

Semana 6, Parte I: Cap. 4 (cont.) – Matriz Inversa

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Sejam as matrizes M, P, Q, X quadradas, com M invertível. A solução da equação $XM + P = Q$ é $X = M^{-1}(Q - P)$: verdadeiro ou falso? Justifique a resposta.

1.2. Determine a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$, com $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ c) $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$, com $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.3. Prove que a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

1.4. Usando operações elementares, determine a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Demonstre que a inversa de uma matriz, quando existe, é única.

2.2. Sejam A e B matrizes invertíveis e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Demonstre as seguintes propriedades:

- a) $(A^{-1})^{-1} = A$;
- b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- c) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3 Problemas e Modelização

3.1. Mostre que os vectores $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ e $\vec{c} = (1, 0, 1)$ são linearmente independentes:

- a) utilizando a definição de independência linear;
- b) estudando a característica de uma matriz;
- c) calculando o determinante de uma matriz;
- d) determinando se uma matriz é invertível.

3.2. Retomemos o problema 3.1 da semana 5: uma empresa da indústria alimentar produz diariamente farinha de trigo, farinha de centeio e farinha de milho. A produção total da empresa é de k toneladas por dia. A produção diária conjunta de farinha de trigo e de centeio é o triplo da produção de farinha de milho, e a produção diária conjunta de farinha de trigo e de milho é o dobro da produção de farinha de centeio. Escreva o respectivo sistema de equações sob a forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ e determine as soluções \vec{x} através do cálculo de A^{-1} .

4 Exercícios adicionais

4.1. Seja A uma matriz simétrica e invertível de ordem n tal que $X'A = B + A$. Então:

a) $X = B'A^{-1} + I$ b) $X = A^{-1}B' + I$ c) $X = \left(\frac{B+A}{A}\right)'$

d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

4.2. Sejam A , B e C matrizes quadradas de ordem n . Sabendo que: $|A + B| = 3$, $|C| = 2$ e $(AX + BX)' = C$, obtenha X (em função de A , B e C) e calcule o seu determinante.

4.3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$.

a) Mostre que o determinante de A é igual a: $-(1 - x^2)^2$.

b) Indique os valores de x para os quais a matriz A não tem inversa.

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 16.6: Exercícios 2 a 6;

Secção 16.7: Exercícios 2 e 5.

Semana 6, Parte II: Cap. 5 – Sucessões e Séries

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 2 a 4.

1.2. Determine se as seguintes séries são convergentes. Em caso afirmativo, determine a sua soma:

a) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $\sum_{n \geq 1} 3^n$ c) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}$ d) $\sum_{n \geq 3} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ e) $\sum_{n \geq 2} 5^{-n}$.

1.3. Considere a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{an^2+n}{n^2-1}$, com $a \in \mathbb{R}$. Indique a resposta correcta:

- a) se $a \neq 0$ então a série é divergente b) se $a \neq 0$ então a série é convergente
c) a série é convergente, $\forall a \in \mathbb{R}$ d) a série é convergente para $a = 1$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Defina:

- a) Função
b) Função real
c) Função real de variável real
d) Sucessão
e) Série.

2.2. Demonstre que $\sum_{\ell=0}^{n-1} ak^\ell = a \frac{k^n - 1}{k - 1}$, onde $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, e n é um inteiro finito.

3 Problemas e Modelização

3.1. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule a sua soma:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - x^2)^n$ b) $4x^2 + 16x^4 + 64x^6 + \dots$

3.2. Utilize a teoria das séries geométricas para escrever as seguintes dízimas sob a forma de fracções irredutíveis:

a) 0,999... b) 1,666... c) 0,1212...

3.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 6 e 7.

4 Exercícios adicionais

4.1. Calcule $\sum_{n=0}^{\infty} [(-\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^n]$.

4.2. Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ as seguintes séries convergem e calcule as suas somas:

a) $\sum_{n \geq 0} (3x - 4)^n$ b) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$ c) $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{(x+1)^{2n}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |x|)^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{(x+1)^{3n}}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n-1}}$.

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 10.4: Exercícios 5 e 8.