

Folha nº 1 – Exercícios sobre o capítulo 1: Matrizes

1. Sejam  $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Demonstre as seguintes propriedades:

a)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ .

b)  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

2. Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas, de ordem  $n$ , e invertíveis.

a) Demonstre que  $B^{-1}A^{-1}$  é a inversa da matriz  $AB$ .

b) Resolva, em ordem a  $X$ , a seguinte equação matricial:

$$XA^{-1} + (AB)^{-1} = A$$

c) Mostre que se  $A$  e  $B$  comutam então  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$  também comutam.

3. Considere  $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Determine os valores de  $\alpha$  para os quais  $A_\alpha$  é invertível.

4. Defina característica de uma matriz de dimensão  $m \times n$  e indique o conjunto dos valores admissíveis para a característica dessa matriz.

5. Calcule a característica das seguintes matrizes:

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; b)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. Discuta, em função dos reais  $\alpha$  e  $\beta$ , a característica das seguintes matrizes:

a)  $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

b)  $B_{\alpha, \beta} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$