prazo:  $l(y) = 0,5y - 4$ ;  $c_s(y) = 2y - 6$ . Longo prazo:  $l = 0$ ;  $k(y) = y/4$ ;  $c(y) = 5y/4$ .

c) Curto prazo: no curto prazo a empresa tem 9 unidades de capital que limitam a produção (18 é o nível de produção máximo); por outro lado, suporta um custo fixo de  $8 \cdot 9 = 72$  e, para além disso, tem custos variáveis associados ao factor  $l$ ; assim, temos  $c_s(y) = 72 + 4y$  (com  $y \leq 18$ ). Longo prazo: no longo prazo os dois factores são variáveis e a proporção que minimiza o custo é tal  $2k = 3l$ ; assim, vem  $l(y) = y/3$ ,  $k(y) = y/2$  e  $c(y) = 8y$ .

5.11

c)  $y = 3$ .

5.12

- As quantidades de factores que minimizam o custo de produção são  $l = 33,3(3)$  e  $k = 75$ ;  $c(100) = 600$ .
- As quantidades de factores a usar com um custo total de 504 são  $l = 28$  e  $k = 63$ . O output que será produzido com a este custo e com esta quantidade de factores é  $y = 84$ .
- As combinações de factores que minimizam a produção de qualquer output  $y$  para os preços dados são:  $l = y/3$  e  $y = 9/12y$ . Então a função de custo total de longo prazo de produzir qualquer output para os preços dos factores que foram dados é  $c(y) = 6y$ .
- Uma vez que a função produção exhibe sempre rendimentos constantes à escala, o custo médio será constante, pelo que o custo marginal também e o custo total crescerá a um ritmo constante.
- $c_s(y) = (9y)^2 / 256 + 256$ .
- O nível de produção para o qual os custos de produção totais de curto e longo prazos são iguais, é aquele para o qual se verifica a igualdade dos custos médios de produção em ambos os períodos. Logo o nível de produção pretendido é  $y = 85,3(3)$ .

5.13

- $CME_v(y) = y^2 - 2y + 5$ . Calculando a derivada dos CME variáveis em ordem a  $y$  e igualando a zero, vem  $y = 1$ .
- A oferta de curto prazo da empresa é dada por  $p = 3y^2 - 4y + 5$  para  $p \geq 4$  e  $y = 0$  para  $p \leq 4$ .

5.14

- $S(p) = y = p/2$ .
- $\Pi(p) = p^2/4 - 1$ .
- Excedente do produtor =  $p^2/4$

5.15 A procura de trabalho é  $(1/2 w_l)^2$  se  $w_l \geq 0,1$  e é 100 se  $w_l \leq 0,1$ .

5.16

- $c(y) = 3y^{4/3} / (2^{14/3})$ .
- $S(p) = y = 2^8 p^3$ .
- $\Pi(p) = p(2^8 p^3) - 3(2^8 p^3)^{4/3} / (2^{14/3})$   
 $= 2^8 p^4 - 3p^4 2^{8 \times 4/3 - 14/3} = 2^6 p^4$ .

5.17

- Resolvendo o problema de maximização do lucro da empresa obtemos  $y^* = p/2(w_l + w_k/3)$ ; dados os preços dos factores, vem  $S(p) = p/12$ .

O valor máximo do lucro é dado por  $\Pi(p) = py^* - w_l y^{*2} - w_k y^{*2}/3$  com  $y^* = p/2(w_l + w_k/3)$ ; assim, o valor máximo do lucro é  $\Pi(p) = p^2/24$ .

5.18

- $CME(y) = 1/(fy) + y/f$ .
- $y = 1$ .
- Uma vez que  $CME(1) = 2/f$ , o preço é  $2/f$ .

5.19

- Uma vez que  $c_s(y) = 3y^2$ , temos  $CME_v(y) = 3y$ , função que atinge o mínimo de 0 para  $y = 0$ . Logo, a quantidade oferecida por cada empresa é tal  $p = CMg(y^*)$  para todo o  $p \geq 0$ , isto é  $y^* = p/6$  para todo o  $p \geq 0$ .
- $S(p) = 100p/6$ .
- $p^* = 3$ .  $\Pi(p^*) = 3 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 20 = 0,75 - 20 = -19,25$ .
- Excedente do produtor =  $-19,25 + 20 = 0,75$ .

5.20

- No curto prazo, se resolvermos o problema de minimização do custo de uma empresa, obtemos  $c_s(y) = 100 + y^2/100$ ; Logo,  $CMg(y) = 2y/100$  e  $CME_v(y) = y/100$ . Uma vez que o valor mínimo dos custos variáveis médios é 0 (correspondendo a  $y = 0$ ), a oferta de curto prazo de cada empresa é dada por  $p = CMg(y^*)$ , isto é,  $y^* = 50p$  para todo o  $p \geq 0$ . Assim, a oferta de mercado de curto prazo é  $S(p) = 50000p$ .
- No longo prazo, resolvendo o problema de minimização do custo, obtém-se uma função custo  $c(y) = 2y$ . Logo  $CME(y) = 2$ . Assim, a curva de oferta de mercado é uma curva horizontal ao nível €2, o que implica que o mercado está disposto a oferecer um número infinito de unidades se o preço for superior a €2 e 0 unidades se o preço for inferior a €2.

5.21 Num equilíbrio de longo prazo, o lucro de cada empresa é 0, isto é,  $p^*y^* - y^{*2} - 4 = 0$  e cada empresa produz  $y^*$  tal que  $p^* = CMg(y^*)$ , isto é,  $p = 2y^*$ . Resolvendo este sistema de duas equações obtemos  $y^* = 2$  e  $p^* = 4$ . Uma vez que  $D(p^*) = S(p^*)$  em equilíbrio e que  $D(p^*) = 46$ , temos  $S(p^*) = 46 = 2N$ , onde  $N$  representa o número de empresas em equilíbrio. Assim, temos  $N = 23$ .

5.22

a) O preço de equilíbrio é  $p^* = 20$ . Logo a quantidade total é 160. Como há 10 empresas no mercado então cada uma delas vai oferecer  $y^* = 16$  ao preço de equilíbrio.

b) Calcula-se o custo médio  $CMe(y) = \beta + 255/y + \beta y$ . Sabemos que no equilíbrio de longo prazo, cada empresa produz um output  $q$  que corresponde ao valor mínimo do custo médio, ou seja:

$$\min CMe(y): \frac{dCTME}{dq} = 0 \rightarrow -\frac{\beta+255}{y^2} + \beta = 0 \rightarrow y^2 = \frac{\beta+255}{\beta} \rightarrow 16^2 = \frac{\beta+255}{\beta} \rightarrow \beta = 1.$$

c) A afirmação é falsa. A parcela beta é quase fixa (ver Varian).