Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº9

1. Sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ funções tais que

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z) \quad \text{e} \quad g(u, v) = (u + v, u^2 - v^2, u^2 - 2v),$$

calcule a matriz jacobiana de $f \circ g$.

2. Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $g(x, y, z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1 - xyz^2)$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(e^3, 2)$ é dada por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(1, -1, 1)$.

3. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{5/3}y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0)\ . \end{cases}$$

e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(t) = (t, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere ainda a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(t) = f \circ g(t) = f(t, t)$.

   (a) Indique, para cada $t \in \mathbb{R}$, o valor de $F(t)$.

   (b) Calcule o valor de $F'(0)$:

      i) utilizando a expressão de $F(t)$ obtida na alínea anterior;

      ii) através da regra da derivação da função composta;

   (c) O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados em i) e em ii)?

4. Sejam $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = g\left(\frac{1}{1 + e^{xy}}, cos(\frac{x^2}{y^2})\right).$$

Calcule, em função das derivadas parciais de g, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$. Considere $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $g(x, y, z) = (f(x^2) + f(x^2 + y^2), f(xyz))$.

   (a) Calcule a matriz jacobiana de g.

(b) Sendo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função tal que $h(x, y) = e^{3-x^2+yx}$, justifique que $h \circ g$ é diferenciável no ponto $(1, 1, 2)$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ nesse ponto.

6. Sejam f, g tais que $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e seja $a \in D$ tal que f e g são funções diferenciáveis em a.

   (a) Seja $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $\tau(x, y) = xy$. Prove, utilizando a definição de diferenciabilidade num ponto, que τ é diferenciável em todo o ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e que a matriz jacobiana de τ no ponto (x_0, y_0) (isto é, o gradiente de τ no ponto (x_0, y_0)) é $J_\tau(x_0, y_0) = [y_0 \;\; x_0]$.

   (b) Considere agora a função $\rho : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ tal que, para cada $\overline{x} \in D$, $\rho(\overline{x}) = (f(\overline{x}), g(\overline{x}))$ e justifique que ρ é uma função diferenciável no ponto $a \in D$.

   (c) Por fim, note que para todo $\overline{x} \in D$ temos

   $$f \times g(\overline{x}) = f(\overline{x})g(\overline{x}) = \tau \circ \rho(\overline{x})$$

   e utilize o teorema da derivada da função composta para concluir que:

   sendo $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis no ponto $a \in D$ então fg é ainda diferenciável em a e $(fg)'(a) = g(a)f'(a) + f(a)g'(a)$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = f(xy)$. Prove que

   $$x\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial y}.$$