



LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

# Matemática, da Magna Grécia ao Século XXI *sobre ombros de Gigantes*

**Doutora Maria do Rosário Grossinho**

Professora Catedrática de Matemática do ISEG, Universidade de Lisboa

Investigadora do CEMAPRE

Apresentado como *Lição de Sapiência* na Abertura Solene do Ano Letivo 2017/18

Lisboa, 9 de Janeiro de 2018



A meus Filhos, Isabel e Luís,  
bem como a todos os outros *Gigantes* a quem devo profundo respeito.



## **Matemática, da Magna Grécia ao Século XXI sobre ombros de Gigantes**

Proferir esta *Lição de Sapiência*, na abertura solene do ano letivo, é um ato que muito me honra, tanto quanto me faz temer a responsabilidade de me dirigir a esta ilustre audiência — em nome de uma corporação cujos serviços ao conhecimento das coisas económicas se medem, entre outros fatores, pelas notáveis carreiras de antigos estudantes desta Casa. Fernando Pessoa sintetiza o peso de uma tal responsabilidade com um verso simples: “*aqui ao leme sou mais do que eu...*”

Porém, passemos à tarefa que me impende, e que é coisa bem diferente de desculpar-me pelas minhas insuficiências e temores.

Irei pois falar-vos de Matemática, palavra que deriva do grego do μάθημα, (*máthēma*), que significa Ciência, Conhecimento ou Aprendizagem, que é afinal o tema que nos une a todos.

De acordo com a tradição, Galileu terá dito que “*A Matemática é a linguagem com a qual Deus escreveu o universo*”, frase repetida com frequência e com ligeiras variações. O certo é que a Matemática se tem revelado uma interação profícua em todos os ramos do conhecimento, seja do universo material, seja da ação humana, quer nos aspetos do conhecimento puro, quer nas aplicações práticas.

É meu propósito referir-me à sua evolução, em ligação com a Filosofia e a Ciência em geral, mas à *vol d’oiseau*, isto é, com a ligeireza que o tempo desta lição permite.

## Da Antiguidade ao alvorecer da Era Moderna

As origens da Matemática perdem-se no tempo, já que estão ligadas à tomada de consciência do homem pela necessidade de contagem, de medição e de forma, havendo registos matemáticos encontrados na Mesopotâmia, na Suméria e no Egipto, em tábuas de argila ou papiros, que datam mais de dois milénios a.C. Nos seus primórdios, o enriquecimento do saber matemático está ligado aos factos do quotidiano, promovendo a acumulação e sistematização de dados e estimulando a relação de conceitos, quer no ramo da Aritmética quer na Geometria para que remetem as referidas noções iniciais de contagem, medição e forma, respetivamente, sendo, contudo, conhecimentos demasiado fragmentados para que se considere constituído o processo de conhecimento nestes dois ramos. Não se conhecem referências a qualquer reflexão sobre a origem dos conceitos e das relações descobertas, sendo manifesta a ausência de espírito abstrato, ou preocupação, com construção dedutiva ou coerência. São apenas processos empíricos ainda longe do um saber matemático tal como vem a ser concebido e sintetizado posteriormente na Grécia.

A vida prática não impõe somente que se olhe para a terra. As estações do ano, a navegação, os mistérios do céu, a preocupação com o futuro, tudo isso leva os Gregos a procurar uma explicação racional do Universo e a uma relação de causalidade entre os fenómenos da natureza. Se por um lado se desenvolvia o estudo das propriedades dos números, por outro a Geometria conciliava-se com a Astronomia, sobretudo através das curvas chamadas *epiciclos* que correspondem às órbitas dos planetas vistas da Terra.

Da Antiguidade referimos três Gigantes cuja herança sobressai: Pitágoras, Euclides e Arquimedes.

Pitágoras e a escola pitagórica, apercebendo-se de que os números são menos simples do que à primeira vista parecem, pois que se ligam por relações complexas e em conexão com modelos bem diferentes — *verbia gratia* a acústica e a estética —, tê-los-ão considerado como a essência de todas as coisas. Toda a ordem do universo se encontraria espelhada nas relações geométricas ou numéricas. O teorema de Pitágoras é a mais célebre descoberta no campo de Geometria. Mas com ele veio a descoberta da não comensurabilidade dos segmentos de reta, pois que uma grandeza irracional aparece de imediato, basta aplicar o teorema a um triângulo retângulo de cateto unitário.

