Matemática I – 2º Semestre 2009/10
Ficha de exercícios

Semana 9: Cap. 6 – Elasticidade, Derivação Implícita, Função Inversa

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Calcule a elasticidade em ordem a x de cada uma das seguintes funções:
a) e^x b) $e^{\lambda x}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ c) $\dfrac{1}{x}$ d) $\cos(x^2)$.

1.2. Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^k h(x)$, com $k \in \mathbb{R}$ e h função real diferenciável no seu domínio. Calcule $El_x f(x)$.

1.3. Seja f uma função diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ tal que: $2x^2 + 6xf(x) + [f(x)]^2 = 18$. Calcule $\dfrac{df(x)}{dx}$ e $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

1.4. Para cada uma das seguintes funções, discuta em que intervalos são invertíveis, indique a sua função inversa e esboce o respectivo gráfico:
a) $\ln x$ b) x^2 c) $\dfrac{1}{x}$ d) $\sin x$ e) $\tan x$.

1.5. Calcule, através do Teorema da Derivada da Função Inversa, a derivada no ponto 1 (caso exista) das funções inversas obtidas no exercício 1.4.

1.6. Seja a função $f(x) = x^2e^x$.
a) Determine os intervalos em que f admite inversa.
b) Seja $g(y)$ a função inversa de $f(x)$ e x_0 um ponto onde existe $f'(x_0) \neq 0$. Calcule a derivada de g no ponto $y_0 = f(x_0)$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Dada uma variação Δx da sua variável x, a função sofre uma variação $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Demonstre que $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{f(x)} f'(x)$.

2.2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ funções diferenciáveis no seu domínio. Definindo $u = g(x)$, mostre que $El_x f[g(x)] = El_u f(u) \cdot El_x u$.

2.3. Seja f uma função real injectiva em $I \subseteq \mathbb{R}$, e $g = f^{-1}$. Escreva a igualdade que indica a relação entre f e g.

3 Problemas e Modelização

3.1. Numa fábrica de chocolate em pó, o custo de produção f do chocolate, expresso em €/kg, depende do preço x do cacau, também em €/kg, da seguinte forma: $f(x) = x^2 + 3$, definido para $x \geq 0$. Considere um cenário em que o preço do cacau mudou de 1 €/kg para 2 €/kg. Responda às seguinte perguntas (indicando as unidades adequadas):
a) Qual foi a variação absoluta do preço do cacau?
b) Qual foi a variação absoluta do preço do chocolate?
c) Qual foi a variação relativa do preço do cacau?
d) Qual foi a variação relativa do preço do chocolate?
e) Qual foi a taxa de variação absoluta do preço do chocolate face ao aumento do preço do cacau.
f) Qual foi a taxa de variação relativa do preço do chocolate face ao aumento do preço do cacau.
g) Considere agora um acréscimo infinitesimal dx no preço x do cacau. Calcule a taxa de variação absoluta e a taxa de variação relativa (elasticidade) do preço do chocolate face a este aumento infinitesimal do preço do cacau.

3.2. Imagine que o consumo de gasolina c de um automóvel depende da sua velocidade v da seguinte forma: $c(v) = v^3 + 2v + 5$ (naturalmente, temos $v \geq 0$).
a) Se o condutor duplicar a velocidade, como varia o consumo de gasolina?
b) Seja f a função que dado o consumo de gasolina nos indica a velocidade do veículo: isto é, a função tal que $f[c(v)] = v$. Calcule $f'(5)$, justificando cuidadosamente a sua resposta.

3.3. Indique a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x)$, definida implicitamente pela equação $\sin[xf(x)] = f(x)$, no ponto $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

3.4. Seja $g(x) = f[xg(x)]$ uma função definida implicitamente em $\mathbb{R}$. Sabendo que $f'[g(1)] = 2$, qual o valor de $g'(1)$?

3.5. Seja a função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = x^x$.
a) Trata-se de uma função exponencial? Porquê?
b) Trata-se de uma função polinomial? Porquê?
c) Utilize a identidade $e^{\ln x} = x$ para calcular a derivada da função f em ordem a x.

3.6. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 7.7: Exercícios 2 e 6.

4 Exercícios adicionais

4.1. Indique o valor correcto de $L = \lim_{x \to 0^+} x^{5x}$:

a) L não existe b) $L = 1$ c) $L = +\infty$ d) $L = 0$

4.2. Sabendo que $f(x) = x^3 + 2x - 1$ admite uma função inversa g e que $f(1) = 2$, indique o declive da recta tangente ao gráfico de g no ponto indicado.

4.3. Seja f uma função diferenciável, com $f(x) \neq 0$. Determine a elasticidade em ordem a x das seguintes funções:

a) $x^5 f(x)$ b) $[f(x)]^{3/2}$ c) $x + \sqrt{f(x)}$ d) $\dfrac{1}{f(x)}$.

4.4. Derive as seguintes funções:

a) $\tan^2(\arcsin x)$ b) $\arctan\left(x^2 - 1\right)$ c) $x^2 \arcsin x$ d) $\frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right)$.

4.5. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):

Secção 7.7: Exercícios 5 e 9;
Secção 7.1: Exercícios 1, 6, 7, 8 e 10;
Secção 5.3: Exercícios 3, 5, 7, 9 e 11;
Secção 7.3: Exercícios 1 a 3.