Álgebra Linear – 2009/2010 – 2º semestre

Folha nº 2 – Exercícios sobre os capítulos 2 e 3: Sistemas de equações lineares e determinantes

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$.

a. Determine os valores de α para os quais A é invertível.

b. Considere $\alpha = 4$. Calcule o determinante da matriz $C = 2A^{-1}$.

c. Discuta, em função de α e de β, o sistema $AX = B$.

2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

a. Discuta o sistema $AX = B$ em função dos valores de a e de k.

b. Calcule o determinante da seguinte matriz C:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Considere o sistema:

$$(S) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = a \\ x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + kx_4 = b \end{cases}, \text{ com } a, b, k \in \mathbb{R}.$$

a. Determine os valores de a, b e k para os quais o sistema (S) é possível.
b. Determine as soluções do sistema homogéneo associado a (S) para $k = 2$.

4. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 5 & a \\ 8 & 1 & 4 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

a. Discuta o sistema $AX = B$ em função dos valores de a e de k.

b. Resolva o sistema $AX = B$ para $a = 2$ e $k = -1$.

5. Seja o sistema $AX = B$ com 4 equações a 5 incógnitas, possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 2. Indique, justificando, a característica da matriz A.

6. Seja o sistema $AX = B$, onde A é uma matriz quadrada de ordem n que verifica: $A = A^2$. Sabendo que $X^{(1)}$ e $X^{(2)}$ são soluções do sistema $AX = B$, prove que $X^{(0)} = AX^{(1)} - X^{(2)}$ é solução do sistema homogéneo associado ao sistema $AX = B$.

7. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e invertível. Prove que $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$.

8. Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n. Sabendo que: $|A + B| = 2$, $|C| = 3$ e $XA + XB = C$, determine a matriz X e calcule $|X|$.