Não alcançado o conceito de infinito, os Gregos somente podiam lidar com números inteiros ou fracionários, o que na Geometria se traduzia pelas construções de régua e compasso. Deixaram-nos assim alguns problemas (trisseção do ângulo, quadratura do círculo, duplicação do cubo) e os paradoxos de Zenão.

No século III a.C., Euclides, com a sua obra *Os Elementos*, formula a Geometria como uma clara ciência dedutiva. Partindo de definições e axiomas, num exercício de pura abstração,

formulam-se e demonstram-se teoremas, numa perfeita construção lógica. O espaço euclidiano, imutável e geométrico, interpreta de forma natural o que a experiência sugere.

Ainda no século III a. C., surge Arquimedes que é considerado o maior matemático da Antiguidade. A obra de Arquimedes é vastíssima e a sua influência teve uma importância decisiva no surgimento da Ciência moderna. É considerado por muitos historiadores entre os maiores matemáticos de todos os tempos, a par de Newton e de Gauss, de que falaremos à frente. Arquimedes utilizou aproximações sucessivas de poliedros para calcular áreas e volumes, uma forma rudimentar de cálculo integral. Foi também um brilhante engenheiro, descobriu o conceito de densidade, inventou o parafuso sem fim, ainda usado em tempos recentes para bombear água ou cereais. Estudou o princípio da alavanca que transforma uma *força fraca* numa *força forte* e terá exprimido esta relação na frase: “*dêem-me um ponto de apoio e eu levantarei o mundo*”. Apesar da notoriedade de Arquimedes ter assentado fortemente nas suas invenções de carácter mecânico, ele acreditava, segundo os estudiosos, que a Matemática na sua forma mais pura era o único conhecimento valioso. Tomemo-lo com um grão de sal...

O que é facto é que todo o pensamento filosófico na Antiguidade assenta na procura de verdade única explicativa de todas as coisas, numa busca incessante que perdurará ao longo dos milénios e irá sempre desaguar numa mesma conceção - a Matemática.

Após os Gregos vieram os seus herdeiros, os Romanos, que reduziram a Grécia e conquistaram o Egito e a biblioteca de Alexandria, o lugar onde Euclides escrevera *Os Elementos*. Todavia, os Romanos, grandes construtores, não sentiram a necessidade de fazer progredir a Matemática para além de *Os Elementos*. Depois, veio a queda do Império atravessado pelas tribos germânicas, a desordem na sociedade, a destruição dos meios de produção, e a fome. Sobre o longo período entre a queda definitiva de Roma (476) e o ano 1100, há como que um vazio, apenas vagamente preenchido pelo desenvolvimento de temas religiosos ou por obras históricas de próceres da Igreja, como Grégoire de Tours. O processo de reconstrução da ordem imperial, o único modelo político conhecido, começa sob a égide da Igreja, após a breve tentativa de Carlos Magno. Entretanto, pelo ano 700 d.C., sábios Hindus inventavam a numeração decimal, um passo de gigante na abstracção ao inventar o zero, isto é, um símbolo que representa o nada.

Se é verdade que a Antiga Grécia dera impulso e brilho ao desenvolvimento da Ciência, na Idade Média é para a Teologia que converge todo o esforço intelectual que procura harmonizar o universo com o homem, e com Deus. Apesar de tudo, nas universidades medievais a Ciência natural foi integrada no *quadrivium* (Aritmética, Geometria, Astronomia, Música) com os meios da época e não esqueçamos que os livros eram copiados à mão. Um progresso notável foi a conciliação da lógica com a revelação — a Escolástica, com destaque para obra de São Tomás de Aquino de que é expoente a *Suma Teológica*. Na Idade Média, o conhecimento científico procura as suas raízes nos grandes nomes

da Antiguidade, sendo o período caracterizado novamente pela acumulação de factos e dados, sem procura de explicação, tal como acontecera nos primórdios. Contudo, já na época precedendo São Tomás, começaram a ser estudados os textos gregos, chegados à Europa pela via dos estudiosos ibero-árabes Avicena e Averróis. Os originais tinham ficado entre as cinzas da Biblioteca de Alexandria. Distingue-se em Paris São Alberto Magno, canonizado e proclamado santo protetor dos cientistas, para quem a filosofia meditativa era formada pela Matemática, pela Física e pela Metafísica. Num período de acentuada atividade intelectual, com a criação de universidades por toda a Europa, destaca-se também o Franciscano Roger Bacon pela ênfase dada ao uso da Matemática e pelas contribuições científicas, especialmente no domínio da Ótica, determinantes para a invenção do telescópio e do microscópio.

