INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL

Matemática 1, 2009/2010 - 2º Semestre

Exame em Época de Recurso, 24 de Junho de 2010 Duração: 2 horas

Nome: Resolução

Nº de Aluno: ________ Curso: ________________ Classificação: ________

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2a	2b	3	4a	4b	4c	4d	4e	5a	5b	6	7	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	1.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	0.5	1.0	1.0	14.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.

A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt$. O polinómio de Taylor de grau 2 da função $F(x)$, em torno de $x = 0$, é

   ☐ x^2 ☐ $x + \frac{1}{2}x^2$

   ☒ $\frac{1}{2}x^2$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável, definida implicitamente pela equação $y^2 - x + 1 = 0$. A elasticidade de y em relação a x no ponto $(2, 1)$ é

   ☒ 1 ☐ $\frac{1}{2}$

   ☐ 0 ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. A soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{x+1}\right)^{n-1}$ é

   ☐ $\frac{x+1}{x-3}$, $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ☐ $\frac{x+2}{x+1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

   ☒ $\frac{x+1}{x-1}$, $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. Os vectores $\vec{u} = (1, -k, 1)$ e $\vec{v} = (k, -k - 1, k)$, $k \in \mathbb{R}$ são ortogonais se:

   ☐ $k \neq 0$ ☒ $k = 0 \vee k = -3$

   ☐ $k \neq 0 \wedge k \neq 3$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \\ x+\alpha y=\beta \end{cases}, \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique este sistema em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.

Comecemos por escrever o sistema de equações proposto sob a forma $A\vec{x}=\vec{b}$ com

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$. Temos $n=2$ incógnitas e 3 equações.

Vamos agora comparar as características da matriz A e da matriz aumentada $A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \end{array}\right]$.

Aplicando operações elementares, obtemos:

$$A_b = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \to l_2 - l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3 - l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & \alpha-1 & \beta-1 \end{array}\right] \xrightarrow{l_3 \to l_3 + \frac{\alpha-1}{2} l_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 \end{array}\right]$$

Temos agora 2 casos possíveis, notando que temos sempre $r(A)=2$:

① Se $\beta=1$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$, então $r(A) = r(A_b) = 2 = n$: concluímos que o sistema de equações é POSSÍVEL e DETERMINADO.

② Se $\beta \neq 1$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$, então $r(A) = 2 < r(A_b) = 3$: o sistema é impossível.

(b) Discuta os resultados anteriores através da representação gráfica do sistema de equações.

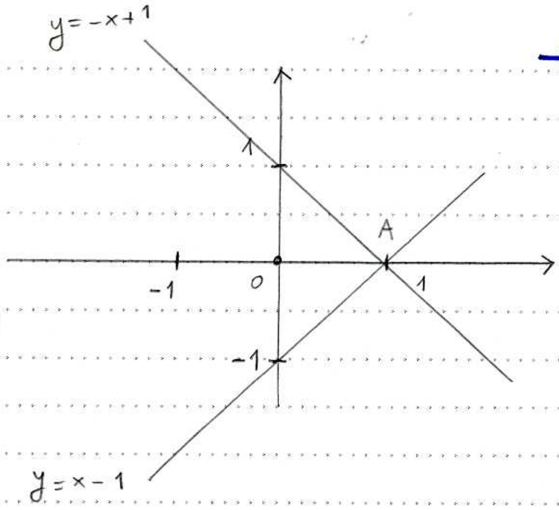
O sistema proposto é composto por 3 equações de recta:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \\ x+\alpha y=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x+1 \\ y=x-1 \\ \alpha y=-x+\beta \end{cases}$$

O sistema

$$\begin{cases} y = -x+1 \\ y = x-1 \end{cases}$$

tem uma solução: $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$, dada graficamente pelo ponto de intersecção A de coordenadas $(1,0)$



→ Se $\beta = 1$, a recta $\alpha y = -x + \beta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha y = -x + 1$ também intersecta o ponto A: para $x=1$ temos $y=0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. O sistema de 3 equações lineares tem uma única solução, determinada, é POSSÍVEL e DETERMINADO.

