Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº7

1. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ função tal que $f(x, y) = (x^2 + y)\sin(\frac{1}{xy})$.
   (a) Justifique que não existe $\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y)$ e não existe $\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y)$.
   (b) Prove que existe limite de f no ponto $(0, 0)$ e conclua que pode existir limite de uma função num ponto sem que existam os limites iterados.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \begin{cases} k + e^{-\frac{1}{|x^2+y^2-4|}} & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \\ 5 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$
   Determine o valor de k de modo a que a função f seja contínua em $\mathbb{R}^2$.

3. Verifique se as seguintes funções podem ser prolongáveis por continuidade a $\mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) = \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}; \quad g(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}; \quad h(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y};$$
   Em caso afirmativo, indique, para cada uma os seus prolongamentos contínuos a $\mathbb{R}^2$.

4. Dê um exemplo, caso exista, de uma função contínua $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:
   (a) $f\left(\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}\right) = [0, 2]$;
   (b) $f\left(\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}\right) =]0, 4]$;
   (c) $f\left(\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 4\}\right) =]0, 4]$;

5. Determine os pontos de descontinuidade das funções assim definidas:
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ 1+y & \text{se } x = 0 \\ y & \text{se } x = 1 \end{cases}$
   (b) $f(x, y) = (y^2 - 4y + 3)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

6. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x(2-\sin(x))}{1-|y|}}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Indique, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,1)$.

7. Estude a continuidade uniforme das seguintes funções nos conjuntos indicados:

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ em $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4\}$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ nos conjuntos A e B assim definidos:
$A = \{(x,y) : y > 0\}$ e $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1 \,\mathrm{e}\, 1 \leq y \leq 2\}$;