Foram alcançados alguns desenvolvimentos ao nível da metodologia científica e da Física. Embora o ambiente social e científico tivesse sido muito afetado pela peste negra e pela Guerra dos Cem Anos, veio a registar-se progresso cultural e tecnológico, com transformação profunda na sociedade europeia, gerando a transição da Idade Média para a Idade Moderna.

## **Renascimento e Determinismo**

Em meados do século XIV, com o crescimento do comércio e da navegação em que os Portugueses tiveram um papel determinante ao navegar no Atlântico, no alto mar, assiste-se a uma crítica das estruturas medievais, com a conseqüente retoma das referências da Antiguidade Clássica, num movimento intelectual que conduz a Europa à Idade Moderna. Vem o Renascimento, assim designado por fazer *renascer* os valores da Antiguidade, com o ser humano no centro da Criação, suscitando a principal corrente de pensamento deste período designada por Humanismo.

As atenções viram-se de novo para o conhecimento, para a necessidade de compreensão, para a procura de explicações para o desconhecido, num movimento que se acelera com a chegada ao Ocidente de muitos eruditos bizantinos fugidos de Constantinopla, após a queda desta em poder dos Turcos, em 1453.

Estava iniciado o caminho para o progresso científico, em que a razão e experiência se iriam conciliar, pesem embora as polémicas entre racionalistas e empiristas. Se pelo Racionalismo de Spinoza e de Leibniz só podemos atingir as verdades da Matemática com o uso da razão, pelo Empirismo de Hume é a experiência sensorial que enforma as leis que governam o mundo.

Sem exagero pode dizer-se que Galileu cria a Ciência moderna, ao estabelecer a lei da queda dos corpos por uma hábil conexão entre razão e experimentação, como o explica magistralmente Ernst Mach.

Cumpramos salientar as navegações e os descobrimentos dos navegadores portugueses, nos séculos XIV e XV, pela contribuição que delas resultaram para um melhor conhecimento



do Universo, com abandono direto ou indireto das concepções fantasistas do mundo antigo, num saber fundado na experiência e na observação, qual triunfo comprovado do Empirismo. A Cartografia, a Astronomia e a Ciência Náutica assumem especial destaque pelo estudo profundo que lhes subjaz, onde se destacou o matemático português Pedro Nunes. Referem-se em particular a sua obra o *Tratado da Sphera* onde, partindo de obras anteriores, são apresentados novos conceitos matemáticos, como é o caso da loxodrómica - linha de rumo com interesse na navegação, que esteve na base da cartografia de Mercator.

Do estudo da Astronomia ligado às navegações, ir-se-á passar nos séculos seguintes para a formulação matemática das leis que regem o movimento dos planetas, num objetivo que é também prático, como notamos adiante.

Nas palavras de Bertrand Russell, "*René Descartes é geralmente considerado o fundador da Filosofia moderna, e penso eu, com razão*". Toda a estrutura de pensamento de Descartes assenta em concepções racionalistas e mecanicistas ao arripio da formação escolástica que recebera na Universidade onde os estudos de Aristóteles e São Tomás de Aquino pontuavam. Para ele, a Matemática é o modelo do raciocínio perfeito onde princípios evidentes, claros e distintos, são as verdades incontestáveis da razão, onde tudo se obtém por dedução.

A célebre frase *cogito ergo sum* – penso, logo existo - constituiu o primeiro passo na dúvida metódica que enformou todo o seu estudo e serviu de apoio ao quadro dedutivo segundo o qual nada deve ser aceite como verdadeiro sem que se reconheça a evidência dessa verdade.

Em 1637, o tratado filosófico e matemático *O discurso do método*, juntamente com o seu apêndice *A Geometria*, constitui obra de relevância incontornável na história da Matemática. Todavia, a sua maior criação consiste na fusão entre os números e a Geometria, a que se chama Geometria Analítica, um fator determinante em futuros desenvolvimentos, pois que as curvas passaram a ser simultaneamente forma e quantidade.

No estudo das curvas segundo a perspectiva cartesiana, Leibniz formulou o Cálculo Infinitesimal, o mesmo que Newton também inventou para descrever os movimentos celestes.

