Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº8

1. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem para **uma** das seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} sen(x.y), & \text{se } x \neq 0, \\ y^2 - y, & \text{se } x = 0. \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx, & \text{se } y \neq x, \\ x, & \text{se } y = x. \end{cases}$

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } xy = 0, \\ \sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (b) Prove que não existe $f'_v(0,0)$, qualquer que seja o vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 v_2 \neq 0$.

   (c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?

3. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } xy = 0, \\ x+y, & \text{se } xy \neq 0. \end{cases}$$

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e $f'_{(1,1)}(0,0)$.

   (b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, indicando em que domínio é que estão definidas.

   (c) Que pode concluir sobre a diferenciabilidade da função f no ponto $(0,0)$ a partir do resultado obtido na alínea (a)? Justifique.

4. Seja f uma função real diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y) = f(y,x), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Prove que, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ se tem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(b,a).$$

   (b) Calcule $f'_{(1,-1)}(c,c)$, para $c \in \mathbb{R}$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{se}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f no seu domínio.

(b) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

(c) Calcule o gradiente de f no ponto $(1,1)$.

(d) Sendo $\overrightarrow{u} = (-1,1)$, calcule $f'_{\overrightarrow{u}}(1,1)$.

6. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e diferenciabilidade.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - x^3 + 2(y-1)^2 - x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,1) \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Indique segundo que vectores $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ existe a derivada $f'_{\overrightarrow{v}}(0,1)$ e, nos casos em que exista, calcule-a.

(c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,1)$.