

Folha nº 1 – Exercícios sobre o capítulo 1: Matrizes

1. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Demonstre as seguintes propriedades:

a) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

b) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

2. Sejam A e B matrizes quadradas, de ordem n , e invertíveis.

a) Demonstre que $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa da matriz AB .

b) Resolva, em ordem a X , a seguinte equação matricial:

$$XA^{-1} + (AB)^{-1} = A$$

c) Mostre que se A e B comutam então A^{-1} e B^{-1} também comutam.

3. Considere $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Determine os valores de α para os quais A_α é invertível.

4. Defina característica de uma matriz de dimensão $m \times n$ e indique o conjunto dos valores admissíveis para a característica dessa matriz.

5. Calcule a característica das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Discuta, em função dos reais α e β , a característica das seguintes matrizes:

a) $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $B_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$