

Semana 7: Cap. 5 – Funções Reais, e Cap. 6 – Variações

NOTA: Nesta ficha usa-se indistintamente as seguintes notações:  $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{df(x)}{dx}$ .

## 1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 6.5:** Exercícios 1 e 4.

1.2. Esboce o gráfico das seguintes funções, indicando em cada caso um ou dois pontos particulares:

- a)  $-x^2$       b)  $-\sqrt{x}$       c)  $e^x$       d)  $\ln x$       e)  $\frac{1}{x}$       f)  $\sin x$       g)  $\cos x$       h)  $\tan x$   
i)  $ax + b$  com  $a, b \in \mathbb{R}$       j)  $|x + 5|$       k)  $\ln(x - 5)$       l) uma função ímpar.

1.3. Calcule a derivada em ordem a  $x$  das funções das alíneas a) a i) do exercício 1.2.

1.4. Para que valores reais de  $a$  e  $b$  a função  $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ b - 2x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$  é contínua?

1.5. Seja  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = x^n$  com  $n \in \mathbb{Z}$ , e  $h(x) = \sin x$ . Calcule:

- a)  $\frac{d}{dx} [f(x) + g(x) + h(x)]$       b)  $\frac{d}{dx} [5f(x) + 2g(x)]$       c)  $\frac{d}{dx} [g(x)h(x)]$   
d)  $\frac{d}{dx} [f(x)g(x)h(x)]$       e)  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{h(x)}{f(x)} \right]$       f)  $\frac{d}{dx} \left[ \frac{g(x)h(x)}{f(x)} \right]$ .

1.6. Seja  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- a) Indique o domínio de  $f$  e discuta a continuidade e a diferenciabilidade de  $f$ .  
b) Calcule:  $\frac{df(x)}{dx}$ ,  $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$  e  $\frac{d^3f(x)}{dx^3}$ .

## 2 Definições e Demonstrações

2.1. Demonstre, pela definição, que:  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x + 1 = 7$ .

2.2. Sejam as funções  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Demonstre que se  $f$  e  $g$  forem contínuas em  $a \in \mathbb{R}$ , então a função  $(f + g)$  também é contínua em  $a$ .

2.3. Seja  $f(x) = x^2$ . Demonstre, pela definição, que:  $\frac{df(x)}{dx} = 2x$ .

2.4. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mostre que  $\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ , com  $h = a - x$ .

2.5. Sejam  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis e  $k \in \mathbb{R}$ . Mostre que:

- a)  $\frac{d}{dx} [f(x) + g(x)] = \frac{df(x)}{dx} + \frac{dg(x)}{dx}$ .  
b)  $\frac{d}{dx} [kf(x)] = k \frac{df(x)}{dx}$ .

### 3 Problemas e Modelização

3.1. O preço das acções das seguintes empresas é dado em função do tempo  $t$  por:

- Empresa  $A$ :  $2t^2 + 4t$
- Empresa  $B$ :  $3t^2 + t$
- Empresa  $C$ :  $\frac{2t}{t^2+1}$ .

- a) No instante  $t = 1$  qual a empresa cujo preço das acções está a crescer mais depressa?  
b) Qual o período durante o qual o preço das acções da empresa  $C$  está a crescer?

3.2. Estude o domínio, a continuidade e a diferenciabilidade das seguintes funções:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \ln(1 + x^2) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

3.3. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Resolva a seguinte equação:  $\frac{df(x)}{dx} = f(x)$ .

3.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 7.8:** Exercício 4;

**Secção 6.7:** Exercício 8;

**Secção 6.9:** Exercícios 9 e 10.

### 4 Exercícios adicionais

4.1. Determine o domínio das seguintes funções.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{1}{x+3} & \text{b) } g(x) = \frac{x}{x^2+1} & \text{c) } h(x) = \ln(3-2x) \\ \text{d) } i(x) = \sqrt{x^2-25} & \text{e) } j(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} & \text{f) } k(x) = \ln(\ln x) \\ \text{g) } l(x) = \frac{1}{\ln(1-|x-1|)} & \text{h) } m(x) = \frac{\ln(4-x^2)}{\sqrt{e^x-1}}. \end{array}$$

4.2. Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável. Resolva a seguinte equação:  
 $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f(x)$ .

4.3. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 7.8:** Exercícios 2, 3 e 5;

**Secção 7.9:** Exercícios 1 a 3;

**Secção 6.5:** Exercício 5;

**Secção 6.7:** Exercícios 6 e 7;

**Secção 6.9:** Exercícios 1, 3 e 7.