INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 2º Semestre
Exame em Época de Recurso, 24 de Junho de 2010 Duração: 2 horas

Nome: ____

Nº de Aluno: ________ Curso: ________________ Classificação: ________

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	4c	4d	4e	5a	5b	6	7	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	0.5	1.0	1.0	14.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt$. O polinómio de Taylor de grau 2 da função $F(x)$, em torno de $x = 0$, é

   ☐ x^2 ☐ $x + \frac{1}{2}x^2$

   ☐ $\frac{1}{2}x^2$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável, definida implicitamente pela equação $y^2 - x + 1 = 0$. A elasticidade de y em relação a x no ponto $(2, 1)$ é

   ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$

   ☐ 0 ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. A soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x+1}\right)^{n-1}$ é

   ☐ $\frac{x+1}{x-3}, \quad x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ☐ $\frac{x+2}{x+1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

   ☐ $\frac{x+1}{x-1}, \quad x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. Os vectores $\vec{u} = (1, -k, 1)$ e $\vec{v} = (k, -k - 1, k)$, $k \in \mathbb{R}$ são ortogonais se:

   ☐ $k \neq 0$ ☐ $k = 0 \vee k = -3$

   ☐ $k \neq 0 \wedge k \neq 3$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \\ x+\alpha y=\beta \end{cases}, \text{ com } \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

   (a) Classifique este sistema em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

   (b) Discuta os resultados anteriores através da representação gráfica do sistema de equações.

2.

   (a) Indique a definição de matriz inversa.

   (b) Sejam A,B,C,P,X matrizes $n\times n$ invertíveis e I a matriz identidade de ordem n. Resolva a seguinte equação, de incógnita X:

$$AXBC+P=I.$$

3. Sejam $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^n$. Demonstre que: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4. Seja a função $f(x)=\ln(x^2+2)$.

   (a) Indique o domínio de f e discuta a sua continuidade.

   (b) Determine o(s) ponto(s) de estacionariedade de f.

   (c) Determine o(s) ponto(s) de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.

   (d) Indique justificadamente para que intervalo(s) de $\mathbb{R}$ a função f admite inversa.

   (e) Seja g a função inversa de f (no intervalo adequado). Calcule $g'(\ln 3)$.

5. Considere o conjunto $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y\le x+1\wedge y\ge -x-1\wedge -2\le x\le a\right\}$, com $a\ge 0$.

   (a) Obtenha a área de C usando o cálculo integral.

   (b) Discuta do ponto de vista geométrico o resultado anterior, no caso $a=0$.

6. Calcule, justificando os seus passos: $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{-x-1}^{x+1}\sin(t^2)\,dt$.

7. Calcule o integral: $\displaystyle\int_1^4\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.