INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

CURSO DE MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA I

ELEMENTOS DE ANÁLISE REAL

Volume 1

Por : ***Gregório Luís***

PREFÁCIO

O presente texto destina-se a apoiar a disciplina de Análise Matemática I do curso de Matemática Aplicada à Economia e Gestão do Instituto Superior de Economia e Gestão.

Parte significativa dos assuntos incluídos neste texto integram os programas do Ensino Secundário. A abordagem feita nesses programas é no entanto quase exclusivamente operacional, sendo os conceitos e a fundamentação da maior parte das regras de cálculo apresentados de forma meramente intuitiva, em que o uso frequente da calculadora substitui o rigor das definições e das demonstrações para evitar aquilo a que os pedagogos chamam a *excessiva formalização da análise* .

Impõe-se assim que tais temas sejam retomados no primeiro ano dos cursos superiores, para uma apresentação mais rigorosa e para serem complementados com alguns desenvolvimentos ainda não objecto de estudo anterior.

Para além da abordagem teórica dos temas em estudo, o texto inclui ainda, no final de cada capítulo, exercícios e respectivas soluções. Os exercícios marcados com * são de resolução mais difícil podendo ser ignorados pelos alunos médios. Aconselha-se contudo a sua resolução aos alunos mais interessados.

A maior parte dos exercícios incluídos têm sido utilizados nos últimos 30 anos nas aulas práticas das disciplinas de Matemática dos primeiros anos dos cursos ministrados no Instituto Superior de Economia e Gestão, tornando-se impossível referenciar a sua proveniência ; para além destes há ainda exercícios originais e outros que foram retirados ou adaptados da bibliografia indicada no final.

Cada capítulo tem uma numeração independente para os pontos, teoremas e propriedades. Nas referências feitas no texto subentende-se que os pontos, teoremas e propriedades pertencem ao próprio capítulo, salvo quando expressamente seja indicado o contrário .

Este prefácio não poderia terminar sem uma referência aos professores que ao longo dos últimos 60 anos contribuiram decisivamente para a tradição que o ensino da matemática tem nesta escola de economia e gestão. Correndo o risco de injustamente esquecer alguns, citam-se aqui os Profs. Mira Fernandes, Bento Caraça, Leite Pinto, Vicente Gonçalves, José Ribeiro de Albuquerque e Bento Murteira.

Lisboa, 22 de Maio de 2002

António Gregório Luís

ÍNDICE

CAPÍTULO IV – Séries de termos reais

CAPÍTULO V – Séries de potências de termos reais

CAPÍTULO VI – Funções reais de variável real. Limites e continuidade

CAPÍTULO VII – Cálculo Diferencial em **R**

CAPÍTULO VIII – Aproximação polinomial de funções

CAPÍTULO I

NÚMEROS REAIS

1. Introdução

Admite-se o leitor já familiarizado com as propriedades básicas do corpo ordenado e completo dos números reais, razão pela qual nos limitaremos a apresentar alguns tópicos que eventualmente poderão não ter sido objecto de estudo anterior.

Assim, em primeiro lugar discutiremos os conceitos de supremo e ínfimo de um subconjunto de **R** e faremos referência ao chamado axioma do supremo, bem como a algumas consequências que dele decorrem.

Apresentaremos em seguida alguns subconjuntos importantes de **R**, a saber os conjuntos **N** (dos números naturais), **Z** (dos números inteiros) e **Q** (dos números racionais) com os quais supostamente o leitor já conviveu, abordando em especial alguns aspectos em que eventualmente o convívio não foi tão íntimo quanto desejável.

Abordaremos finalmente algumas questões importantes, como é o caso da representação decimal dos números reais, de que o leitor, embora possa estar familiarizado com os aspectos práticos, quase certamente desconhece a fundamentação teórica.

2. Supremo e ínfimo de um conjunto. Axioma do supremo

Sendo $A \subseteq \mathbf{R}$ não vazio , chama-se *majorante* de A a qualquer real $k \in \mathbf{R}$ tal que : $\forall\, x \in A \ \ ,\ x \leq k$. Claro que , sendo k majorante do conjunto A, qualquer $k^* > k$ é igualmente um majorante do mesmo conjunto. Um conjunto que admite majorantes diz-se *majorado*, ou *limitado superiormente*; conjunto não majorado diz-se também *não limitado superiormente* ou *ilimitado superiormente*.

Constitui propriedade fundamental do conjunto **R** a seguinte, usualmente conhecida por *axioma do supremo* (*axioma da continuidade* ou *da completude*) : Qualquer subconjunto não vazio de **R** que seja majorado admite um majorante menor que todos os demais, o qual se designa por *supremo* do conjunto.

