INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2010/2011 - 1º Semestre
Exame em Época de Recurso, 24 de Janeiro de 2011 Duração: 2 horas

Nome: ____________________

Nº de Aluno: ______ Curso: __________ Classificação: ______

Parte I

Pergunta	1	2	3	4	Total
Cotação	1.5	1.5	1.5	1.5	6.0
Class.					

Parte II

Pergunta	1a	1b	2	3	4	5a	5b	5c	5d	5e	5f	6a	6b	Total
Cotação	2.0	1.0	1.0	1.0	1.5	0.5	1.0	1.0	0.5	0.5	1.5	1.5	1.0	14.0
Class.														

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (6 valores)

Cada resposta correcta vale 1,5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.
A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. Sejam $\vec{u} = (1, 2, 0, k)$ e $\vec{v} = (3, -1, -1, -1)$. Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se:

☐ $k = 0$ ☐ $k \in \mathbb{R}$

☒ $k = 1$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua e diferenciável no seu domínio. Temos que $El_x \dfrac{2}{f(x)}$ é igual a:

☒ $-El_x f(x)$ ☐ $El_x [f(x)]^2$

☐ $2El_x f(x)$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

3. O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3\beta x + 3\beta - 1}{(x-1)^2}$ é:

☐ 0, para qualquer $\beta > 0$ ☒ ∞, se $\beta \neq 1$

☐ 3, para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4. A função $f(x) = \sqrt{|x| + \alpha}$, com $\alpha \geq 0$,

☐ é uma função linear para qualquer $\alpha \geq 0$.

☐ é uma função linear apenas se $\alpha = 0$.

☒ não é uma função linear, qualquer que seja $\alpha \geq 0$.

☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (14 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja o sistema de equações: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+5z=1 \\ x-y+\alpha z=\beta \end{cases}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Indique os valores de α e β para os quais (i) o sistema não tem solução e (ii) o sistema tem uma equação redundante.

Matricialmente, o sistema escreve-se: $A\vec{x} = \vec{b}$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$ e $A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \end{array}\right]$.

Condensa-se A_b:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \end{array}\right] \xrightarrow[-L_1+L_3]{-2L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & \alpha-1 & \beta-1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2+L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha-4 & \beta \end{array}\right]$$

i) o sistema não tem solução para $\alpha = 4$ e $\beta \neq 0$ já que $r(A_b) > r(A)$.

ii) o sistema admite uma equação redundante para: $\alpha = 4$ e $\beta = 0$, já que $r(A) = r(A_b) = 2 < n = 3$ (sistema possível indeterminado com grau de liberdade 1).

(b) Considere o caso $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Determine x através da regra de Cramer.

Fazendo $\alpha = \beta = 0$, o valor de x é dado por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

condensação (alínea anterior)

2. Sejam $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Demonstre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Sejam $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ com $u_i \in \mathbb{R}$ e $v_i \in \mathbb{R}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n =$ | em $\mathbb{R}$, a multiplicação é comutativa $u_i v_i = v_i u_i$

$= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n =$

$= (v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$= \vec{v} \cdot \vec{u}$.

3. Sejam A, B, C, X matrizes quadradas de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Assumindo que C e $A - B$ são invertíveis, resolva em ordem a X a equação: $AXC = BXC + I$.

Por hipótese: $C C^{-1} = C^{-1} C = I$ e $(A-B)(A-B)^{-1} = (A-B)^{-1}(A-B) = I$

$AXC = BXC + I \iff AXC - BXC = I$

$\iff (AX - BX)C = I$ (Factorização)

$\iff (AX - BX) = C^{-1}$ (mult. à direita por C^{-1})

$\iff (A-B)X = C^{-1}$

$\iff \boxed{X = (A-B)^{-1} \cdot C^{-1}}$

4. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3x+2}{3}\right)^n$. Discuta para que valores de x a série é convergente e, sempre que possível, calcule a sua soma.