Os séculos XVI, XVII e XVIII foram séculos fecundos, com criação de conhecimento maduro. Isaac Newton descobre finalmente a lei que explica os movimentos dos corpos celestes, ou lei da atração universal, ao mesmo tempo que inventa a Mecânica, hoje chamada clássica. Antes dele houvera Copérnico, Kepler e Galileu, daí a sua frase que deu o mote a esta lição: "*Se consegui ver mais longe é porque me ergui sobre ombros de gigantes*".

O universo newtoniano é muito simples: dentro do quadro geométrico euclidiano movem-se partículas materiais pontuais, dotadas de massa, exercendo forças mútuas, ação e reação. Eventualmente, as partículas agregam-se em sólidos rígidos, ou em corpos deformáveis, ou em fluidos. Este universo evolui segundo quatro axiomas, mais a dita lei de atração. Um cálculo elementar, ensinado em qualquer cadeira de Mecânica Racional, permite deduzir as leis de Kepler a partir dos axiomas de Newton.

A primazia sobre a descoberta do Cálculo Infinitesimal levou a uma polémica célebre entre Newton e Leibniz. Segundo Bertrand Russell “em 1675-6, Leibniz inventou o Cálculo Infinitesimal desconhecendo o trabalho anteriormente feito, mas não publicado, por Newton sobre o mesmo assunto”. O que é facto é que foram as definições e notações de Leibniz que perduraram e são ensinadas nas nossas escolas. Polémicas à parte, no século XVIII, o universo newtoniano afigura-se absolutamente confirmado, dando ao homem, iluminado pela Razão, o estatuto de senhor do Mundo, detentor do conhecimento das leis pelas quais ele se rege. Laplace vai consagrar essa visão mecanicista do mundo, na sua obra magna *Mecânica Celeste*. Trata-se de uma obra que visa um fim prático, o cálculo de efemérides, ou almanaques, para uso na navegação. Apesar da coerência lógica desta obra, Laplace não deixa de lamentar que algumas quantidades tenham que ser obtidas por observação, quando a situação ideal permitiria tudo deduzir e calcular a partir, apenas e somente, dos axiomas da Mecânica.

Da perfeição de *Mecânica Celeste* de Laplace deduziu-se o universo determinista e — porque não? — a evolução determinista da sociedade. O demónio de Laplace, um ser imaginado que, conhecendo todas as posições e velocidades dos corpos celestes num instante inicial, conheceria as posições e velocidades em qualquer instante futuro.

Cimentava-se a ideia perseguida desde a Antiguidade segundo a qual a essência de todos os fenómenos naturais assenta num princípio único – a Matemática. O próprio Lagrange contribuiu para esta ideia quando no prefácio à *Mecânica Analítica* refere que o leitor não vai encontrar desenhos, dito de outra maneira, não haverá apelo à intuição.

Não se pode compreender esta evolução sem mencionar o problema das longitudes. Desde o século XV que se tinha compreendido que a solução astronómica deste problema, eminentemente prático para a navegação e comércio, passava pelo cálculo das coordenadas da Lua reduzidas ao centro da Terra, uma trajetória complexa vista a atração conjunta do Sol e da Terra. A lei da atração universal de Newton gerou um sistema de equações diferenciais, cuja teoria geral ocupou a atenção de inúmeros matemáticos, nomeadamente Euler, perante a impossibilidade geral de uma integração exata. *O Bureau des Longitudes*, criado em 1795, fez parte de um desafio à hegemonia naval inglesa e os dois matemáticos inicialmente nomeados para o Bureau foram precisamente Lagrange e Laplace.

A talhe de foice, convém assinalar que alguns dos problemas matemáticos são de origem externa, provêm do mundo material e das necessidades da economia, como é o caso do problema das longitudes; enquanto outros são de origem interna, sugeridos pelas próprias ideias matemáticas, como é o caso do postulado das paralelas e da extração de raízes de polinómios ou resolubilidade algébrica.

## Do Pós Revolução Francesa ao advento do século XX

Se no século XVIII, os irmãos Bernoulli e Leonhard Euler generalizam o Cálculo Infinitesimal de Leibniz ao cálculo das variações, o século XIX, dominado prioritariamente pelas questões de Astronomia e Mecânica Celeste, onde sobressai a descoberta de Neptuno por puro cálculo, irá ser marcado pela acentuação da complexidade dos conceitos matemáticos.