Dado um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ não vazio, chama-se *minorante* de A a qualquer real $k \in \mathbf{R}$ tal que : $\forall\, x \in A \ \ ,\ x \geq k$. Claro que , sendo k minorante do conjunto A, qualquer $k^* < k$ é igualmente um minorante do mesmo conjunto. Um conjunto que admite minorantes diz-se *minorado*, ou *limitado inferiormente*; conjunto não minorado diz-se também *não limitado inferiormente* ou *ilimitado inferiormente*.

Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ não vazio que seja simultaneamente majorado e minorado diz-se *limitado* (relativamente à ordem existente em **R**).

Com base no axioma do supremo pode demonstrar-se a seguinte:

P1 : *Qualquer subconjunto não vazio de* **R** *que seja minorado admite um minorante maior que todos os outros, o qual se designa por ínfimo do conjunto*

Demonstração : Sendo $A \subseteq \mathbf{R}$ não vazio e minorado, considere-se o conjunto $A^* = = \{ y : y = - x \wedge x \in A \}$. É fácil concluir que, dado $k \in \mathbf{R}$,

$$\forall x \in A \ , \ x \geq k \ \Leftrightarrow \ \forall \ y = - x \in A^* \ , \ y \leq - k \ ;$$

ou seja, A é minorado por k se e só se A^* for majorado por $- k$. É agora fácil concluir que o simétrico do supremo de A^* (que existe pelo axioma do supremo) é o ínfimo de A, ficando portanto assegurada a existência deste .

Sendo $\lambda = Sup\, A$ e $\mu = Inf\, A$, têm-se as seguintes propriedades quase evidentes, cuja justificação fica ao cuidado do leitor :

Para o supremo : 1) $\forall x \in A \ , \ x \leq \lambda$; 2) $\forall \ \varepsilon > 0 \ , \exists \ x_\varepsilon : \ \lambda - \varepsilon < x_\varepsilon \leq \lambda$;
Para o ínfimo : 1) $\forall x \in A \ , \ x \geq \mu$; 2) $\forall \ \varepsilon > 0 \ , \exists \ x_\varepsilon : \ \mu \leq x_\varepsilon < \mu + \varepsilon$.

3. Números naturais, inteiros, racionais e irracionais

3.1 - Números naturais

Um subconjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se indutivo se só se , $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$. São exemplos de conjuntos indutivos $A = [\ 1, +\infty\ [$ e o próprio **R** ; são exemplos de conjuntos não indutivos e $A =]\,-1\ , 2]$ e o conjunto $\mathbf{R}^-$ dos reais negativos.

É fácil ver que , dada uma classe $\{S_\alpha\}$ de conjuntos indutivos , então o conjunto $S = \bigcap_\alpha S_\alpha$ é também um conjunto indutivo: com efeito,

$$x \in S \Rightarrow \ \forall \ \alpha , \ x \in S_\alpha \Rightarrow \ \forall \ \alpha \ , \ x + 1 \in S_\alpha \Rightarrow \ x + 1 \in S \ .$$

Considerando agora a intersecção de todos os conjuntos indutivos a que pertence o número 1, obtém-se um subconjunto de **R** que será designado por *conjunto dos números naturais* e se representará por **N** . A partir das propriedades dos números reais e tendo em conta a definição dada do conjunto **N** , podem demonstrar-se diversas propriedades dos números naturais. Sem qualquer preocupação de ser exaustivo e mais a título de exemplo, demonstram-se a seguir algumas delas que o leitor já conhece.

P2 : *Um é o menor número natural*

Demonstração : Por construção do conjunto dos números naturais tem-se que $1 \in \mathbf{N}$ (**N** é uma intersecção de conjuntos tais que a todos eles pertence o real 1) . Para ver que se trata efectivamente do menor número natural, basta notar que um dos conjuntos indutivos a considerar na intersecção que dá o conjunto **N** é precisamente $A = [\ 1\ , +\infty\ [\ = = \{ x : x \in \mathbf{R} \wedge x \geq 1 \}$.

P3 : *Qualquer número natural* <u>n</u> *tem um único sucessor* $n^+ = n{+}1$ *que é também um número natural*

<u>Demonstração</u> : Que n^+ é natural resulta imediatamente de ser $n \in \mathbf{N}$ e **N** um conjunto indutivo. Que n^+ é único resulta da sua definição e da unicidade da adição em **R** .

P4 : *Números naturais diferentes têm sucessores diferentes*

<u>Demonstração</u> : Bastará provar que $n^+ = m^+ \Rightarrow n = m$. Ora,

$$n^+ = m^+ \;\Rightarrow\; n + 1 = m + 1 \Rightarrow\; n = m\ ,$$

sendo a segunda implicação uma propriedade conhecida da adição em **R** (lei do corte).

P5 : *Um não é sucessor de nenhum número natural*

<u>Demonstração</u> : Se fosse $1 = n^+ = n + 1$, com certo $n \in \mathbf{N}$ esse n seria o real 0 e então, contrariamente ao estabelecido na propriedade **P2** o menor natural não seria 1 .

