Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG
Processos Estocásticos e Aplicações
30 de Junho de 2008

1. (a) Prove, justificando todos os passos, que quando $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ é um processo de Poisson, se tem, para $0 \leq u \leq t$, que (15)

$$\Pr\{N(u) = k | N(t) = n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{u}{t}\right)^k\left(\frac{t-u}{t}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n.$$

   (b) Seja $\{N(t);\, t \geqslant 0\}$ um processo de Poisson com intensidade $\lambda = 2$. Determine os seguintes valores esperados: $E[N(2)]$; $E[\{N(1)\}^2]$ e $E[N(1)N(2)]$. (15)

2. Uma empresa faz publicidade, junto dos seus clientes, por correio electrónico. A probabilidade de um que um cliente potencial faça uma compra no primeiro ano em que recebe publicidade é 50%, a qual se reduz para 40% no ano 2, 30% no ano 3 e 20% no ano 4. Se um cliente não fizer compras em quatro anos consecutivos é retirado da "mailing list". Uma compra faz o "reset" ao contador a zero (número de anos sem encomendas).

   (a) Formule o problema como uma cadeia de Markov. (15)

   (b) Determine o número médio de anos que um cliente novo fica na "mailing list". (20)

   (c) Qual o número médio de anos que um cliente que não fez qualquer encomenda nos dois últimos anos permanecerá na "mailing list"? (10)

3. Considere uma estação de serviço com apenas uma bomba de gasolina. Os carros chegam para se abastecer segundo um processo de Poisson à taxa de 15 por hora. Contudo, se a bomba está a ser utilizada, estes clientes potenciais podem desistir de abastecer. Considere que quando há n clientes já na estação de serviço, a probabilidade de um cliente potencial desistir é $n/3$, $n = 1, 2, 3$. O tempo de abastecimento por veículo é uma exponencial com média 4 minutos.

   (a) Modele o sistema como um processo de nascimento e morte, indicando as taxas de nascimento e morte. (15)

   (b) Determine, em condições de estacionaridade, a distribuição do número de carros na estação de serviço (a serem servidos ou na fila).[1] (15)

   (c) Prove - ainda em condições de estacionaridade e utilizando a fórmula de Bayes - que, dado que um cliente decide ficar, a probabilidade de existirem k carros à sua frente (aquando da sua chegada) é 9/17, 6/17 e 2/17, para $k = 0, 1, 2$, respectivamente. Indique também a percentagem de clientes perdidos. (15)

   (d) Tendo em atenção a alínea anterior, determine o tempo médio de espera, incluindo o de serviço, de um cliente que abasteça nesta estação de serviço. (15)

   (e) Determine o número médio de carros, L, na estação de serviço e verifique que neste caso particular $L = \overline{\lambda}W$, com $\overline{\lambda} = \sum_{n=0}^{2}\lambda_n\pi_n$ e onde W e $\boldsymbol{\pi}$ representam, respectivamente, o tempo médio de espera e a distribuição estacionária. (15)

[1] No caso de não ter resolvido a alínea anterior suponha que $\lambda_0 = 12$, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 12$ e que as restantes taxas são nulas.

4. Considere o seguinte processo autoregressivo

$$Y_n = aY_{n-1} + Z_n,$$

onde $\{Z_n; n = 1, 2, ...\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com média nula e variância σ^2 e suponha que $Y_0 = 0$. Prove que $\{M_n; n = 1, 2, ...\}$, com $M_n = a^{-n}Y_n$ é uma martingala relativamente a $\{Z_n; n = 1, 2, ...\}$. (25)

(a) Seja $\{X(t)\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano geométrico com deriva α e seja (15)

$$T = \min\{t \geq 0; X(t)/X(0) = A \text{ ou } X(t)/X(0) = B\},$$

com $A < 1 < B$. Prove, justificando, que

$$\Pr\left\{\frac{X(T)}{X(0)} = B\right\} = \frac{1 - A^{1-2\alpha/\sigma^2}}{B^{1-2\alpha/\sigma^2} - A^{1-2\alpha/\sigma^2}}.$$

(b) Suponha que as variações no preço de uma acção são descritas por um movimento Browniano geométrico com deriva $\alpha = 1/10$ e $\sigma^2 = 4$. Um expeculador compra ao preço de 100 doláres e vende se o preço subir a 120 ou descer a 90. Qual a probabilidade de vender em lucro? (10)