Instituto Superior de Economia e Gestão

Métodos Computacionais em Economia e Finanças

Prova Modelo 09/01/2012

As respostas devem ser dadas de forma clara e completa na folha de resposta. Adicionalmente, todos os cálculos e gráficos efectuados no Mathematica / Matlab devem ser entregues numa *pen* no final da prova, assinalando claramente a pergunta a que dizem respeito. Devem também ser entregues todos os programas e rotinas auxiliares que forem utilizados.

I - Equações e sistemas de equações não lineares

Considere a equação não linear $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$.

(a) Localize graficamente as soluções reais desta equação, determinando intervalos de comprimento não superior a 0.5 que as contenham.

(b) Utilize o método da bisseção para calcular um valor aproximado da solução negativa da equação, com erro inferior a 0.5×10^{-4}, estimando previamente o número de iterações necessárias para atingir esse nível de precisão.

(c) Utilize o método de Newton para determinar uma aproximação da maior solução positiva da equação, partindo da aproximação inicial $x_0 = 2.5$. Sabendo que a solução exacta é $z = 3$, diga quantas iterações são necessárias para atingir um erro inferior a 0.5×10^{-12}.

(d) Considerando a função iteradora $g(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)/4$ no intervalo $[0, 1]$, mostre que a menor solução positiva da equação pode ser determinada usando o método do ponto fixo. Através desse método determine essa solução com erro inferior a 10^{-7}.

II - Métodos para sistemas lineares

Considere o sistema linear, de 3 equações a 3 incógnitas, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ em que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

(a) Seja $\tilde{\boldsymbol{x}}$ a solução do sistema se considerarmos um segundo membro $\tilde{\boldsymbol{b}} = (101, 1.1, 0.2)$. Calcule o número de condição da matriz A na norma $\|\cdot\|_\infty$ e, sem resolver o sistema, estime a percentagem de erro cometida ao usar $\tilde{\boldsymbol{b}}$ em vez de $\boldsymbol{b}$.

(b) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge e utilize-o para calcular $\boldsymbol{x}$ e $\tilde{\boldsymbol{x}}$ com erro inferior a 0.5×10^{-8}. Calcule $\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}\|_\infty$, compare com a estimativa obtida na alínea anterior e comente.

III - Interpolação, Aproximação e Integração

Considere a seguinte tabela de valores de uma função f, suficientemente regular.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	3.0000	3.4496	0.827051	0.730592	2.33571

(a) Determine o polinómio interpolador de f nos pontos da tabela e utilize-o para obter uma estimativa para $f(1.55)$.

(b) Sabendo que as derivadas de f verificam a condição $f^{(n)}(x) \leq 2^n + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, determine um majorante para o erro cometido na alínea anterior.

(c) Determine o polinómio da forma $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados, utilizando-o para obter uma nova estimativa de $f(1.55)$.

(d) Determine um valor aproximado de $\int_0^4 f(x)\,dx$ usando os métodos dos trapézios e de Simpson compostos.

IV - Aplicação: Modelo de Crescimento de Verhulst Modificado

Segundo o modelo de Verhulst modificado, a evolução do número de indivíduos de determinada população ao longo do tempo, $N(t)$, pode ser ser descrita pela equação diferencial

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \left(\frac{N(t)}{K}\right)^{\alpha}\right),$$

em que r é a taxa de crescimento efectivo da população, K é a capacidade de suporte do meio e α é uma constante escolhida de modo a melhor ajustar os dados recolhidos.

(a) Considere $\alpha = 2$ e utilize o método de Euler para determinar soluções numéricas do modelo de Verhulst modificado. Verifique experimentalmente que, independentemente da condição inicial $N(0) > 0$, a população tende para um número constante de K indivíduos.

(b) Considere uma população que no instante presente ($t = 0$ anos) é constituída por 1000 indivíduos e suponha que $K = 5000$ e $r = 0.1$. Sabendo que dentro de 10 anos a população não excederá os 2000 indivíduos, qual poderá ser o valor máximo do parâmetro α ?