INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 1º Semestre
Exame de Época Normal, 11 de Janeiro de 2010 Duração: 2 horas

Nome: RESOLUÇÃO

Nº de Aluno: ________ Curso: ____________ Classificação: ________

Pergunta	I.1	I.2	I.3	I.4	Total
Cotação	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0
Class.					

Pergunta	II.1a	II.1b	II.1c	II.2a	II.2b	II.2c	II.2d	II.2e	II.3a	II.3b	II.3c	II.3d	II.3e	II.4	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	16.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (4 valores)

Cada resposta correcta vale 1,0 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. O determinante $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{vmatrix}$ é igual a:

☐ 0 ☒ x^2yz

☐ $-x^2yz$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

2. O valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + x^2}{2x^2}$ é

☐ $1/2$ ☐ 0

☒ $3/4$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

3. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2}\right)^n$ converge para:

☒ $\dfrac{-2}{1+2x}$ se $-\dfrac{5}{2} < x < -\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{2}{1-x}$ se $-1 < x < 1$

☐ $\dfrac{2}{1+2x}$ se $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

4. Seja $f(x) = -\frac{1}{3}\, x^k\, g(x)$, com g uma função real diferenciável em todo o seu domínio e $k \in \mathbb{R}$. A elasticidade $El_x f(x)$ é igual a:

☐ $\dfrac{1}{3}k + El_x g(x)$ ☒ $k + El_x g(x)$

☐ $-k + El_x g(x)$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

PARTE I

1. $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = -x \cdot y \cdot (-x) \cdot z = \boxed{x^2 \cdot y \cdot z}.$$

troca $l_2 \leftrightarrow l_4$ matriz diagonal...

(N.B.: Também se pode calcular o determinante pela definição.)

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + x^2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 2x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x + 2}{4} = \frac{1+2}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Temos forma indeterminada "$\frac{0}{0}$". Como o numerador e o denominador são ambas funções diferenciáveis, podemos aplicar a Regra de l'Hôpital, duas vezes até chegarmos ao resultado.

3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2x+3}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $\frac{2x+3}{2}$.

Por teorema, converge sse $\left|\frac{2x+3}{2}\right| < 1 \iff -1 < \frac{2x+3}{2} < 1 \iff$

$\iff -2 < 2x+3 < 2 \iff -5 < 2x < -1 \iff \boxed{-\frac{5}{2} < x < -\frac{1}{2}}.$

Para x neste intervalo, a série converge, por teorema, para:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{2x+3}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{2}{2} - \left(\frac{2x+3}{2}\right)} = \frac{2}{2 - 2x - 3} = \frac{2}{-1-2x} = \boxed{-\frac{2}{1+2x}}.$$

4. $El_x f(x) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)$, por definição. Ora,

$$f'(x) = -\frac{1}{3} k \cdot x^{k-1} \cdot g(x) - \frac{1}{3} x^k \cdot g'(x).$$

Assim, $$El_x f(x) = \frac{\cancel{-\frac{1}{3}} k \cdot \cancel{x^k} \cdot \cancel{g(x)}}{\cancel{f(x)}} + \frac{\cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{x^k} x \cdot g'(x)}{\cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{x^k} \cdot g(x)} =$$

$$= k + \frac{x \cdot g'(x)}{g(x)} = \boxed{k + El_x g(x)}.$$

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (16 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Classifique o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

Seja a matriz aumentada do sistema: $A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & -1 \end{array}\right]$.

Para classificar o sistema vamos comparar as características de A e de Ab. Podemos transformar as matrizes por operações elementares:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1/3 \\ 3 & 1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \to l_2 - 3l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5 & \beta-1 \\ 0 & 1 & \alpha & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3 - l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & -\beta \end{array}\right]$$

Temos três casos possíveis:

① Se $\alpha \neq -5$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$, temos que $r(A) = r(A_b) = 3$, o valor máximo possível para a característica deste sistema (quadrado) com 3 incógnitas. Concluímos que neste caso o sistema é POSSÍVEL e DETERMINADO.

② Se $\alpha = -5$ e $\beta = 0$, temos que $r(A) = r(A_b) = 2 < 3$. Concluímos assim que neste caso o sistema é POSSÍVEL e INDETERMINADO COM $3-2=1$ GRAU DE LIBERDADE.

③ Se $\alpha = -5$ e $\beta \neq 0$, temos que $r(A) = 2$ e $r(A_b) = 3$. Ou seja $r(A) < r(A_b)$, o sistema é IMPOSSÍVEL.

(b) Resolva este sistema para $\alpha = -4$ e $\beta = -1$.