Em França, em tempos de pós-revolução, o enfoque foi posto na Análise Matemática e na sua capacidade calculatória, em que se destacam nomes como Lagrange, Laplace, Legendre, Fourier. Galois criou a Teoria de Grupos como método para decidir a questão da resolubilidade algébrica, isto é, a possibilidade de cálculo das raízes de polinómios por quadraturas — provou que não existe método algébrico para resolver equações de grau superior a quatro e abriu caminho a estudos futuros em Álgebra abstrata.

Numa carta a Legendre, Jacobi escreve que “o único objetivo da ciência é a glória do espírito humano” [c'est l'honneur de l'esprit humain].

Na Alemanha, decerto por razões culturais, é valorizada a Matemática Pura, por si só. Neste contexto, assinalemos Gauss e Riemann. O primeiro, denominado Príncipe da Matemática, pioneiro na Estatística, na Geodesia, na Teoria dos Números, na Geometria Diferencial, foi um sábio completo nas suas descobertas teóricas, registando-se ainda o seu trabalho geográfico ao serviço do governo de Hannover. Riemann para além das contribuições dadas no cálculo, em particular, com o integral que tem o seu próprio nome, possui trabalho de enorme relevância em geometrias não-euclidianas. Atacou o velho problema do postulado das paralelas criando uma Geometria que satisfaz a todos os axiomas de Euclides, exceto o quinto axioma, substituindo-o por outro segundo o qual por um ponto exterior a uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada. A palavra *reta* é aqui simbólica, do que trata verdadeiramente é de linhas geodésicas, que na Geometria de Euclides são as retas. A Geometria de Riemann ficou especialmente célebre por vir a ser usada por Einstein como o quadro geométrico da sua Teoria de Gravitação (Relatividade Geral).

O aparecimento das novas geometrias, no século XIX, tinha sido o germe de uma dúvida que se instalou nos fundamentos de toda a Matemática, onde as Axiomáticas e a Lógica assumiram primeiro plano.

Nomes como Dedekind, Weierstrass e Cantor estão ligados à axiomatização dos números naturais e dos números reais e à Teoria de Conjuntos. Cantor mostra que o conjunto dos números reais algébricos tem a mesma cardinalidade dos números naturais embora nem todos os números algébricos sejam naturais. O infinito presta-se a este e outros contrassensos e paradoxos.

A intuição que tanto valor tivera no século XVIII com o uso dos infinitésimos começa a ser considerada como um processo indigno da Matemática. Na viragem do século, Peano formula uma axiomatização para os números naturais, num conjunto de cinco postulados, conhecidos precisamente por axiomas de Peano, o quinto dos quais constitui o método de indução matemática. Hilbert, na sua obra *Fundamentos da Geometria*, estabelece um

conjunto de 20 axiomas (21 inicialmente) visando a clarificação rigorosa da geometria euclidiana, em particular, das questões ligadas ao axioma das paralelas.

### **De 1900 aos dias de hoje**

Se é verdade que primeiro apareceu o Cálculo, com a noção de número, depois a Geometria que associou a noção de espaço, à qual a Mecânica ao adicionar as noções de tempo e de força introduz e a explica o movimento, no advento do século XX os paradigmas da Ciência estão em profunda e acelerada modificação.

Com efeito, o século XX constitui um ponto de rutura nas concepções mecanicistas do Universo. Os seus referenciais absolutos de concepção aristotélica do espaço e do tempo, que prevaleceram desde século IV a.C., e em particular de Newton a Laplace, irão perder esse carácter absoluto devido principalmente às equações do Campo Eletromagnético de Maxwell. Estas equações são incompatíveis com o grupo de Galileu (de transformação de coordenadas) só fazendo sentido se existir uma velocidade limite (a da luz) como provou Poincaré. Afinal a Mecânica de Newton explica somente o que se passa no Universo em pequenas velocidades e a nível macroscópico. Só neste campo limitado tem sentido falar em determinismo e ainda assim contrariando os poderosos argumentos do filósofo Popper.

No ano de 1900, Hilbert, antigo aluno de Gauss, apresenta no Congresso Internacional de Matemática, em Paris, 23 problemas, que vieram a marcar a investigação em Matemática no século que então começava. Hilbert visava o estabelecimento de sólida fundamentação matemática em termos formais, objetivo que virá a ser abalado mais tarde.

Longe das preocupações de Hilbert, o ano de 1900 marca também a emergência da Matemática Financeira, embora tal só viesse a ser reconhecido mais de cinquenta anos depois. O conceito de movimento browniano, um movimento errático de partículas em suspensão inicialmente observado ao microscópio pelo botânico Robert Brown, vai ser o conceito usado por Bachelier para formular uma teoria de comportamento de ativos financeiros, na sua tese *Teoria da Especulação*.

