INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2010/2011 - 1º Semestre
Exame em Época Normal, 4 de Janeiro de 2011 Duração: 2 horas

Nome: RESOLUÇÃO

Nº de Aluno: ______ Curso: ______ Classificação: ______

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2	3	4	5a	5b	5c	5d	5e	5f	5g	6	7	Total
Cotação	2.5	0.5	0.5	0.5	1.5	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	1.0	1.5	1.0	14.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.
A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. A distância entre $\vec{u} = (-1, 1, k, 0)$ e $\vec{v} = (2, 0, 0, -7)$ é mínima para:

- ☐ $k = 1$
- ☒ $k = 0$
- ☐ $k \in \mathbb{R}$
- ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $x \in \mathbb{R}$. A série $\sum_{n=0}^{+\infty} 7(\cos x)^n$ é convergente se:

- ☐ $x \in \mathbb{R}$
- ☒ $x \neq 0 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $x \in [-\pi; \pi]$
- ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. O valor de $\lim_{x \to 0^+} x^{5x}$ é:

- ☐ 0
- ☒ 1
- ☐ 5
- ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. O valor do determinante $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, em que $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ é:

- ☒ $\alpha^2\beta^2\gamma$
- ☐ $-\alpha^2\beta^2\gamma$
- ☐ 0
- ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações: $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y+\alpha z=3 \\ -2x-3y+z=\beta \end{cases}$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(a) Classifique este sistema em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

Comecemos por escrever este sistema sob a forma matricial $A\vec{x}=\vec{b}$, com

$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&-1&\alpha\\-2&-3&1\end{bmatrix}$, $\vec{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ e $\vec{b}=\begin{bmatrix}0\\3\\\beta\end{bmatrix}$. Seja ainda $A_b=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\-1&-1&\alpha&3\\-2&-3&1&\beta\end{array}\right]$

Para classificar o sistema, temos que comparar $r(A)$ e $r(A_b)$.

Ora, $A_b=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\-1&-1&\alpha&3\\-2&-3&1&\beta\end{array}\right]\xrightarrow{\ell_2\to 1\ell_1+\ell_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&(\alpha+1)&3\\-2&-3&1&\beta\end{array}\right]\xrightarrow{\ell_3\to\ell_3+2\ell_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&(\alpha+1)&3\\0&1&3&\beta\end{array}\right]\xrightarrow{\ell_3=\ell_3-\ell_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&(\alpha+1)&3\\0&0&(2-\alpha)&\beta-3\end{array}\right]$.

Temos 3 casos:

① Se $\alpha\neq 2$ $(\forall\beta\in\mathbb{R})$, temos $r(A)=r(A_b)=3$, igual ao número de incógnitas: o sistema de equações é POSSÍVEL e DETERMINADO.

② Se $\alpha=2$ e $\beta=3$, então $r(A)=r(A_b)=2<3$, o sistema é POSSÍVEL e INDETERMINADO, com $3-2=1$ GRAU DE LIBERDADE.

③ Se $\alpha=2$ e $\beta\neq 3$, então $r(A)=2<r(A_b)=3$, o sistema é IMPOSSÍVEL.

(b) Resolva este sistema para $\alpha=2$ e $\beta=3$.

Neste caso, a matriz que obtivemos por transformações por operações elementares, fica:

$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&0\\0&1&3&3\\0&0&0&0\end{array}\right]$, o que corresponde ao sistema $\begin{cases}x+2y+z=0\\y+3z=3\end{cases}$

Ora, como apenas usámos operações elementares, temos que:

$$\begin{cases}x+2y+z=0\\-x-y+2z=3\\-2x-3y+z=3\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+z=0\\y+3z=3\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+z=0\\y=3(1-z)\end{cases}\iff\begin{cases}y=3(1-z)\\x=-2y-z\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}y=3(1-z)\\x=6(z-1)-z\end{cases}\iff\boxed{\begin{cases}x=5z-6\\y=3(1-z)\\z\in\mathbb{R}\end{cases}}$$ (grau de liberdade).

2. Defina característica de uma matriz.

A característica de uma matriz é o número dos seus vectores-linha [ou vectores-coluna] que são linearmente independentes.

3. Sejam os vectores $\vec{a} = (0,2,0)$, $\vec{b} = (2,x,0)$, e $\vec{c} = (0,0,y)$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Determine para que valores de x e y os vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são linearmente independentes.

[Este exercício pode resolver-se por vários métodos: definição de independência linear de vectores, característica de matriz, determinante...].

Seja a matriz $M = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$.

(pois matriz triangular superior)

Temos $|M| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = -2 \times 2 \times y = -4y$.

Conclusão: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ são linearmente independentes se $|M| \neq 0 \iff \boxed{y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ (e } x \in \mathbb{R})}$.

4. Seja A uma matriz invertível. Demonstre que $(A^{-1})^{-1} = A$.

Seja M uma matriz invertível. Então, por definição, existe uma matriz X tal que $\begin{cases} MX = I \\ XM = I \end{cases}$ e $X = M^{-1}$.

Ora, a matriz A é invertível: existe A^{-1} e A e A^{-1} satisfazem as equações acima.

