Sistemas Dinâmicos

LISTA 1

(1) Determine se o sistema dinâmico $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 3x - 3x^2$ tem pontos periódicos com período 2.

(2) Considere uma função contínua $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prove:
  (a) Se $[a,b] \subset f([a,b])$, então f tem um ponto fixo em $[a,b]$.
  (b) Se $f([a,b]) \subset [a,b]$, então f tem um ponto fixo em $[a,b]$.
  (c) Se $[c,d] \subset f([a,b])$, $[a,b] \subset f([c,d])$ e $[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$, então f tem um ponto periódico com período 2.

(3) Seja $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ o toro n-dimensional. Mostre que o endomorfismo do toro $T_A\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ é invertível (é um automorfismo do toro) sse $|\det A| = 1$.

(4) Considere a circunferência $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ dotada da métrica

$$d(x,y) = \min_{p\in\mathbb{Z}} |x - y - p|.$$

  (a) Para a rotação na circunferência $R_\alpha\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $R_\alpha(x) = x + \alpha \mod \mathbb{Z}$, mostre que se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, todas as órbitas são densas em $\mathbb{T}$.
  (b) Dada a transformação expansora na circunferência $E_2\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $E_2(x) = 2x \mod \mathbb{Z}$, determine uma órbita densa. *Sugestão:* escreva $x \in [0,1[$ na base binária:

$$\begin{aligned} x &= (0.a_1a_2\ldots)_2 \\ &= \sum_{i\geq 1} \frac{a_i}{2^i} \end{aligned}$$

  onde $a_i \in \{0,1\}$.

(5) Diga se os sistemas dinâmicos $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são topologicamente conjugados:
  (a) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$
  (b) $f(x) = x/3$, $g(x) = 2x$
  (c) $f(x) = 2x$, $g(x) = x^3$

(6) Calcule a entropia topológica das transformações expansoras $h(E_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$.