Instituto Superior de Economia e Gestão
Licenciatura MAEG

Processos Estocásticos e Aplicações

(Exame com consulta limitada ao formulário; Duração: 2h30m)

29 de Janeiro de 2009

1. Considere uma cadeia de Markov, com espaço dos estados {0, 1, 2, 3, 4} e com matriz de probabilidades de transição (20)

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

   Determine as classes de estados comunicantes e o seu período. Justifique.

2. Considere uma cadeia de Markov, com espaço dos estados {0, 1, 2, 3} e com matriz de probabilidades de transição

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0.1 & 0.7 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Seja T o tempo passado nos estados 0 e 2. Escreva o sistema de equações que lhe permite calcular $h_i = E[T|X_0 = i]$, $i = 0, 1, 2, 3$. (20)

3. Suponha que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson com taxa 2.

   (a) Determine $\Pr\{N(3) = 4|N(1) = 1\}$ e $\Pr\{N(1) = 1|N(3) = 4\}$. Justifique todos os cálculos. (20)

   (b) Seja W_n o instante de ocorrência do n-ésimo acontecimento. Determine, justificando, $E[W_{12}]$ e $E[W_{12}|N(2) = 5]$. (20)

4. Uma fábrica de sapatos possui K máquinas idênticas. Sempre que uma delas avaria vai para reparação, junto de um de entre R técnicos especializados ($R \leq K$). Cada máquina, quando em funcionamento, funciona durante um período aleatório, exponencialmente distribuído, com parâmetro λ até avariar. O tempo de reparação de cada máquina é exponencial com parâmetro μ. Designe por $N(t)$ o **número de máquinas avariadas** no instante t.$\{N(t)\}_{t \geq 0}$ pode ser descrito como um processo de nascimento e morte.

   (a) Indique as taxas de nascimento e morte. (20)

(b) Prove que (20)

$$\pi_n = \begin{cases} \binom{K}{n}\rho^n \pi_0, & 0 \le n \le R \\ \binom{K}{n}\frac{n!}{R!R^{n-R}}\rho^n\pi_0 & R < n \le K \end{cases},$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{R}\binom{K}{n}\rho^n + \sum_{n=R+1}^{K}\binom{K}{n}\frac{n!\rho^n}{R!R^{n-R}}\right]^{-1},$$

com $\rho = \lambda/\mu$.

(c) Suponha que $R = 1$. Tendo em consideração que $\pi_{n+1} = (K-n)\rho\pi_n$, $n = 0, 1, ..., K$, prove que (20)

$$L = K - \frac{1-\pi_0}{\rho}.$$

(d) Suponha que as máquinas são em número de dois, que existe apenas um técnico, que o período de funcionamento de cada máquina até avariar é exponencial de média 10 horas e que o tempo de reparação é exponencial de média 8 horas. Determine

i. a percentagem de tempo em que o técnico está ocupado. (15)

ii. o número médio de máquinas à espera de iniciarem reparação. (15)

5. Seja $\{B(t)\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano standard. Considere

$$Y(t) = \exp[cB(t) - c^2t/2\}.$$

(a) Mostre que $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ é uma martingala. (20)

(b) É $\{Y(t)\}_{t\geq 0}$ um movimento Browniano? Justifique. (10)