Em particular, se escolhermos $M = A^{-1}$ e $X = A$, então

$$X = M^{-1} \iff \boxed{A = (A^{-1})^{-1}}. \quad \text{CQD.}$$

5. Seja a função $f(x) = xe^x + 3$.

(a) Indique o domínio de f e discuta a sua continuidade.

f é composta pelo produto e soma das funções x, e^x e 3, que estão todas definidas em $\mathbb{R}$. Assim o domínio de f é $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

Estas 3 funções são igualmente contínuas em $\mathbb{R}$. Como a soma e o produto de funções contínuas dá uma função contínua no mesmo intervalo, concluímos que $\boxed{f \text{ é contínua em } D_f = \mathbb{R}}$.

(b) Determine o(s) ponto(s) de estacionariedade de f.

Os pontos de estacionariedade de f são as soluções da equação: $\frac{df(x)}{dx} = 0 \iff$

$\iff 1.e^x + x.e^x + 0 = 0 \iff e^x(1+x) = 0 \iff x = -1$ pois $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Concluímos assim que f tem um ponto de estacionariedade $\boxed{c = -1}$.

(c) Determine o(s) ponto(s) de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.

Precisamos de estudar a segunda derivada de f no ponto c.
Comecemos por calcular:

$$\frac{d^2f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = e^x + 1.e^x + x.e^x = e^x(2+x).$$

Então, temos que: $\frac{d^2f(c)}{dx} = e^{-1}(2-1) = e^{-1} > 0$ (pois $e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

Pelo teorema de classificação de pontos de estacionariedade pelo estudo da segunda derivada, concluímos que $\boxed{c = -1 \text{ é um ponto de MÍNIMO LOCAL}}$.

(d) Discuta se o, ou os, pontos de extremo obtidos anteriormente são globais.

Temos que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^x + 3$. Ora $\lim_{x \to -\infty} xe^x$ é uma forma indeterminada $-\infty . 0$. Mas $\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} =$
$= \lim_{x \to -\infty} -e^x = 0$. Assim, $\lim_{x \to -\infty} xe^x + 3 = 0 + 3 = 3$.

aplicando a Regra de l'Hôpital.

Por outro lado, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ora, como $f(c) = f(-1) = -\frac{1}{e} + 3 < 3$, concluímos que o único ponto de estacionariedade $\boxed{c = -1 \text{ é um ponto de MÍNIMO GLOBAL de } f}$

(e) Calcule a aproximação quadrática de f em torno de $x = 0$.

A aproximação quadrática de f em torno de $x = 0$ é dada por:

$$f(0) + \frac{df}{dx}(0).(x-0) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(0).(x-0)^2 =$$ usando os resultados anteriores

$$= 3 + e^0(1+0).x + \frac{1}{2}.e^0(2+0)x^2 = \boxed{3 + x + x^2}.$$

(f) Determine em que intervalos a função f é invertível.

Como vimos, $\frac{df(x)}{dx} = e^x(1+x)$.

Se $x > -1$, então $\frac{df}{dx}(x) > 0$, pelo que a função f é estritamente crescente nesse intervalo, e consequentemente injectiva nesse intervalo. Concluímos então que [f é invertível no intervalo $(-1, +\infty)$].

Da mesma forma, como $\frac{df(x)}{dx} < 0$ para $x < -1$, concluímos que [f é invertível em $(-\infty, -1)$].

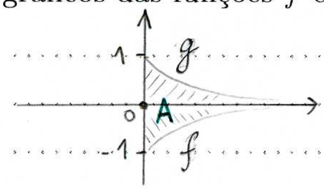
(g) Seja g a inversa da função f num intervalo adequado. Determine o valor da derivada da função g no ponto 3.

Seja a um ponto do domínio de f tal que $f(a) = 3 \iff a.e^a + 3 = 3 \iff$
$\iff a = 0$.

Então, pelo teorema da derivada da função inversa, temos que:

$$\frac{dg}{dy}(3) = \frac{1}{\frac{df}{dx}(0)} = \frac{1}{e^0(1+0)} = [\,1\,].$$

6. Considere as funções $f(x) = -e^{-x}$ e $g(x) = e^{-x}$. Determine a área compreendida entre os gráficos das funções f e g, com $x \in (0, +\infty)$.



Como podemos ver pelo gráfico, a área pedida é:

$$A = \int_0^{+\infty} |f(x)|dx + \int_0^{+\infty} |g(x)|\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} -f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2 \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = 2 \lim_{b \to +\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b =$$

(como também se podia ver por simetria.)

$$= 2 \lim_{b \to +\infty} \left(-e^{-b} - (-e^{-0})\right) = 2 \lim_{b \to +\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 2.(1-0) = [2].$$

7. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função diferenciável no seu domínio e $p \in \mathbb{R}$. Demonstre que $El_x[f(x)^p] = pEl_x[f(x)]$.

Por definição, temos que: $El_x [f(x)]^p = \dfrac{x}{[f(x)]^p} \cdot \dfrac{d}{dx}\left\{[f(x)]^p\right\} =$

$= \dfrac{x}{[f(x)]^p} \cdot p\,[f(x)]^{p-1} \cdot \dfrac{df}{dx}(x) = p \cdot x \cdot \dfrac{\cancel{[f(x)]^{p-1}}}{[f(x)]^{\cancel{p}}} \cdot \dfrac{df}{dx}(x) = p \cdot \dfrac{x}{f(x)} \cdot \dfrac{df}{dx}(x) =$

$= p \cdot El_x f(x)$. CQD. ✓

Por definição de elasticidade de f

O espaço restante foi intencionalmente deixado em branco. Pode utilizá-lo caso necessite, assinalando claramente as perguntas a que responde.