Trata-se de uma série geométrica de 1º termo $a = 1$ e razão $r = \frac{3x+2}{3}$

A série é convergente se $|r| < 1$ ou seja se $-1 < \frac{3x+2}{3} < 1$

ou seja para $\boxed{-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}}$. A sua soma S é:

$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1 - \left(\frac{3x+2}{3}\right)}$ ou seja $\boxed{S = \frac{3}{1-3x}}$

A soma da série é $\boxed{S = \frac{3}{1-3x}, \ \forall x \in \left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

5. Seja $g(x) = e^{(x^2+1)}$.

(a) Indique o domínio de g e discuta a sua continuidade.

$D_g = \mathbb{R}$.

g é contínua em $\mathbb{R}$, $\forall x$ real, já que trata-se da composição de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$: e^x e x^2+1.

(b) Determine o(s) ponto(s) de estacionariedade de g.

O(s) ponto(s) de estacionariedade de g são soluções de $g'(x) = 0$ $\Leftrightarrow 2x \cdot e^{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ já que $e^{x^2+1} > 0$.
g admite um único ponto de estacionariedade $\boxed{c = 0}$

(c) Determine o(s) ponto(s) de extremo de f através do estudo da sua segunda derivada.

Temos $g''(x) = 2e^{x^2+1} + 4x^2 \cdot e^{x^2+1} \Leftrightarrow g''(x) = 2e^{x^2+1}(1+2x^2)$

Ora $g''(0) = 2e > 0$. Pelo teorema de classificação de pontos de estacionariedade através do estudo da 2ª derivada, $c = 0$ é um $\boxed{\text{ponto de mínimo local}}$.

(d) Estude a concavidade da função.

$g''(x) = 2e^{x^2+1} \cdot (1+2x^2)$ é estritamente positiva, $\forall x \in \mathbb{R}$. Conclui-se que $g(x)$ é convexa em todo o seu domínio.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	ϕ	$+$	
$g(x)$					

(e) Discuta se o, ou os, pontos de extremo obtidos anteriormente são globais.

g é uma função estritamente convexa (cf. alínea anterior) no seu domínio ($\mathbb{R}$) por outro lado $x = 0$ é minimizante local (cf. alínea c)

Conclui-se que $\boxed{x=0}$ é necessariamente minimizante global e $g(0) = e$ é mínimo global.

(f) Calcule $\int_0^1 xg(x)\,dx$.

$$\int_0^1 x\,g(x)\,dx = \int_0^1 x\,e^{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2x\,e^{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - e)$$

conclui-se que: $\boxed{\int_0^1 x\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}(e^2-e)}$

6. Sabendo que $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

(a) Estime o valor de $\arctan(0,1)$.

Fazendo $f(x) = \arctan(x)$, a aproximação linear em torno de $x = 0$ é dada por:

$f(x) \simeq f(0) + f'(0).x$, com $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $f'(0)=1$.

Como $f(0) = \arctan(0) = 0$, conclui-se:

$\arctan(x) \simeq x$ e logo $\boxed{\arctan(0,1) \simeq 0,1}$

(b) Majore o erro da aproximação obtida na alínea anterior.

usando a fórmula de Taylor com resto de Lagrange, temos:

$$|R_2(0,1)| = \left|\frac{g''(c)}{2!}(0,1)^2\right| \quad \text{com } c \in (0;\ 0,1)$$

$$= 0,005\, |g''(c)|$$

$$\leq 0,005 \times 0,2 = 0,001$$

conclui-se que a estimativa obtida ~~p~~ tem um erro inferior à 10^{-3}

O espaço restante foi intencionalmente deixado em branco. Pode utilizá-lo caso necessite, assinalando claramente as perguntas a que responde.

• $\underline{CA}$ - $g''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow g''(c) = \frac{-2c}{(1+c^2)^2}$

$$|g''(c)| = \left|\frac{-2c}{(1+c^2)^2}\right| \leq 0,2$$