INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 1º Semestre
Exame em Época de Recurso, 27 de Janeiro de 2010 Duração: 2 horas

Nome: RESOLUÇÃO

Nº de Aluno: ________ Curso: ____________ Classificação: ________

Pergunta	I.1	I.2	I.3	I.4	Total
Cotação	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0
Class.					

Pergunta	II.1a	II.1b	II.2a	II.2b	II.3a	II.3b	II.3c	II.3d	II.4a	II.4b	II.4c	II.5	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	0.5	1.5	1.0	1.0	2.0	1.5	1.5	1.5	2.0	16.0
Class.													

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (4 valores)

Cada resposta correcta vale 1,0 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.
A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Sejam $\vec{u} = (1, 0, 2, 0)$ e $\vec{v} = (\alpha, 1, 1, \pi)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. O valor de α para o qual os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais é:

- [x] -2
- [ ] π
- [ ] 0
- [ ] Nenhuma das respostas anteriores está correcta

2. A expressão $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \ln(t+1)dt$ é igual a:

- [ ] $x^2\ln(x^2+1)$
- [ ] $\ln(2x)$
- [x] $2x\ln(x^2+1)$
- [ ] Nenhuma das respostas anteriores está correcta

3. A soma $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n\right]$ é igual a:

- [ ] $\dfrac{2}{3}$
- [ ] 0
- [x] $\dfrac{8}{3}$
- [ ] Nenhuma das respostas anteriores está correcta

4. Sejam A, B, P, X matrizes $n \times n$, com $|P| \neq 0$. E seja $\mathbf{0}$ a matriz nula, igualmente $n \times n$. A equação $XP + AB = \mathbf{0}$ tem por solução:

- [ ] $X = -P^{-1}AB$
- [ ] $X = -P^{-1}BA$
- [x] $X = -ABP^{-1}$
- [ ] Nenhuma das respostas anteriores está correcta

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (16 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-\alpha z=2 \\ -x+z=\beta \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Escreva este sistema sob forma matricial e classifique-o em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

Temos que:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-\alpha z=2 \\ -x+z=\beta \end{cases} \iff A\vec{x}=\vec{b} \text{ com } A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \vec{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \vec{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Seja então a matriz aumentada do sistema: $A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right]$

Para classificar o sistema, comparamos as características de A e de A_b, que transformamos por operações elementares:

$$A_b=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3+l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1+\beta \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3-l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 2+\alpha & \beta-1 \end{array}\right].$$

Temos assim três casos, para este sistema com $m=3$ incógnitas:

1. Se $\alpha \neq -2$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, então $r(A)=r(A_b)=3=m$, o sistema de equações é POSSÍVEL e DETERMINADO.

2. Se $\alpha=-2$ e $\beta=1$, então $r(A)=r(A_b)=2<m$, o sistema é POSSÍVEL e INDETERMINADO COM $3-2=1$ GRAU DE LIBERDADE.

3. Se $\alpha=-2$ e $\beta \neq 1$, então $r(A)=2<r(A_b)=3$, o sistema é IMPOSSÍVEL.

(b) Determine o valor de x para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ usando a Regra de Cramer.

Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, temos o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Calculemos o determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.(1.1-0.0) + 0 + (-1).(1.0-1.1) = 2.$

Como $|A| \neq 0$, neste caso o sistema é possível e determinado (como já sabíamos da alínea anterior) e podemos aplicar a Regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}.$$

(N.B.: Pode verificar-se esta solução resolvendo o sistema em forma de escada em (a) facilmente.)

2. Sejam os vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, k)$ e $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$, onde $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determine se $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto de vectores linearmente independentes. Justifique a sua resposta.

Seja a matriz $\underset{3\times 3}{M} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Claramente, $r(M) = 3$, logo podemos concluir que as suas linhas $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto de vectores linearmente independentes ($\forall k \in \mathbb{R}$).

De forma alternativa, poderia ainda chegar-se à mesma conclusão verificando que $|M| = 1 \neq 0$, ou através da definição de conjunto de vectores linearmente independentes.

(b) Calcule o valor de k que minimiza a distância entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

A distância entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é dada por:

$$d(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (0-k)^2} = \sqrt{2+k^2}.$$

Naturalmente, esta distância é mínima para $\boxed{k=0}$.