Bachelier não obteve reconhecimento para a sua intuição. Faltavam-lhe os fundamentos que apareceram mais tarde como sejam a teoria axiomática das probabilidades, os processos estocásticos e o cálculo de Itô, que só vieram a ser sistematizados cerca de 30 a 40 anos depois por Kolmogorov, Wiener e Itô, respetivamente.

Posteriormente, nos anos 50, Paul Samuelson, que virá a receber o prémio Nobel da Economia em 1970, toma conhecimento da tese de Bachelier e divulga-a junto de alguns dos seus colaboradores no MIT. A utilização de métodos estocásticos na Economia, dos quais o passeio aleatório é exemplo, para estudar os movimentos do mercado bolsista era absolutamente nova. E assim Robert Merton por um lado e Myron Scholes em colaboração com Fischer Black, que trabalhava em Cambridge, estenderam o trabalho de Bachelier e criaram os fundamentos da teoria moderna do preço *justo* de derivados financeiros, no sentido do valor que corresponde à esperança matemática do preço na maturidade, tidas

em conta as condições vigentes no contrato. Este trabalho valeu a Robert C. Merton e Myron S. Scholes, então professores nas Universidades de Harvard e Stanford, respetivamente, o Prémio Nobel da Economia em 1997 (Fisher Black tinha falecido anteriormente).

Assiste-se assim à consolidação da Matemática Financeira, onde o cálculo estocástico com a sua estrutura matemática rica – teoria de martingalas, cálculo de Itô, integração estocástica e equações diferenciais parciais – se revela bem adequado à análise das finanças contemporâneas, permitindo uma interação entre Finanças e Matemática, num campo de crescente investigação com grande impacto teórico e prático nos mercados financeiros.

O conceito de probabilidade é central em Matemática Financeira, bem como em todos os ramos de conhecimento de matriz aleatória. Laplace ter-se-á pronunciado sobre o que seria uma probabilidade, tentando enquadrá-la de forma determinista ao concebê-la como a *medida da nossa ignorância*. Popper virá a interpretá-la nos nossos dias como *propensão*. Porém, a axiomatização da probabilidade (questão que Hilbert ignorara) interessa muitos matemáticos das primeiras décadas do século XX, incluindo em Portugal. Em todo o caso, somente nos anos 30, o trabalho de Kolmogorov resolveu o essencial do problema, tendo fornecido uma interpretação objetiva da probabilidade através da noção de integral. Para isso foi decisivo o conceito de integral de Lebesgue que permite definir a probabilidade como uma medida. Arrumava-se assim um assunto que fora objeto de inquietude desde Pascal e o Chevalier de Méré, do século XVII, passando por Laplace e também por Keynes e o seu *Tratado sobre a Probabilidade*, de 1921.

A par da Matemática Financeira, surgem no século XX, na área de Matemática Aplicada, a Teoria dos Jogos e a Teoria do Caos que possuem elevado interesse de carácter aplicado, em particular na Economia. Curiosamente, a situação da Teoria dos Números mudou de um jogo lógico sem valor prático para uma posição central, com a descoberta do sistema de encriptação com chave pública, sistema que tem garantido a confidencialidade das nossas comunicações via Internet, talvez em via de ser substituída pela encriptação quântica.

No século XIX, antecipando a Teoria de Jogos, o matemático francês Cournot tinha desenvolvido o modelo económico para o mercado em duopólio, no sentido de buscar a melhor estratégia possível para cada jogador. O francês Borel também teve contribuições notáveis para a teoria, todavia é a John Von Neumann e a Morgenstern, que se atribui a criação da teoria abstrata de jogos.

Faço um pequeno parêntesis para fazer uma especial referência a Von Neumann, cientista de origem húngara, naturalizado americano, com brilhantes contribuições em Matemática e em Física, com comprovada influência nas aplicações e reconhecida profundidade nas contribuições em Matemática Pura. Os seus trabalhos cobrem um espectro alargado de tópicos que incluem Teoria de Conjuntos, Análise Funcional, Mecânica Quântica, Teoria Ergódica, Hidrodinâmica, Teoria da Computação, Meteorologia, Teoria da Detonação.

