Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº3

1. Seja a_n uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Prove que a série $\sum a_n^2$ também é absolutamente convergente. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.

2. Seja u_n o termo geral de uma sucessão convergente e tal que

$$u_n u_{n+1} < 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Indique, justificando qual o limite de u_n.

   (b) Prove que se fôr verificada a condição $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ é convergente estando a sua soma compreendida entre u_1 e $u_1 + u_2$.

3. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por:

$$f_n(x) = \frac{nx^2 + 1}{nx^4 + 2n}.$$

   Diga, justificando, se a sucessão (f_n) converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

4. Considere a sucessão de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n+1}.$$

   (a) Mostre que a sucessão de funções converge pontualmente em $[0,1]$ e determine a função limite.

   (b) Diga, justificando, se a sucessão (f_n) converge uniformemente em $[0,1]$.

5. Estude, quanto à convergência, pontual e uniforme as seguintes sucessões de funções nos intervalos considerados:

   (a) $f_n(x) = \dfrac{nx}{n + x^2}$, em $]-1,1[$ e em $\mathbb{R}$;

   (b) $g_n(x) = \dfrac{2n^2x^2}{1 + 2n^2x^2}$, em $[-3,+\infty[$ e em $[3,+\infty[$;

   (c) $f_n(x) = \dfrac{ne^x}{1 + ne^x}$, em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$;

6. Dada a sucesão $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, mostre que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right) \neq \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) dx.$$

   Que conclusão pode tirar sobre a eventual convergência uniforme de $f_n(x)$ no intervalo $[0,1]$?

7. Seja f_n a sucessão de funções definida por

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}.$$

   (a) Calcule o limite pontual de f_n no intervalo $[0,1]$ e indique, justificando, se a convergência é uniforme nesse mesmo intervalo.

   (b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$.

8. Sendo $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por

$$f_n(x) = n\sin\left(\frac{x+1}{n}\right),$$

   calcule o seu limite pontual e prove que a convergência não é uniforme em $\mathbb{R}$.

9. Estude, quanto à convergência uniforme as seguintes séries reais, nos conjuntos indicados:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ em $[-1,1]$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x(1-x)^n$ em $[0,1]$;