→ Se $\beta \neq 1$, esta recta nunca passa por A, o sistema das 3 equações não tem soluções.

2.

(a) Indique a definição de matriz inversa.

Seja $M_{m \times m}$. Por definição, a matriz X é inversa de M se:

$$\begin{cases} XM = I \\ MX = I \end{cases}$$

, com I matriz identidade de ordem m.

(b) Sejam A, B, C, P, X matrizes $n \times n$ invertíveis e I a matriz identidade de ordem n. Resolva a seguinte equação, de incógnita X:

$$AXBC + P = I.$$

Temos $AXBC + P = I \Leftrightarrow AXBC + \underbrace{P - P}_{\text{matriz nula}} = I - P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AXBC = I - P \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} XBC = A^{-1}(I-P) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow XBC = A^{-1}(I-P) \Leftrightarrow XB\underbrace{CC^{-1}}_{I} = A^{-1}(I-P)C^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow XB = A^{-1}(I-P)C^{-1} \Leftrightarrow X\underbrace{BB^{-1}}_{I} = A^{-1}(I-P)C^{-1}B^{-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}(I-P)C^{-1}B^{-1}}.$

3. Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Demonstre que: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Sejam $\vec{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)$ e $\vec{c} = (c_1, \dots, c_i, \dots, c_n)$.

Temos $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \cdot \left[(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) + (c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) \right] =$

$= (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, \dots, b_i + c_i, \dots, b_n + c_n) =$

$= a_1 (b_1 + c_1) + \dots + a_i (b_i + c_i) + \dots + a_n (b_n + c_n) =$

$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + \dots + a_i b_i + a_i c_i + \dots + a_n b_n + a_n c_n =$

$= (a_1 b_1 + \dots + a_i b_i + \dots + a_n b_n) + (a_1 c_1 + \dots + a_i c_i + \dots + a_n c_n) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$. QED

4. Seja a função $f(x) = \ln(x^2 + 2)$.

(a) Indique o domínio de f e discuta a sua continuidade.

Temos que $x^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, logo o domínio de f é $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.

f é uma composição de funções contínuas quando $x \in \mathbb{R}$, logo f é contínua no seu domínio $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Determine o(s) ponto(s) de estacionariedade de f.

Para determinar os pontos de estacionariedade de f, resolvemos a equação: $\frac{df}{dx}(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2+2} \frac{d}{dx}(x^2+2) = 0 \iff$

$\iff \frac{1}{x^2+2} \cdot 2x = 0 \iff x = 0$.

Concluímos assim que f tem um ponto de estacionariedade em $\boxed{x = 0}$.

(c) Determine o(s) ponto(s) de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.

Vamos classificar o ponto de estacionariedade $x=0$ através do estudo do sinal de $\frac{d^2f}{dx^2}$ nesse ponto.

Temos $\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{x^2+2}\right) =$

$$= \frac{2.(x^2+2) - 2x.(2x+0)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}.$$

No ponto $x=0$ temos $\frac{d^2f}{dx^2}(0) = 1 > 0$, logo concluímos que

$\boxed{x=0 \text{ é um PONTO DE MÍNIMO LOCAL de } f}$.

(d) Indique justificadamente para que intervalo(s) de $\mathbb{R}$ a função f admite inversa.

A função f é invertível nos intervalos em que for injectiva. E é injectiva nos intervalos em que for monótona.

Para determinar a monotonia de f estudamos o sinal de $\frac{df}{dx}(x) = \frac{2x}{x^2+2}$:

- para $x \geq 0$ temos que $\frac{df}{dx}(x) \geq 0$, logo f é crescente
- para $x < 0$ temos que $\frac{df}{dx} < 0$, logo f é decrescente.

Assim, concluímos que f é injectiva, e portanto $\boxed{\text{INVERTÍVEL em } (-\infty, 0) \text{ e em } [0, +\infty)}$.

(e) Seja g a função inversa de f (no intervalo adequado). Calcule $g'(\ln 3)$.

Seja $g = f^{-1}$. Pelo teorema da derivada da função inversa, temos que $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ com $b = f(a)$.

