



Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 1ª Parte — Teórica (Cotação: 8 valores).** As respostas às questões de escolha múltipla são efectuadas na correspondente folha de resposta anexa, que será recolhida 40 minutos após o início da prova. As outras questões devem ser respondidas no próprio enunciado, no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Nome: _____ N.º: _____

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

1. Sejam A e B acontecimentos de um espaço de resultados Ω .
 - a) Se A e B são independentes, então $P(A - B) = P(A) \times P(\bar{B})$
 - b) Se $A \subset B$ e $P(B) > 0$, então $P(A) > 0$
 - c) Se $A \subset B$ e $P(B) > 0$, então $P(A | B) \times P(B) = P(A)$
 - d) Se $A \cup B = \Omega$, então A e B formam uma partição do espaço de resultados
2. Considere uma v.a. X e a respectiva função de distribuição $F(x)$.
 - a) Se X for contínua e ξ_α representar o correspondente quantil de ordem α , então $F(\xi_{0.85}) - F(\xi_{0.15}) = 0.7$
 - b) Suponha que X é discreta com função probabilidade $f(x)$. Se $F(1) = 1$, então $f(x) = 0$ para $x > 1$
 - c) Se X for contínua, então $F(x)$ é estritamente crescente
 - d) Se X for contínua com função densidade $f(x)$, então podemos afirmar que $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo o x
3. Sejam X e Y variáveis aleatórias.
 - a) Se X e Y forem identicamente distribuídas, $\text{Cov}(X, Y) \leq \text{Var}(X)$
 - b) $E(X + Y) = E[X] + E[Y] - \text{Cov}(X, Y)$
 - c) Quando (X, Y) é discreta com função probabilidade conjunta $f(x, y)$, então podemos dizer que, para todo o par (x, y) , $f(x, y) \leq P(X = x)$
 - d) Se X e Y forem independentes, então X^2 e Y^2 também o são
4. Seja X uma variável aleatória.
 - a) Se $X \sim t(4)$, então $P(-2.1 < X < 2.1) = 1 - 2 P(X > 2.1)$
 - b) Se $X \sim N(0, 4)$, então $4X^2 \sim \chi^2(1)$
 - c) Se $X \sim B(3, 0.2)$, $Y \sim B(3, 0.2)$ e $\text{Cov}(X, Y) = 0.05$, então $X + Y \sim B(6, 0.2)$
 - d) Se X segue uma distribuição exponencial, então X é uma variável aleatória discreta

5. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra casual de tamanho $n > 2$ proveniente de uma população X , e denote-se por \bar{X} a respectiva média amostral.
- a) Se $X \sim \text{Po}(\lambda)$ e $n = 3$, então a distribuição de \bar{X} pode ser bem aproximada por uma normal
 - b) $T = 10 + \exp(\bar{X})$ é uma estatística
 - c) Quanto maior n , menor a variância de qualquer estatística T (assumindo que a variância existe)
 - d) $P(X_1 > x) = 1 - P(X_2 \leq x)$ qualquer que seja x

Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.

6. Sejam A e B dois acontecimentos definidos no mesmo espaço de resultados Ω . Mostre que se $P(A) = 0.7$ e $P(B) = 0.4$, então A e B não podem ser incompatíveis.

7. Mostre que, existindo $\text{Var}(X)$ e sendo c uma constante, então $\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$.

Este exame é composto por duas partes. Esta é a 2.^a Parte – Prática (Cotação: 12 valores). Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

Cotação:

1.a)	b)	2.a)	b)	3.a)	b)	4.a)	b)
10	20	10	20	10	20	10	20

1. Na sua deslocação habitual de mota para o ISEG, o João passa por dois semáforos de funcionamento independente. A probabilidade de cada um deles se apresentar verde à sua passagem é 0.4 para o primeiro e 0.5 para o segundo. Admita que este estudante chega a tempo do começo da primeira aula se, e só se, pelo menos um dos dois semáforos se apresentar verde à sua passagem.
- a) Em três deslocações ao ISEG, qual a probabilidade de o João encontrar o primeiro semáforo verde na primeira viagem mas não nas outras duas. (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)
- i) 0.1440 ii) 0.0518 iii) 0.0864 iv) 0.0311
- b) Num dia em que o João chega a tempo do começo da primeira aula, qual a probabilidade de ter encontrado o primeiro semáforo verde?

RESPOSTA 1.b)

2. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição é dada por

$$F(x) = 1 - x^{-2}, \quad x > 1.$$

a) A mediana de X é dada por (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 2

ii) 1/2

iii) $\sqrt{2}$

iv) $\sqrt{2}/2$

b) Determine $P(X > 3 | X < 5)$.

RESPOSTA 2.b)

3. O número de pessoas atendidas ao balcão de um serviço público segue um processo de Poisson de taxa média 0.25 por minuto.
- a) Na primeira hora de funcionamento do balcão, qual a probabilidade de serem atendidas menos de 11 pessoas? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)
- i) 0.6641 ii) 0.3632 iii) 0.2676 iv) 0.1185
- b) Considere 9 tempos entre atendimentos consecutivos. Determine a probabilidade de o menor deles ser superior a 5 minutos.
-

RESPOSTA 3.b)

4. Admita que a duração em minutos de uma canção *pop* é bem modelada por uma distribuição normal de média 3.5 e desvio padrão 0.5.

a) Que percentagem das canções *pop* tem uma duração superior a 2.25 minutos? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 97.72%

ii) 84.13%

iii) 99.38%

iv) 93.32%

b) Para um segmento de 30 minutos de um programa de rádio, o locutor escolhe 8 canções *pop* ao acaso. Calcule a probabilidade de o locutor conseguir passar todas as canções que escolheu.

RESPOSTA 4.b)