

Semana 8: Cap. 6 – Diferenciais, Funções Compostas, R. de l'Hôpital

## 1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Seja  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ , e  $h(x) = \sin x$ . Determine o domínio e contra-domínio das seguintes funções:

a)  $f \circ g$     b)  $f \circ h$     c)  $h \circ f$     d)  $h \circ f \circ g$     e)  $f \circ h \circ f \circ g$

1.2. Calcule o diferencial das seguintes funções em ordem à respectiva variável:

a)  $x^5 + 2x^4 + 1$     b)  $-\sqrt{u}$     c)  $e^y$     d)  $\ln z$     e)  $\frac{1}{x}$     f)  $\sin u$     g)  $\frac{\sin x}{\cos x}$ .

1.3. Derive as seguintes funções em ordem a  $x$ :

a)  $(5x^{70} + 3x + 1)^2$     b)  $(5x^2 + 3x + 1)^{70}$     c)  $\cos(3x^5 - x)$     d)  $e^{-\frac{x}{2}}$   
e)  $\sqrt{x-3}$     f)  $\frac{1}{\ln x}$     g)  $e^{\sin x}$     h)  $x + \sqrt{x^2 - 1}$   
i)  $\ln(\sin x)$     j)  $\ln(x^2 + 1)$     k)  $\ln^4(\sqrt{1-x^2})$     l)  $e^{-\cos(\sqrt{x^4+x^2+1})}$

1.4. Calcule os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{e^{\sin x} - e^{\cos x}}{\sin x - \cos x}$     c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^2}{e^{2x-1} - 4x^2}$   
d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$     e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2}$     f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

## 2 Problemas e Modelização

2.1. Três empresas de moldes plásticos têm os seguintes custos de produção, que dependem directamente do preço  $p$  do petróleo:

- Empresa 1:  $5p^3 + 2p + 1$
- Empresa 2:  $2p^{3/2} + p$
- Empresa 3:  $\sqrt{p} + \frac{1}{p}$ .

- a) Determine para cada empresa a taxa de variação média do custo de produção dada uma variação do preço do petróleo de 1 €/ℓ para 4 €/ℓ.
- b) Determine para cada empresa a taxa de variação instantânea do custo de produção quando o preço do petróleo é de 1 €/ℓ.
- c) Sabendo que durante um breve período de crise  $t \in [0; 2]$  o preço do petróleo em função do tempo foi:  $p(t) = e^t$ , determine qual a empresa cujo custo de produção estava a crescer mais depressa no instante  $t = 1$ .

**2.2.** Seja a função  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ e^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ , com  $k > 0$ .

- Indique o domínio de  $f$  e esboce o gráfico da função.
- Discuta a continuidade da função no seu domínio.
- Discuta a diferenciabilidade de  $f$  no seu domínio.
- Considere a função  $g(x) = \sqrt{x}$ . Discuta a continuidade e a diferenciabilidade de  $g \circ f$ , e calcule a sua derivada onde possível.

**2.3.** Seja a função  $h(x) = f(x \ln x)$ , com  $f$  diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Sabendo que  $f(0) = \sqrt{3}$  e que  $f'(0) = 2$ , indique a equação da recta tangente ao gráfico da função  $h$  em  $x = 1$ .

### 3 Exercícios adicionais

Derive as seguintes funções em ordem a  $x$ :

- |                                     |                                      |                                |                          |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| a) $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$ | b) $\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^3$ | c) $\sqrt{e^x + 1}$            | d) $e^{-\sqrt{x}}$       |
| e) $e^{x^3} \ln(x^2)$               | f) $\frac{3}{\sqrt{x}}$              | g) $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}$ | h) $e^{x^2}$             |
| i) $\ln(e^{3x} + x^2)$              | j) $e^x \ln x$                       | k) $\sin(2x + 1)$              | l) $xe^x$                |
| m) $\cos x + x \cos^2(x^2)$         | n) $\sin x \cos x$                   | o) $\tan(x^2 + 1)$             | p) $\ln \frac{1+x}{1-x}$ |

**3.1.** Calcule os seguintes limites:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

**3.2.** Indique o valor correcto de  $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^\alpha - 2\alpha(x-1) - 2}{3x^2 - 6x + 3}$ :

- a)  $L = -\alpha - 3$     b)  $L = 0$     c)  $L = \frac{\alpha^2 - \alpha}{3}$     d)  $L$  não existe

**3.3.** Qual o valor do limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(5/x)}{2/x}$  ?

- a)  $\frac{5}{2}$     b) 0    c)  $-\frac{5}{2}$     d)  $\frac{2}{5}$ .

**3.4.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções diferenciáveis em  $\mathbb{R}$  tais que  $h(x) = f[g(x)]$ . Sabendo que  $f(-1) = 2$ ,  $f'(-1) = 1/3$ ,  $g(3) = -1$ , e  $g'(3) = -4$ , indique a equação da recta tangente ao gráfico da função  $h$ , em  $x = 3$ :

- a)  $y = -\frac{4}{3}x + 2$     b)  $y = -\frac{4}{3}x + 6$     c)  $y = -4x + 2$     d)  $y = -x + 5$

**3.5.** Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

**Secção 6.2:** Exercícios 5 e 7.