INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 2º Semestre
Exame em Época Normal, 31 de Maio de 2010 Duração: 2 horas

Nome: RESOLUÇÃO

Nº de Aluno: ________ Curso: ____________ Classificação: ________

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	4a	4b	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	0.5	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	14.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Sejam os vectores $\vec{a} = (0,2,0)$, $\vec{b} = (1,0,0)$ e $\vec{c} = (0,0,k)$, com $k \in \mathbb{R}$. Para que valores de k temos que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formam um conjunto de vectores linearmente independentes?

   ☐ $k = 0$ ☒ $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

   ☐ $k \in \mathbb{R}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} 2(\sin x)^n$ é convergente se:

   ☐ $x \in \mathbb{R}$ ☒ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

   ☐ $x \in [0; 2\pi]$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. Seja a função $f(x) = \ln x^2$, e seja g a sua função inversa para $x > 0$. Temos que $g'(1)$ é igual a:

   ☒ $\frac{\sqrt{e}}{2}$ ☐ 2

   ☐ $\frac{2}{e}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. Considere o conjunto $C=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x) \leq y \leq g(x)\}$, onde $f(x)=x^2-1$, e $g(x) = -x^2+1$. A área de C é igual a:

   ☒ $\frac{8}{3}$ ☐ $\frac{4}{3}$

   ☐ 0 ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y-\alpha z=2 \\ -x+y+2z=\beta \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Classifique este sistema em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

O sistema de equações proposto pode ser escrito sob forma matricial $A\vec{x}=\vec{b}$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\alpha \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

Vamos estudar a característica da matriz A e da matriz aumentada A_b:

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 1 & 2 & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{\vec{l_3} \to \vec{l_1}+\vec{l_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 2 & 3 & \beta+1 \end{array}\right] \xrightarrow{\vec{l_3} \to -\vec{l_2}+\vec{l_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & \beta-1 \end{array}\right].$$

Temos três casos possíveis:

- Se $\alpha \neq -3$, então $r(A) = r(A_b) = 3 = n$, onde n é o nº de incógnitas. Logo, concluímos que neste caso o sistema é POSSÍVEL e DETERMINADO.
- Se $\alpha = -3$ e $\beta = 1$, então $r(A) = r(A_b) = 2 < 3$. Neste caso o sistema é POSSÍVEL e INDETERMINADO com $3-2=1$ GRAU DE LIBERDADE.
- Se $\alpha = -3$ e $\beta \neq 1$, então $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$, o sistema é IMPOSSÍVEL.

(b) Resolva este sistema para $\alpha = 1$ e $\beta = 0$.

A matriz A_b foi transformada, por operações elementares, em:

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\alpha & 2 \\ 0 & 0 & \alpha+3 & \beta-1 \end{array}\right]$, que representa o sistema de equações $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y-\alpha z=2 \\ (\alpha+3)z=\beta-1 \end{cases}$.

Como foram utilizadas APENAS operações elementares, temos que este sistema é equivalente ao sistema proposto neste exercício. Assim, para $\alpha=1$ e $\beta=0$, temos:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y-z=2 \\ -x+y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y-z=2 \\ 4z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-(y+z) \\ 2y=2+z \\ z=-\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{3}{8} \\ y=\frac{7}{8} \\ z=-\frac{1}{4} \end{cases}}.$$

2. Sejam $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, e sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n.

(a) Defina a distância $d(\vec{x}, \vec{y})$.

As seguintes definições de distância são aceites:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \boxed{\|\vec{x}-\vec{y}\|} = \sqrt{(\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}.$$

(b) $d(\vec{x}, \vec{y})$ é uma função? Justifique a sua resposta.

A distância satisfaz a definição de função, pois a cada par de vectores de $\mathbb{R}^n$ (elementos do conjunto $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) atribui um e um só elemento de um conjunto de chegada (neste caso $\mathbb{R}_0^+$).

(c) Demonstre que se A e B são invertíveis, então AB também é invertível.

Por teorema, temos que a matriz $M_{n\times n}$ é invertível $\Leftrightarrow$ $|M| \neq 0$.

Por hipótese, A e B são invertíveis, logo $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$.

Ora $|AB| = |A|\cdot|B|$, por propriedade dos determinantes.

Como $|A| \neq 0$ e $|B| \neq 0$, concluímos que $|AB| \neq 0$ $\Leftrightarrow$ AB é uma matriz invertível. (QED)

3. Seja a função $f(x) = x^2e^x$.

(a) Indique o domínio de f e discuta a sua continuidade.

A função $f(x) = x^2e^x$ está definida para todos os números reais, o seu domínio é $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

A função f é o produto de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$, logo f é $\boxed{\text{contínua em } \mathbb{R}}$, o seu domínio.