A Teoria dos Jogos é hoje aplicada ao estudo da concorrência e da cooperação entre empresas num determinado grupo. Neste domínio, John Nash distinguiu-se pela introdução de um conceito novo de equilíbrio e pela demonstração da sua existência através de métodos sofisticados de Análise Funcional. Recebeu o prémio Nobel da Economia em 1994. Para além da Economia, a Teoria dos Jogos parece ter um papel relevante na Biologia, nas Ciências Políticas (naturalmente) e na Filosofia.

Quanto à Teoria do Caos, precedida por estudos de Liapunov no final do século XIX sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos, e antecipada também por Poincaré, é desenvolvida por Edward Lorenz. Trata-se, no fundo, do problema da estabilidade da solução de uma equação diferencial em relação às condições iniciais. Em certos casos, uma ínfima mudança num acontecimento tido como inicial pode gerar consequências imprevisíveis e drásticas no futuro. Esta teoria, apresentada na tese de doutoramento de Lorenz, em 1963, só adquiriu projeção uma década mais tarde, no Encontro da Associação Americana para o Progresso da Ciência, com a apresentação *Previsibilidade: o bater de asas de uma borboleta no Brasil pode provocar um tornado no Texas?* Veio, contudo, revolucionar todas as áreas da Ciência, da Biologia à Economia passando pela Física. Em certos sistemas diferenciais não lineares, uma ínfima alteração nas condições iniciais provoca um comportamento assintótico completamente divergente, assunto que está ligado aos fratais que tentam descrever a infinita complexidade dos sistemas da natureza. Enquanto a Ciência clássica foca essencialmente fenómenos considerados previsíveis, a Teoria do Caos lida com fenómenos não lineares, deterministas à partida mas de consequências imprevisíveis e incontroláveis, com especial relevo, por exemplo, para a meteorologia.

Lorenz ganhou variados prémios entre os quais o prémio Kyoto de 1991 por ter estabelecido uma teoria que tinha tido uma influência profunda num leque variado de ramos da Ciência e produzido *uma das mais dramáticas mudanças na visão do homem sobre a Natureza, desde Sir Isaac Newton*. Tomemos com alguma reserva estas opiniões do nosso tempo, sobre o nosso tempo.

Voltando à Teoria dos Números. Esta, que estuda os números inteiros e as suas relações, assente em conceitos como divisibilidade e primalidade, remonta à Grécia Antiga, com contribuições notáveis de Pitágoras, Euclides e Diophantus. Já falámos das atuais aplicações na criptografia. Mas é incontornável a referência a Fermat, no século XVII, pelas conjeturas e teoremas que lhe são devidos, não obstante ser matemático amador, uma vez que era membro do Parlamento de Toulouse, um dos tribunais superiores da França ante-revolucionária. É o fundador da Teoria Moderna dos Números. Tornou-se célebre a conjetura de Fermat segundo a qual dado um número natural  $n > 2$  não existem naturais  $x, y, z$  tais que  $x^n + y^n = z^n$ ; existem para  $n=2$ . Fermat escreveu na margem de uma página de livro que fizera a prova mas que não cabia naquele espaço. O que é facto é que nunca foi encontrada e chegou o século XX sem que fosse conhecida até que Andrew Wiles consegue nos anos 90 provar o agora designado Último Teorema de Fermat, utilizando a teoria das curvas elípticas.

Vivemos atualmente num mundo digital, onde a Teoria da Informação e a Ciência da Computação atravessam todas as áreas do saber, estando estas no limiar de novos tempos marcados pela computação quântica, em acelerado desenvolvimento e de consequências absolutamente surpreendentes.

Na origem da Ciência da Computação está Kurt Gödel, matemático austríaco e o mais famoso lógico de todos os tempos, pela sua contribuição crucial no campo das linguagens formais, da inconsistência e da incompletude das teorias e dos limites da *computabilidade*. Gödel mostrou com os seus teoremas de incompletude que não pode ser demonstrada a consistência da Aritmética por meios aritméticos. Mais geralmente, não pode ser demonstrada a consistência de uma teoria formal por meios intrínsecos a essa teoria, sendo necessário recorrer à chamada meta-teoria. Estes impressionantes resultados não são compatíveis com o plano de Hilbert de fundamentar logicamente toda a Matemática. Com isto ficou provado que os recursos do pensamento humano não podem ser totalmente formalizados, o que mostra que não será possível criar uma máquina que possa igualar as capacidades da mente humana.