Necessitamos então determinar a para o caso $b = \ln 3$, ou seja resolver:

$\ln 3 = f(a) \iff \ln(a^2+2) = \ln 3 \iff e^{\ln(a^2+2)} = e^{\ln 3} \iff$

$\iff a^2 + 2 = 3 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$.

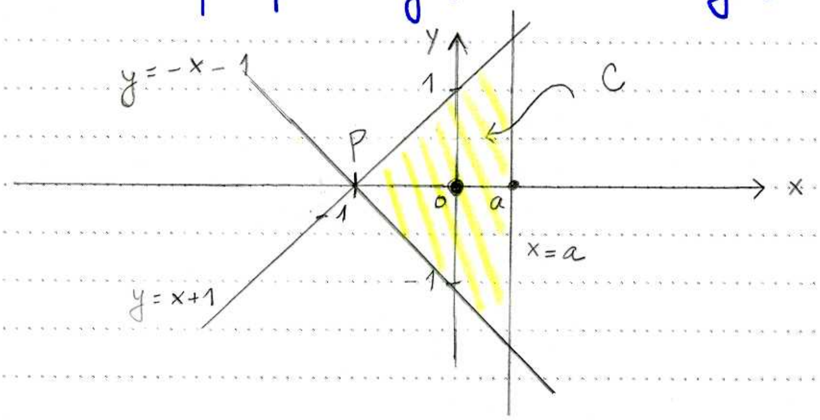
Sem perda de generalidade, consideremos um dos casos: $a = 1$. Neste caso, temos:

$$g'(\ln 3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{2.1}{1^2+2}} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

5. Considere o conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y \leq x + 1 \wedge y \geq -x - 1 \wedge -2 \leq x \leq a\}$, com $a \geq 0$.

(a) Obtenha a área de C usando o cálculo integral.

Comecemos por representar geometricamente o conjunto C:



As rectas de equação $y = x+1$ e $y = -x-1$ intersectam-se no ponto P de coordenadas:

$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = -x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

A área A de C é dada por $A = A_1 + A_2 =$

$$= \int_{-1}^{a} (x+1)\,dx + \int_{-1}^{a} |-x-1|\,dx = \int_{-1}^{a} (x+1)\,dx + \int_{-1}^{a} (-1).(-x-1)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{a} (x+1)\,dx + \int_{-1}^{a} (x+1)\,dx = 2\int_{-1}^{a} (x+1)\,dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{a} = 2\left[\frac{a^2}{2} + a - \left(\frac{(-1)^2}{2} - 1\right)\right] = \boxed{a^2 + 2a + 1}.$$

(b) Discuta do ponto de vista geométrico o resultado anterior, no caso $a = 0$.

No caso $a = 0$ temos que C corresponde a metade de um quadrado de lado $l = \sqrt{2}$.

Nesse caso, $A = \frac{1}{2}\sqrt{2}.\sqrt{2} = 1$, o que coincide com o resultado obtido na alínea anterior quando $a = 0$. ✓

6. Calcule, justificando os seus passos: $\frac{d}{dx}\int_{-x-1}^{x+1}\sin(t^2)\,dt$.

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo Integral, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\int_{-x-1}^{x+1} \text{sin}(t^2)\,dt = \text{sin}\left[(x+1)^2\right]\cdot\frac{d}{dx}\left[(x+1)\right] - \text{sin}\left[(-x-1)^2\right]\frac{d}{dx}\left[(-x-1)\right] =$$

$$= \text{sin}\left[(x+1)^2\right]\cdot 1 - \text{sin}\left[(-1)^2\cdot(x+1)^2\right]\cdot(-1) =$$

$$= \boxed{2\ \text{sin}\left[(x+1)^2\right]}.$$

7. Calcule o integral: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Temos $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\,dx = (*)$.

Utilizando a substituição $u(x) = \sqrt{x}$, com $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, obtemos:

$$(*) = 2\int_{u(1)}^{u(4)} e^u\,du = 2\int_1^2 e^u\,du = 2\left[e^u\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(e^2 - e^1\right) = \boxed{2e\,(e-1)}.$$