Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Ficha de exercícios nº10

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x,y) = f(x + \lambda y) + f(x - \lambda y)$, para $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Prove que
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

2. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que
$$h(x,y) = f(xy) - g\left(\frac{y}{x}\right).$$
Mostre que, no domínio em que está definida, se tem
$$y^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = x\frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial h}{\partial y}.$$

3. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função $f(x,y) = sen(x)sen(y)$ no ponto $(0,0)$ com resto de Lagrange.

4. Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 para a função $f(x,y) = \dfrac{y}{y+x}$ no ponto $(1,0)$ com resto de Lagrange.

5. Determine os extremantes e correspondentes extremos das funções assim definidas:
   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^y$;
   (b) $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$;
   (c) $f(x,y,z) = xy + xz$;
   (d) $f(x,y) = xsen(y)$;
   (e) $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$;

6. Estude se o ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é ou não extremante da função $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2x + y^4 + z^2$.

7. Considere $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Determine, em função de α, os pontos críticos da função f definida por:
$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - \alpha y^2 + x}{1 + z^2},$$
indicando, para cada um deles se é um maximizante, minimizante ou ponto de sela.

8. Determine, em função de β, os extremantes da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y, z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x.$$

9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x, y) = e^{xy+xy^2+x^2}.$$

   Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

10. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4$.

    (a) Prove que os pontos críticos de f são $(1, -1), (-1, 1)$ e $(0, 0)$.

    (b) Indique, justificando, se os pontos $(1, -1)$ e $(-1, 1)$ são extremantes da função f e, caso sejam, determine o valor do respectivo extremo.

    (c) Prove que o ponto $(0, 0)$ não é extremante da função f.