3. Considere a função $f(x) = x^5$.

(a) Esboce o gráfico de f, determinando analiticamente e classificando o(s) ponto(s) de estacionariedade da função.

A função $f(x) = x^5$ é contínua e diferenciável 2 vezes no seu domínio $D_f = \mathbb{R}$.
Temos ainda que $f(x) \geq 0$ se $x \geq 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$,
e $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Estudemos agora os pontos de estacionariedade de f:

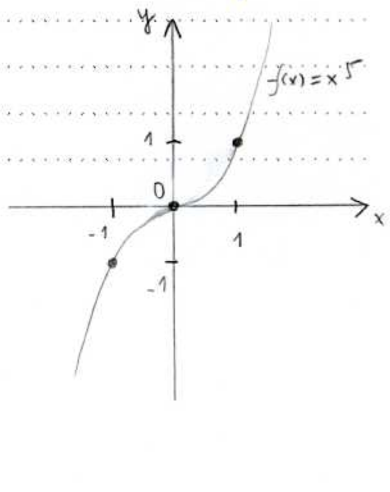
$$f'(x) = 0 \iff 5x^4 = 0 \iff x = 0.$$

A função f tem portanto apenas um ponto de estacionariedade, $x=0$, que iremos classificar através do estudo da segunda derivada de f:

$$f''(x) = 20x^3 \quad \text{e} \quad f''(0) = 0.$$

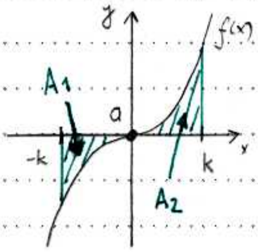
Como $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$, vemos que a função troca de concavidade em $x=0$ e concluímos que a origem é um $\boxed{\text{PONTO DE INFLEXÃO}}$.

Temos então o esboço do gráfico de f:



Note-se que f é ímpar ($f(-x) = -f(x)$), logo o seu gráfico é simétrico em relação à origem.

(b) Seja a constante $k \in \mathbb{R}^+$. Calcule a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas, para $x \in [-k; k]$.



A área pedida é $A = A_1 + A_2$.

Ora, $A_1 = \displaystyle\int_{-k}^{0} |f(x)|\,dx = \int_{-k}^{0} -x^5\,dx =$

$$= \int_{0}^{-k} x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^{-k} = \frac{1}{6}k^6.$$

Por outro lado, $A_2 = \displaystyle\int_0^k f(x)\,dx = \int_0^k x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^k = \frac{1}{6}k^6.$

Concluímos que a área pedida é: $A = 2 \times \frac{1}{6}k^6 = \boxed{\frac{1}{3}k^6}$.

(N.B.: Usando a simetria da função podia também dizer-se directamente $A = 2.A_2$.)

(c) Seja a constante $k \in \mathbb{R}^+$. Calcule $\int_{-k}^{k} f(x)dx$.

Temos que $\displaystyle\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = \int_{-k}^{k} x^5\,dx = \boxed{0}$.

Este resultado pode obter-se de várias maneiras:

- por exemplo, através da alínea anterior: $\displaystyle\int_{-k}^{k} f(x)\,dx = \int_{-k}^{0} f(x)\,dx + \int_0^k f(x)\,dx =$

$$= -\int_0^{-k} f(x)\,dx + \int_0^k f(x)\,dx = -A_1 + A_2 = 0.$$

- o integral de uma função ímpar num intervalo simétrico é sempre zero, como acabámos de ilustrar para x^5 [Desafio: demonstre este resultado analiticamente!].

- calculando directamente: $\displaystyle\int_{-k}^{k} x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-k}^{k} = \frac{1}{6}\left(k^6 - k^6\right) = 0.$

(d) Seja a função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ e com a propriedade $g(0) \neq 0$. Sabendo que $x = 0$ é um ponto de estacionariedade de g e que $g''(0) > 0$, demonstre que $x = 0$ é um ponto de mínimo local da função $h(x) = f[g(x)]$.

Dadas as propriedades de f e g, temos $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável duas vezes.

Comecemos por calcular $h'(x) = f'(g) \cdot g'(x)$.

