ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/Gestão – 1.º Semestre – Época Normal – Duração: 2 horas

1.ª Parte – Teórica **N.º de Exame: abcde** **16.01.2013**

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 1ª Parte — Teórica (Cotação: 8 valores). As respostas às questões de escolha múltipla são efectuadas na correspondente folha de resposta anexa, que será recolhida 40 minutos após o início da prova. As outras questões devem ser respondidas no próprio enunciado, no espaço disponibilizado para o efeito.** No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Nome: ______________________________ N.º: ________

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

1. Sejam A, B e C acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

a) Se A e B são independentes e $P(B) > 0$, então $P(A \mid B) = P(B)$ (**F**)

b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ (**V**)

c) Se $A = B \cup C$, então $P(A) \geq P(B)$ (**V**)

d) Se $A \cup B$ se realizou, então sabemos que B também se realizou (**F**)

2. Considere uma v.a. X e a respectiva função de distribuição $F(x)$.

a) $F(x) \leq P(X < x)$ qualquer que seja x (**F**)

b) Seja $Y = \varphi(X)$ uma função de X. Quando X é contínua, Y é também contínua (**F**)

c) Se F é diferenciável no ponto x, tem-se necessariamente $F'(x) \geq 0$ (**V**)

d) Qualquer que seja x, tem-se $0 \leq F(x) \leq 1$ (**V**)

3. Seja (X, Y) uma v.a. bidimensional.

a) Se $E[X \mid Y] = 0$, então $E[X] = 0$ (**V**)

b) Se $\text{Cov}(X, Y) = 0$, então podemos afirmar que X e Y são independentes (**F**)

c) Se (X, Y) for contínua com função densidade conjunta $f(x, y)$, então $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 0$ (**F**)

d) Se X e Y forem independentes e identicamente distribuídas, então $\text{Var}(X - 2Y) = 5\ \text{Var}(X)$ (**V**)

4. Seja X uma variável aleatória.

a) Se $X \sim \text{Po}(\lambda)$, então $P(X = 3.14) = 0$ (**V**)

b) $X \sim \text{N}(0, 1) \Rightarrow X + c \sim \text{N}(0, c^2)$ qualquer que seja a constante c (**F**)

c) Se $X \sim \text{U}(0, 1)$, então $P(X > 3) = 0$ (**V**)

d) Se $X \sim \text{B}(10, 0.5)$ então a distribuição de X pode ser bem aproximada por uma distribuição $\text{Po}(5)$ (**F**)

VSFF

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra casual de tamanho $n > 2$ proveniente de uma população X possuindo valor esperado finito.

a) Uma estatística é uma variável aleatória (**V**)

b) À medida que o tamanho da amostra, n, aumenta, $E[\bar{X}]$ também aumenta (**F**)

c) $E[X_1] = E[X_n]$ (**V**)

d) $P(X_1 > x, X_2 > x) = P(X > x)$ qualquer que seja x (**F**)

Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.

6. Seja X uma variável aleatória tal que $P(X = 1) + P(X = -1) = 1$. Mostre que $E[X^2] = 1$.

RESPOSTA: $E[X^2] = \sum_x x^2 P(X = x) = (-1)^2\ P(X = -1) + 1^2\ P(X = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 1$.

7. Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade dada por

$$f(x) = \frac{2}{a^2}\ x\ , \quad 0 < x < a\ ,$$

onde $a > 0$. Determine a de tal forma que $E[X] = 1$.

RESPOSTA: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx = \int_0^a x\ \frac{2}{a^2}\ x\ dx = \ldots = 2a/3$. Assim, $E[X] = 1 \Leftrightarrow a = 3/2$.

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 2.ª Parte – Prática (Cotação: 12 valores). Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito.** No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

Cotação:

1.a)	b)	2.a)	b)	3.a)	b)	4.a)	b)
10	20	10	20	10	20	10	20

1. Considere uma cidade onde são impressos apenas dois jornais generalistas, o jornal A e o jornal B. Sabe-se que 5% dos seus habitantes lêem ambos os jornais, enquanto que 25% lêem somente o jornal A e 20% lêem somente o jornal B.

a) Seleccionadas ao acaso 20 pessoas desta cidade, qual a probabilidade de exactamente 4 delas lerem ambos os jornais? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☐ **i)** 0.1887 ☐ **ii)** 0.0596 ☒ **iii)** 0.0133 ☐ **iv)** 0.0022

b) Seleccionada ao acaso uma pessoa desta cidade, verificou-se que era leitor do jornal A. Determine a probabilidade de esta pessoa ser também leitora do jornal B.

