

## PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA 2010-2011

### Ficha de exercícios nº 2

1. O responsável por um empreendimento de exploração de gás natural, deve escolher entre 10 possíveis locais de exploração, os cinco de menor custo total. Os custos de exploração são  $c_1, c_2, \dots, c_{10}$ . A escolha dos locais 1 e 7 impede a escolha do local 8. A escolha dos locais 3 ou 4 impede o acesso ao local 5. Apenas dois dos locais 5, 6, 7, e 8 podem ser escolhidos. Apresente uma formalização para o problema do responsável do empreendimento, explicando cuidadosamente o significado das variáveis de decisão e das restrições.

2. Um fabricante de têxteis está a planear uma produção de toalhas de praia para vender antes do início do verão. As toalhas serão produzidas em lotes de 50 unidades. O fabricante já decidiu que irá produzir dois tipos de toalhas: lisas e de riscas. As toalhas lisas poderão ser amarelas ou verdes. As de riscas poderão ter riscas azuis ou encarnadas. O fabricante decidiu não produzir mais de 100 lotes de toalhas lisas e já tem uma encomenda de 40 lotes de toalhas amarelas. Decidiu também que, havendo produção de toalhas de riscas, serão produzidos pelo menos 10 lotes. Se forem produzidos os dois tipos de toalhas, lisas e de riscas, será necessário proceder à limpeza de uma das máquinas utilizadas. Essa limpeza demora meia hora e custa 60 u.m.. O fabricante dispõe de 150 horas de mão-de-obra para produzir as toalhas.

A receita unitária, o custo por lote de toalhas e o tempo de mão-de-obra necessário para produzir um lote de toalhas são apresentados na tabela seguinte.

Toalha	Receita por toalha (u.m.)	Custo por lote (u.m.)	Mão-de-obra necessária por lote (horas)
Lisa amarela	10	300	1.25
Lisa verde	12	410	1.00
Riscas azuis	14	450	2.00
Riscas encarnadas	13	440	1.50

Apresente uma formalização que permita ao fabricante adoptar o plano de produção de toalhas de praia de forma a maximizar o lucro total. Explique cuidadosamente o significado de todas as variáveis de decisão e das funções que utilizar.

3. Resolva o seguinte problema de PLI usando um algoritmo de tipo *branch and bound*:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = -x_1 - x_2 \\ \text{s.a} \quad & 4x_1 - 2x_2 \geq 1 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & x_2 \geq \frac{1}{2} \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

4. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 10x_1 + 12x_2 + 16x_3 \\ \text{s.a} \quad & 22x_1 + 25x_2 + 32x_3 \leq 72 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{aligned}$$

- Determine um majorante do valor óptimo do problema. Justifique.
- Determine um minorante do valor óptimo do problema. Justifique.
- Resolva-o por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

5. Resolva o seguinte problema de PLI pelo método dos planos de corte:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = 2x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -4x_1 + 4x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

6. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a} \quad & 2x_1 + 5x_2 \leq 25 \quad [\text{R1}] \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 25 \quad [\text{R2}] \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \quad [\text{R3}] \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

a) Escreva a relaxação linear do problema e resolva-a. O que pode afirmar sobre o valor óptimo do problema ?

b) No quadro óptimo do simplex, relativo à resolução da relaxação linear do problema, os coeficientes associados à variável  $x_2$  são

	$x_1$	$x_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
$x_2$	0	1	0	-1/3	5/3

sendo  $s_3$ ,  $s_4$  e  $s_5$  as variáveis auxiliares associadas às restrições R1, R2 e R3, respectivamente. Deduza a expressão do corte de Gomory que se obtém a partir da linha de  $x_2$ .

c) Resolva graficamente o problema que resulta da introdução do corte gerado em b) na relaxação linear do problema de PLI e comente a solução obtida.

7. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = 2x_1 - 10x_2 \\ \text{s.a} \quad & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

A solução óptima da sua relaxação linear é:  $x_1 = 3.5$  e  $x_2 = 3.5$ .

a) Determine um majorante e um minorante para o valor óptimo. Justifique.

b) Apresente a expressão de um corte. Justifique.

c) Determine a solução óptima usando um algoritmo de tipo *branch and bound*. Justifique as suas opções.

8. Considere o seguinte problema de PLI:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 7x_2 \\ \text{s.a } -2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \text{ e inteiros} \end{aligned}$$

e o quadro óptimo da sua relaxação linear:

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	solução
$Z$	0	0	18/5	17/5	261/5
$x_2$	0	1	3/5	2/5	36/5
$x_1$	1	0	-1/5	1/5	3/5

- Introduza o corte de Gomory gerado com base na linha de  $x_2$  e reotimize.
- Determine a solução óptima usando um algoritmo de tipo *branch and bound*.  
(Sugestão: use na raiz da árvore de pesquisa o corte gerado na alínea anterior).

9. Considere o problema de caixeiro viajante cuja matriz de distâncias é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 12 & 8 \\ 9 & 0 & 15 & 11 \\ 14 & 15 & 0 & 10 \\ 13 & 16 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determine um minorante para o valor óptimo do problema. Justifique a escolha do método utilizado.
- Determine um majorante para o valor óptimo do problema e justifique a escolha do método utilizado. Use o resultado obtido em a) para avaliar o majorante obtido.
- Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

10. Considere o problema de caixeiro viajante simétrico cuja matriz de distâncias é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 132 & 217 & 164 & 58 \\ 132 & 0 & 290 & 201 & 79 \\ 217 & 290 & 0 & 113 & 303 \\ 164 & 201 & 113 & 0 & 196 \\ 58 & 79 & 303 & 196 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determine uma solução admissível para o problema.
- Resolva o problema por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

11. Considere o seguinte problema de PLI.

$$\min \quad Z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.a} \quad 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7$$

$$2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$$

- Escreva a relaxação linear do problema.
- Mostre que, se o valor da variável  $x_3$  for fixado em zero, a relaxação linear do problema tem uma única solução admissível. Explícite essa solução.
- Sabendo que a solução ótima da relaxação linear do problema é  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1/2$ , resolva-o por um algoritmo de *branch and bound*. Indique as regras utilizadas.

12. Considere o seguinte problema de PLI e o quadro final de simplex da sua relaxação linear:

$$\max \quad Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{s.a} \quad 4x_1 - 4x_2 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$-x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

	$x_1$	$x_2$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	solução
$Z$	0	0	3/20	11/5	0	135/4
$x_1$	1	0	3/20	1/5	0	15/4
$x_2$	0	1	-1/10	1/5	0	5/2
$s_3$	0	0	1/4	0	1	25/4

- Deduza a expressão do corte de Gomory gerado com base na linha de  $x_2$ .
- Os cortes de Gomory gerados com base nas linhas de  $x_2$  e de  $Z$  são equivalentes? Justifique.
- Introduza o corte gerado em a) e reotimize.