Na alínea anterior, vimos que é possível transformar a matriz Ab em

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1/3 \\ 0 & 1 & -5 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \alpha+5 & -\beta \end{array}\right]$$

. Esta matriz representa o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1/3 \\ x_2 - 5x_3 = \beta - 1 \\ (\alpha+5)x_3 = -\beta \end{cases} \quad (*).$$

Como a matriz Ab foi transformada usando apenas operações elementares, o sistema $(*)$ é equivalente ao sistema original $A\vec{x} = \vec{b}$.

Ou seja, para resolver $A\vec{x} = \vec{b}$ com $\alpha = -4$ e $\beta = -1$, basta-mos resolver:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1/3 \\ x_2 - 5x_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1/3 - 2x_3 \\ x_2 = -2 + 5x_3 \\ x_3 = 1 \end{cases},$$

concluindo assim que a resposta é :

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = -5/3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases}}.$$

(N.B.: Pode verificar-se que esta solução está correcta substituindo x_1, x_2, x_3 em $A\vec{x} = \vec{b}$.)

(c) Para que valores de α as linhas da matriz A constituem um conjunto de vectores linearmente independentes?

A matriz A tem 3 linhas. Uma forma de descobrir quando é que essas linhas constituem um conjunto de vectores linearmente independentes é determinar quando é que a característica de A é igual a 3 (máxima). Ora, na alínea (a) vimos que isto acontece para $\alpha \neq -5$.

Concluímos assim que as linhas da matriz A constituem um conjunto de vectores linearmente independentes se $\boxed{\alpha \neq -5}$.

(N.B.: A resposta pode também ser encontrada resolvendo $|A| \neq 0$, ou pela definição de independência linear de um conjunto de vectores ...)

2. Considere a função $f(x) = x \sin x$.

(a) Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto 0.

O polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto 0 é dado por:

$$P(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x-0) + \frac{1}{2} f''(0) \cdot (x-0)^2 =$$

$$= f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 .$$

Temos assim que calcular:

$f(0) = 0 \cdot \sin 0 = 0$

$f'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$, donde $f'(0) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$f''(x) = \cos x + 1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x)$, donde $f''(0) = 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 2$.

Concluimos assim que $\boxed{P(x) = \frac{1}{2} 2 x^2 = x^2}$

(b) A função f tem um único ponto de estacionariedade no intervalo aberto $]-1;1[$. Determine-o.

Queremos encontrar a solução da equação:

$$f'(x) = 0 \iff \sin x + x \cdot \cos x = 0 \quad , \text{ para } x \in]-1;1[.$$

Neste intervalo há uma solução trivial, que determinámos na alínea anterior: $x = 0$.

Concluímos assim que o ponto de estacionariedade de f em $]-1;1[$ é $\boxed{x = 0}$.

(c) Classifique o ponto de estacionariedade obtido na alínea anterior através do estudo da segunda derivada.

Temos que $f'(0) = 0$.

Como $f''(0) = 2$ (já calculado na alínea (a)), ou seja $f''(0) > 0$, pelo teorema da classificação dos pontos de estacionariedade pelo estudo do sinal da segunda derivada, concluímos que $x = 0$ é um ponto de MÍNIMO local de f.

(d) Existem outros pontos de extremo de f no intervalo $]-1;1[$? Justifique a resposta.

Os pontos de extremo de uma função real de variável real podem ocorrer em:

1. Pontos-fronteira de um intervalo fechado;
2. Pontos de não-diferenciabilidade de f;
3. Pontos de estacionariedade de f.

No intervalo aberto $]-1;1[$ a possibilidade 1 está obviamente excluída. Para além disso, f é claramente diferenciável em $\mathbb{R}$, logo 2 também está excluído. Finalmente, a alínea (b) diz-nos que f tem um <u>único</u> ponto de estacionariedade em $]-1;1[$. Assim, concluímos que f tem apenas um ponto de extremo nesse intervalo.

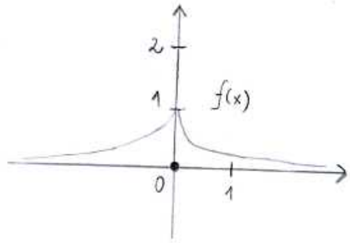
(e) Calcule uma primitiva da função f.

Usando a técnica de primitivação por partes, obtemos:

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \sin x\,dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\,dx = \boxed{-x \cdot \cos x + \sin x + C \quad (\text{com } C \in \mathbb{R})}.$$

(N.B.: Pode verificar-se que $\frac{d}{dx}\left(-x \cdot \cos x + \sin x + C\right) = x \cdot \sin x$.)