RESPOSTA 1.b) Definam-se os acontecimentos $A =$ "indivíduo é leitor do jornal A" e $B =$ "indivíduo é leitor do jornal B". Tem-se $P(A \cap B) = 0.05$, $P(\bar{A} \cap B) = 0.20$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.25$. A probabilidade pedida é $P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A)$. Como $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$, segue-se que $P(B \mid A) = 0.05/(0.05 + 0.25) = 1/6$.

2. Seja (X, Y) o par aleatório que representa, para uma família residente em determinada zona, o número de filhos (X) e o número de assoalhadas do respectivo alojamento (Y). A função probabilidade conjunta do par, $f_{(X,Y)}(x, y)$, é dada por

$y\backslash x$	0	1	2	3
2	0.04	0.05	0.02	0.00
3	0.05	0.09	0.14	0.05
4	0.02	0.12	0.22	0.20

a) Qual a probabilidade de uma família desta zona ter mais de 1 filho e habitar um alojamento com pelo menos 3 assoalhadas? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☒ **i)** 0.61 ☐ **ii)** 0.28 ☐ **iii)** 0.21 ☐ **iv)** 0.23

b) Qual o número médio de filhos das famílias que habitam alojamentos com 4 assoalhadas?

RESPOSTA 2.b) Pretende-se calcular $E[X \mid Y = 4] = \sum_{x=0}^{3} x \, f_{X|Y=4}(x)$, onde $f_{X|Y=4}(x) = f(x, 4)/f_Y(4)$. Como $f_Y(4) = \sum_{x=0}^{3} f(x, 4) = 0.56$, segue-se que

$$E[X \mid Y = 4] = (0 \times 0.02 + 1 \times 0.12 + 2 \times 0.22 + 3 \times 0.20)/0.56 \approx 2.07 \ .$$

3. Em certa empresa, os custos fixos diários totalizam 4 unidades monetárias (u.m.) e a receita bruta diária decorrente das vendas (também em u.m.) é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição normal de média 4 e desvio padrão 1.

a) Seleccionada uma amostra casual de tamanho 9, qual a probabilidade de a receita bruta média nessa amostra exceder 4.5 u.m.? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

☐ **i)** 0.0082 ☒ **ii)** 0.0668 ☐ **iii)** 0.0179 ☐ **iv)** 0.0359

b) Nos dias em que a receita líquida é positiva, qual a probabilidade de esta ser inferior a 2 u.m.?

RESPOSTA 3.b) Seja $X =$ "receita bruta diária". Sabe-se que $X \sim \mathrm{N}(4, 1^2)$. Como os custos fixos diários totalizam 4 u.m., a probabilidade pedida escreve-se

$$\begin{aligned} P(X - 4 < 2 \mid X - 4 > 0) &= \frac{P(4 < X < 6)}{P(X > 4)} \\ &= \frac{\Phi((6-4)/1) - \Phi((4-4)/1)}{1 - \Phi((4-4)/1)} \\ &= \frac{0.9772 - 1/2}{1 - 1/2} \\ &\approx 0.9544\ . \end{aligned}$$

4. A produção diária, em toneladas, de um determinado produto é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(1, 3)$.

a) Determine a probabilidade de num dia a produção se situar entre 2 e 2.5 toneladas.

☐ **i)** 0.20 ☐ **ii)** 0.35 ☐ **iii)** 0.30 ☒ **iv)** 0.25

b) Determine a probabilidade de ao fim de 30 dias de laboração se conseguir satisfazer uma encomenda de 63 toneladas do produto.

RESPOSTA 4.b) Seja X_i = "produção em toneladas no dia i", $i = 1, \ldots, n$, onde $n = 30$. A probabilidade pedida é $P(\sum_{i=1}^n X_i \geq 63)$ e sabemos que $X_i \sim \mathrm{U}(1, 3)$. Assumindo a independência dos X_i, segue-se pelo Teorema do Limite Central que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

onde $\mu = E[X_i] = (3 + 1)/2 = 2$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i) = (3 - 1)^2/12 = 1/3$. Assim,

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^n X_i \geq 63) &\approx 1 - \Phi((63 - 30 \times 2)/\sqrt{30 \times 1/3}) \\ &\approx 1 - \Phi(0.95) \\ &\approx 0.171\ . \end{aligned}$$

FIM