



Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 1ª Parte — Teórica (Cotação: 8 valores).** As respostas às questões de escolha múltipla são efectuadas na correspondente folha de resposta anexa, que será recolhida 40 minutos após o início da prova. As outras questões devem ser respondidas no próprio enunciado, no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

1. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  acontecimentos de um espaço de resultados  $\Omega$ .
  - a) Se  $A$  e  $B$  são independentes e  $P(B) > 0$ , então  $P(A | B) = P(B)$
  - b)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
  - c) Se  $A = B \cup C$ , então  $P(A) \geq P(B)$
  - d) Se  $A \cup B$  se realizou, então sabemos que  $B$  também se realizou
2. Considere uma v.a.  $X$  e a respectiva função de distribuição  $F(x)$ .
  - a)  $F(x) \leq P(X < x)$  qualquer que seja  $x$
  - b) Seja  $Y = \varphi(X)$  uma função de  $X$ . Quando  $X$  é contínua,  $Y$  é também contínua
  - c) Se  $F$  é diferenciável no ponto  $x$ , tem-se necessariamente  $F'(x) \geq 0$
  - d) Qualquer que seja  $x$ , tem-se  $0 \leq F(x) \leq 1$
3. Seja  $(X, Y)$  uma v.a. bidimensional.
  - a) Se  $E[X | Y] = 0$ , então  $E[X] = 0$
  - b) Se  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ , então podemos afirmar que  $X$  e  $Y$  são independentes
  - c) Se  $(X, Y)$  for contínua com função densidade conjunta  $f(x, y)$ , então  $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 0$
  - d) Se  $X$  e  $Y$  forem independentes e identicamente distribuídas, então  $\text{Var}(X - 2Y) = 5 \text{Var}(X)$
4. Seja  $X$  uma variável aleatória.
  - a) Se  $X \sim \text{Po}(\lambda)$ , então  $P(X = 3.14) = 0$
  - b)  $X \sim N(0, 1) \Rightarrow X + c \sim N(0, c^2)$  qualquer que seja a constante  $c$
  - c) Se  $X \sim U(0, 1)$ , então  $P(X > 3) = 0$
  - d) Se  $X \sim B(10, 0.5)$  então a distribuição de  $X$  pode ser bem aproximada por uma distribuição  $\text{Po}(5)$

5. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra casual de tamanho  $n > 2$  proveniente de uma população  $X$  possuindo valor esperado finito.
- a) Uma estatística é uma variável aleatória
  - b) À medida que o tamanho da amostra,  $n$ , aumenta,  $E[\bar{X}]$  também aumenta
  - c)  $E[X_1] = E[X_n]$
  - d)  $P(X_1 > x, X_2 > x) = P(X > x)$  qualquer que seja  $x$

**Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.**

6. Seja  $X$  uma variável aleatória tal que  $P(X = 1) + P(X = -1) = 1$ . Mostre que  $E[X^2] = 1$ .

7. Seja  $X$  uma variável aleatória contínua com função densidade dada por

$$f(x) = \frac{2}{a^2} x, \quad 0 < x < a,$$

onde  $a > 0$ . Determine  $a$  de tal forma que  $E[X] = 1$ .

Este exame é composto por duas partes. Esta é a 2.<sup>a</sup> Parte – Prática (Cotação: 12 valores). Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

**Atenção:** Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

**Cotação:**

|      |    |      |    |      |    |      |    |
|------|----|------|----|------|----|------|----|
| 1.a) | b) | 2.a) | b) | 3.a) | b) | 4.a) | b) |
| 10   | 20 | 10   | 20 | 10   | 20 | 10   | 20 |

1. Considere uma cidade onde são impressos apenas dois jornais generalistas, o jornal A e o jornal B. Sabe-se que 5% dos seus habitantes lêem ambos os jornais, enquanto que 25% lêem somente o jornal A e 20% lêem somente o jornal B.

a) Seleccionadas ao acaso 20 pessoas desta cidade, qual a probabilidade de exactamente 4 delas lerem ambos os jornais? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 0.1887       ii) 0.0596       iii) 0.0133       iv) 0.0022

b) Seleccionada ao acaso uma pessoa desta cidade, verificou-se que era leitor do jornal A. Determine a probabilidade de esta pessoa ser também leitora do jornal B.

---

**RESPOSTA 1.b)**

2. Seja  $(X, Y)$  o par aleatório que representa, para uma família residente em determinada zona, o número de filhos ( $X$ ) e o número de assoalhadas do respectivo alojamento ( $Y$ ). A função probabilidade conjunta do par,  $f_{(X,Y)}(x, y)$ , é dada por

| $y \backslash x$ | 0    | 1    | 2    | 3    |
|------------------|------|------|------|------|
| 2                | 0.04 | 0.05 | 0.02 | 0.00 |
| 3                | 0.05 | 0.09 | 0.14 | 0.05 |
| 4                | 0.02 | 0.12 | 0.22 | 0.20 |

- a) Qual a probabilidade de uma família desta zona ter mais de 1 filho e habitar um alojamento com pelo menos 3 assoalhadas? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 0.61

ii) 0.28

iii) 0.21

iv) 0.23

- b) Qual o número médio de filhos das famílias que habitam alojamentos com 4 assoalhadas?

---

**RESPOSTA 2.b)**

3. Em certa empresa, os custos fixos diários totalizam 4 unidades monetárias (u.m.) e a receita bruta diária decorrente das vendas (também em u.m.) é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição normal de média 4 e desvio padrão 1.
- a) Seleccionada uma amostra casual de tamanho 9, qual a probabilidade de a receita bruta média nessa amostra exceder 4.5 u.m.? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)
- i) 0.0082       ii) 0.0668       iii) 0.0179       iv) 0.0359
- b) Nos dias em que a receita líquida é positiva, qual a probabilidade de esta ser inferior a 2 u.m.?
- 

**RESPOSTA 3.b)**

4. A produção diária, em toneladas, de um determinado produto é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $(1, 3)$ .

a) Determine a probabilidade de num dia a produção se situar entre 2 e 2.5 toneladas.

i) 0.20

ii) 0.35

iii) 0.30

iv) 0.25

b) Determine a probabilidade de ao fim de 30 dias de laboração se conseguir satisfazer uma encomenda de 63 toneladas do produto.

---

**RESPOSTA 4.b)**