(b) Utilizando a definição de derivada, mostre que $\dfrac{df(0)}{dx} = 0$.

Por definição, temos: $\dfrac{df(0)}{dx} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2 e^h - 0.1}{h} = \lim_{h\to 0} h e^h = 0$ (QED)

(c) Determine os pontos de estacionariedade de f.

Os pontos de estacionariedade de f são dados pelas soluções da equação:

$\dfrac{df(x)}{dx} = 0 \iff 2xe^x + x^2 e^x = 0 \iff (x^2 + 2x) e^x = 0 \iff$

$\iff x^2 + 2x = 0 \iff x(x+2) = 0 \iff x = 0 \lor x = -2.$

(pois $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

[Concluímos que f tem dois pontos de estacionariedade: $x=0$ e $x=-2$].

(d) Determine os pontos de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.

Calculemos $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right) = 2e^x + 2xe^x + 2xe^x + x^2 e^x =$

$= (x^2 + 4x + 2) e^x.$

Vamos agora estudar o sinal de $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ nos pontos de estacionariedade (P.E.) de f.

Temos que $\dfrac{d^2 f(0)}{dx^2} = 2.1 = 2 > 0$. Logo, pelo teorema de classificação de P.E. pelo estudo da segunda derivada, concluímos que [$x = 0$ é um ponto de MÍNIMO LOCAL de f]

Da mesma forma, uma vez que $\dfrac{d^2 f(-2)}{dx^2} = (4-8+2)e^{-2} = -2e^{-2} < 0$, pois $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, concluímos que [$x = -2$ é um ponto de MÁXIMO LOCAL de f].

(e) Discuta se os pontos de extremo obtidos anteriormente são globais.

Como vimos em a), temos $D_f = \mathbb{R}$. E $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \cdot \infty = +\infty$.

Assim, concluímos que $\boxed{x = -2 \text{ é apenas um ponto de máximo LOCAL de } f.}$

Temos ainda $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0^+$.

Regra de l'Hôpital

Tendo em conta que $f(x) \geq 0 \ \forall \in \mathbb{R}$, com a igualdade a ocorrer apenas para $x = 0$, concluímos que $\boxed{x = 0 \text{ é ponto de MÍNIMO GLOBAL de } f}$

(f) Calcule a aproximação quadrática de f em torno de $x = 0$.

A aproximação quadrática de f em torno de $x = 0$ é dada por:

$$f(0) + \frac{df(0)}{dx} \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx}(0) \cdot (x-0)^2 .$$

Utilizando as derivadas calculadas nas alíneas anteriores, podemos concluir que a aproximação pedida é dada por:

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2 = \boxed{x^2} .$$

(g) Calcule uma primitiva de f: $\int x^2 e^x dx$.

$$\int x^2 e^x dx \underset{\uparrow \text{Primitivação por partes}}{=} x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{\int x e^x dx}_{(*)} .$$

Ora, primitivando de novo por partes, temos que:

$$(*) = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x = (x-1) e^x$$

Podemos assim concluir que:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x-1) e^x = \boxed{(x^2 - 2x + 2) e^x + C}, \ (C \in \mathbb{R}) .$$

4. Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}^+$.

(a) Demonstre que $El_x\,(f.g) = El_x(f) + El_x(g)$.

Por definição, temos: $El_x\,(f.g) = \frac{x}{f.g}\,\frac{d}{dx}(f.g) =$

$$= \frac{x}{f\cdot g}\left(\frac{df}{dx}\cdot g + f\cdot\frac{dg}{dx}\right) = \frac{x.g}{f.g}\cdot\frac{df}{dx} + \frac{x.f}{f.g}\cdot\frac{dg}{dx} =$$

$$= \frac{x}{f}\,\frac{df}{dx} + \frac{x}{g}\cdot\frac{dg}{dx} = El_x(f) + El_x(g)\,.\ \text{(QED)}$$

(b) Considere $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \ln(x^2+2)$. Calcule $El_x\,(f[g(x)])$.

$$El_x\left(\sqrt{\ln(x^2+2)}\right) = \frac{x}{\sqrt{\ln(x^2+2)}}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\ln(x^2+2)}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{\ln(x^2+2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2+2)}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\ln(x^2+2)\right) =$$

$$= \frac{x}{2\ln(x^2+2)}\cdot\frac{1}{x^2+2}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right) = \left[\frac{x^2}{(x^2+2)\ln(x^2+2)}\right].$$

O espaço restante foi intencionalmente deixado em branco. Pode utilizá-lo caso necessite, assinalando claramente as perguntas a que responde.