3. Seja a função $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x < 0 \\ e^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, com $k > 0$.

(a) Indique o domínio de f e discuta a continuidade da função.

Como se pode ver pela sua definição, a função f está definida para $x \in \mathbb{R}$. Ou seja, o domínio de f é $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

Quanto à continuidade de f, temos que:

- para $x < 0$, $f(x) = e^{x}$, que - como sabemos, é uma função contínua.
- para $x > 0$, $f(x) = e^{-kx}$ $(k>0)$, que é igualmente uma função contínua.

Resta-nos estudar a continuidade de f no ponto $x=0$. Ora, temos que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1.$$

Assim, por definição de continuidade, concluímos que f é contínua em $x=0$.

Tendo em conta os três resultados acima, concluímos que f é contínua em $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Recorrendo à definição de derivada, estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.

(N.B.: Naturalmente, a continuidade de f não garante a sua diferenciabilidade.)

Para estudar a diferenciabilidade de f em $x=0$, calculamos:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-k(0+h)} - e^{-k.0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-k.h} - 1}{h}$$ Este limite é uma forma indeterminada do tipo "$\frac{0}{0}$". Uma vez que tanto o numerador como o denominador são funções (de h) diferenciáveis, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital e obtemos:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{e^{-kh} - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-ke^{-k.h}}{1} = -k.$$

Analogamente, obtemos que $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 1$.

Logo, como as derivadas à direita e à esquerda de $x=0$ são diferentes $(k>0)$, concluímos que f <u>não</u> é diferenciável em $x=0$.

(c) Mostre que a função f é invertível no intervalo aberto $]0;+\infty[$.

Temos que, para $x>0$, f é claramente diferenciável e $f'(x) = -k\,e^{-kx}$.
Ora, $k>0$ e $e^{y}>0 \ \forall y \in \mathbb{R}$, logo:

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x \in \,]0;+\infty[.$$

Por teorema, isso significa que f é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$, e portanto injectiva nesse intervalo. Logo, podemos concluir que a função f é invertível em $]0;+\infty[$.

(d) Sendo g a função inversa de f em $]0;+\infty[$, calcule $g'(\frac{1}{k})$.

Como f é diferenciável em $]0;+\infty[$, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que g é também diferenciável e $g'\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{f'(a)}$ com a tal que $f(a) = \frac{1}{k}$ (recorde-se que $k>0$).

Resta-nos então determinar o ponto $a \in \,]0;+\infty[$ resolvendo a equação:

$$f(a) = \frac{1}{k} \iff e^{-ka} = \frac{1}{k} \iff \ln\left(e^{-ka}\right) = \ln\left(\frac{1}{k}\right) \iff$$

$$\iff -ka = -\ln k \iff a = \frac{1}{k}\ln k.$$

Podemos agora concluir que:

$$g'\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\ln k}{k}\right)} = \frac{1}{-k\,e^{-k\cdot\frac{\ln k}{k}}} = \frac{1}{-k\,e^{-\ln k}} =$$

$$= \frac{1}{-k\,e^{\ln\frac{1}{k}}} = \frac{1}{-k\cdot\frac{1}{k}} = \boxed{-1.}$$

(e) Calcule a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

Por propriedade da função exponencial, temos que $f(x) > 0 \ \forall x \in D_f = \mathbb{R}$.
Assim a área pedida é dada por:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-kx}\,dx.$$

Ora, temos que:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^x\right]_a^0 = \lim_{a\to-\infty} \left(e^0 - e^a\right) = 1,$$

$$\text{e} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-kx} dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{k} e^{-kx}\right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{k}\left(e^{-k.b} - e^{-k.0}\right) = -\frac{1}{k}\left(0-1\right) = \frac{1}{k}.$$

Assim, concluímos que $\boxed{A = 1 + \frac{1}{k}}$.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $a \in \mathbb{R}$. Demonstre que $\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = f[g(x)] \cdot \frac{dg}{dx}(x)$, apresentando explicitamente os cálculos que levam a esse resultado.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto existe uma função [primitiva] $F(x)$ tal que $\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Comecemos então por calcular:

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^{g(x)} = F\left[g(x)\right] - F(a).$$

Temos então que:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{g(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(F\left[g(x)\right] - F(a)\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}\left(F\left[g(x)\right]\right)}_{\text{função composta}} - \underbrace{\frac{d}{dx} F(a)}_{\text{não depende de } x} = \frac{dF}{dg}(g) \cdot \frac{dg}{dx}(x) - 0 =$$

$$= f\left[g(x)\right] . \frac{dg}{dx}(x). \quad \text{QED.}$$