Se $x=0$ é um ponto de estacionariedade de g, então $x=0$ é também um ponto de estacionariedade de h, pois $g'(0) = 0 \Rightarrow h'(0) = 0$.

Vamos agora classificar este ponto de estacionariedade de h pelo estudo da segunda derivada:

$$h''(x) = f''(g) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g) \cdot g''(x).$$

No ponto 0 fica: $h''(0) = f''(g(0)) \cdot 0 \cdot 0 + f'(g(0)) \cdot g''(0)$.
Ora, $f'(x) = x^4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e por hipótese $g''(0) > 0$, logo $h''(0) > 0$.
Assim, concluímos que $x=0$ é ponto de MÍNIMO local de h
QED.

4. Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Determine a aproximação linear de f em torno do ponto $x = 1$ e utilize-a para obter um valor aproximado do número $\sqrt{1,1}$.

Para x próximo de 1 podemos escrever a aproximação linear:

$$f(x) \simeq f(1) + f'(1) \cdot (x-1).$$

Tendo em conta que $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(1) = \sqrt{1} = 1$,
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f'(1) = \frac{1}{2}$,

ficamos com:

$$f(x) \simeq \left[1 + \frac{1}{2}(x-1)\right] = \frac{1}{2}(x+1).$$

Podemos usar este resultado para obter um valor aproximado de:

$$\sqrt{1,1} = f(1,1) \simeq 1 + \frac{1}{2}(1,1-1) = 1 + 0,5 \times 0,1 = \boxed{1,05}.$$

(b) Calcule $\int_0^{\pi^2} \frac{1}{f(x)} \cos(f(x))dx$.

Temos $\int_0^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\, dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\, dx$, pois

o termo $\frac{1}{\sqrt{x}}$ não está definido para $x=0$.

Ora, $\int_a^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\, dx = 2\int_a^{\pi^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\, dx \underset{\text{por substituição:}}{=}$ $u=\sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{\pi^2}} \cos u \, du = 2\left[\sin u\right]_{\sqrt{a}}^{\pi} = 2\left(0 - \sin(\sqrt{a})\right).$

Concluímos: $\int_0^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})\, dx = \lim_{a \to 0^+} 2\left(0 - \sin(\sqrt{a})\right) = 2.0 = \boxed{0}.$

(c) Calcule, sem recurso a casos notáveis, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)}$.

Temos $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$

Assim, $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)}$ resulta numa forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Como tanto a função no numerador como no denominador são diferenciáveis, podemos aplicar a Regra de l'Hôpital:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos[f(x)] \cdot f'(x)}{f'(x)} =$

$= \lim_{x\to 0^+} \cos[f(x)] = \lim_{x\to 0^+} \cos(\sqrt{x}) = \boxed{1}.$

(Note-se que a demonstração que efectuámos é valida para qualquer função f diferenciável tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, não apenas para $f(x)=\sqrt{x}$.)

5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funções diferenciáveis no seu domínio. Definindo $u = g(x)$, mostre que $El_x f[g(x)] = El_u f(u) \cdot El_x u$.

Por definição, temos: $El_x f[g(x)] = \frac{x}{f[g(x)]} \cdot \frac{d}{dx}\left\{ f[g(x)] \right\} =$

$$= \frac{x}{f[g(x)]} \cdot \frac{df}{dg}(g) \cdot \frac{dg}{dx}(x) \underset{\mu = g(x)}{\uparrow}{=} \frac{x}{f(\mu)} \cdot \frac{df}{d\mu}(\mu) \cdot \frac{d\mu}{dx}(x) =$$

$$= \frac{x}{f(\mu)} \cdot \frac{df}{d\mu}(\mu) \cdot \frac{d\mu}{dx}(x) \cdot \frac{\mu}{\mu} = \underbrace{\frac{\mu}{f(\mu)} \cdot \frac{df}{d\mu}(\mu)} \cdot \underbrace{\frac{x}{\mu} \frac{d\mu(x)}{dx}} =$$

$$= El_\mu f(\mu) \cdot El_x \mu(x) \text{ . QED}$$

O espaço restante foi intencionalmente deixado em branco. Pode utilizá-lo caso necessite, assinalando claramente as perguntas a que responde.