Os trabalhos de Gödel influenciaram fortemente von Neumann e Alan Turing cujas teorias sustentaram o desenvolvimento dos computadores.

Nos nossos dias, a Matemática está por todo o lado, de forma indelével nas pequenas instâncias do quotidiano até à investigação em grandes laboratórios.

Dela beneficiamos em termos tecnológicos, em instrumentos de uso diário, desde o GPS ao computador, em termos de previsão por exemplo meteorológica ou económica, em diagnósticos e tratamentos clínicos, no estudo aprofundado da mente humana, na robotização, tudo isto num quadro de instalada familiaridade.

Na verdade, no centro de cada grande desafio intelectual ou científico do século XXI está um desafio matemático. Nas mais variadas áreas do saber científico, da criptografia quântica à nanotecnologia, da cosmologia à teoria das cordas que tenta unificar as quatro forças da natureza, da biologia molecular, com a investigação do genoma ou das proteínas, ou da biologia sistémica que investiga simultaneamente o comportamento de todos os componentes de um sistema em funcionamento, da capacidade de exploração dos computadores quânticos, ao nível das questões básicas estão sempre questões matemáticas. Dentro da própria matemática, os desafios internos exibem frequentemente conexões com outras áreas aparentemente não relacionadas, como foi o caso da teoria dos números e da criptografia. Cremos pois que a marca distintiva da Matemática no século XXI será a complexidade dos sistemas na interligação entre Matemática e todos os ramos da Ciência.

### *Senhoras e Senhores*

Da Antiguidade ao século XXI, a Matemática, em harmonia com a Ciência Natural e a Filosofia, tem desenhado um caminho surpreendente, sobre *ombros de gigantes*, num legado em que razão e experiência se entrelaçam de forma profícua e fecunda.

A momentos de deslumbramento por supostamente se ter alcançado a explicação acabada do Universo ou a fundamentação sólida de teorias, seguiram-se outros em que ficaram patentes as evidências dos próprios limites, o que por sua vez gerou desafios e estimulou novos desenvolvimentos num percurso que é, afinal, a essência do evoluir do conhecimento.

Vivemos atualmente tempos de euforia científica e tecnológica que são um benefício para a Humanidade; contudo, a prudência aconselha a meditar sobre as ameaças que podem estar ocultas. O que acontece quando se perdem as referências espirituais, sejam ou não de natureza divina? E quando a anulação dos limites éticos é simultânea ao uso de um poder absoluto? A Roma antiga é o paradigma que nos persegue; após séculos de guerras de fronteira com os povos germânicos, foram estes quem invadiu o Império e iniciou no Ocidente a alta Idade Média (Dark Ages). Os bárbaros derrotaram as formidáveis legiões de Roma, que havia muito tinham deixado de ser *formidáveis* porque haviam deixado de ser romanas.

De facto, a História não se compadece com a subtiliza do discurso, nem com a sofisticação da civilização. O vencedor é aquele que alia a força do saber, à coragem e à convicção.

O Progresso Técnico sem o Progresso Humano é como Fausto de Goethe, a entrega da *alma ao diabo*. Mas esta afirmação contém em si o dogma da existência do mal, e se aceitamos a existência do mal, temos que aceitar outras ideias, e aceitar que na história da Humanidade há uma tragédia sempre apta a regressar das profundezas.

E voltando ao *homem do leme*, quando este diz que "*aqui ao leme sou mais do que eu*", ele diz claramente que a sua força provém de uma força superior, "*o povo inteiro que quer o mar que é teu*", condensado na vontade que o ata ao leme. Deste conflito entre o *mostrengo* e o *povo inteiro* deduzimos — ou não! — que há limites para a ação da Humanidade.

Em todo o caso, a Humanidade não acabou com a queda de Roma, nem acabará mesmo se sujeita a maiores tragédias. Afinal até esse paradigma do determinismo que são as equações diferenciais é suscetível de um comportamento caótico. Portanto, é minha convicção otimista que, para além do nevoeiro e das iniciais *tormentas*, a Humanidade encontrará sempre um qualquer *cabo da Boa Esperança*.

Tenho dito.





**U LISBOA**

UNIVERSIDADE  
DE LISBOA



LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT

UNIVERSIDADE DE LISBOA

RUA DO QUELHAS, 6, 1200-781 LISBOA | PORTUGAL  
213 925 800

---

[WWW.ISEG.ULISBOA.PT](http://WWW.ISEG.ULISBOA.PT)