P6 : : *Se* $A \subseteq \mathbf{N}$ *é indutivo e* $1 \in A$, *então* $A = \mathbf{N}$

<u>Demonstração</u> : Como A é indutivo e $1 \in A$, este conjunto é um dos que entram na intersecção de conjuntos indutivos que permite obter o conjunto **N**. Então, $\mathbf{N} \subseteq A$ e como por hipótese $A \subseteq \mathbf{N}$, resulta $A = \mathbf{N}$.

É esta propriedade que fundamenta o chamado método de demonstração por *indução finita*. Sendo $C(n)$ uma condição e n uma variável natural , admita-se que a condição se transforma numa proposição verdadeira para $n = 1$ e que,

$$C(n)\ \textit{verdadeira} \;\Rightarrow\; C(n{+}1)\ \textit{verdadeira}\ ;$$

então, designando por A o conjunto dos valores n que tornam verdadeira a condição $C(n)$, tem-se : $1 \in A$ e A indutivo , logo $A = \mathbf{N}$, ou seja, a condição torna-se uma proposição verdadeira para todo o $n \in \mathbf{N}$.

P7 : *O conjunto* **N** *não é majorado*

<u>Demonstração</u> : Se **N** fosse majorado, como é não vazio, teria supremo $s = \operatorname{Sup} \mathbf{N}$. Então :

$$1)\ \forall\, n \in \mathbf{N}\ ,\ n \leq s\ \ ;\ \ 2)\ \forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{N}\ :\ s - \varepsilon < n_\varepsilon \leq s\ .$$

Escolhido $\varepsilon = 1$, existiria $n_1 \in \mathbf{N}$ tal que $s - 1 < n_1 \leq s$, donde resultaria $n_1 + 1 > s$ e, portanto, s não poderia ser o supremo de **N** (seria excedido pelo sucessor de n_1).

P8 : *Dados* $a\,,\, b \in \mathbf{R}$ *e sendo* $a > 0$ *: 1) Existe* $n \in \mathbf{N}$ *tal que* $n\,a > b$ *; 2) Existe* $m \in \mathbf{N}$ *tal que* $m\,a \geq b$ (Propriedade Arquimediana)

Demonstração : Basta provar 1), porque obviamente 1) $\Rightarrow$ 2). Se não existisse $n \in \mathbf{N}$ tal que $n\,a > b$, seria $n\,a \leq b$ para todo o $n \in \mathbf{N}$; dai resultaria, por ser $a > 0$, $n \leq b/a$ para todo $n \in \mathbf{N}$ e então **N** seria majorado, contrariamente ao estabelecido na propriedade **P7**.

P9 : *Qualquer número natural maior que* 1 *é sucessor de um e de um só número natural*

Demonstração : a) Provemos em primeiro lugar que se $m \in \mathbf{N}$ e $m > 1$, então m é sucessor de certo natural $p \in \mathbf{N}$. Para tal bastará provar que se $m > 1$ não é sucessor de nenhum $p \in \mathbf{N}$, então $m \notin \mathbf{N}$.

Considere-se o conjunto $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{m\}$ e vejamos que : 1) $1 \in \mathbf{N}^*$, porque $1 \in \mathbf{N}$ e $m \neq 1$; 2) $\mathbf{N}^*$ é indutivo, porque dado $p \in \mathbf{N}^*$ tem-se $p \in \mathbf{N}$ e $p \neq m$, logo $p+1 \in \mathbf{N}$ e $p+1 \neq m$ (se fosse $p+1 = m$, m seria sucessor de certo natural $p \in \mathbf{N}$), ou seja, $p+1 \in \mathbf{N}^*$. Mas sendo $\mathbf{N}^*$ indutivo e $1 \in \mathbf{N}^*$, tem-se $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}$ (propriedade **P6**) e então $m \notin \mathbf{N}$ como se queria provar.

b) Se certo natural $m > 1$ fosse sucessor dos naturais n e p distintos tal violaria o disposto na propriedade **P4**, ficando assim provada a segunda parte da demonstração (qualquer natural $m > 1$ é sucessor de um só natural).

P10 : *Entre um número natural* $\underline{n}$ *e o seu sucessor* $n^+ = n+1$ *não existe qualquer natural*

Demonstração : Vai fazer-se a demonstração por indução finita. Para $n = 1$ a propriedade é obviamente verdadeira: se entre 1 e $1^+ = 1 + 1$ existisse um certo natural p, ter-se-ia $1 < p < 1 + 1$; pela propriedade anterior, p seria sucessor de certo natural n, ou seja, $p = n + 1$ e então $n + 1 < 1 + 1$, donde resultaria $n < 1$; mas, face ao estabelecido na propriedade **P2**, não pode existir natural inferior a 1 .

Admita-se a propriedade válida para o natural n (hipótese de indução) e vejamos que é igualmente válida para $n + 1$. Pela hipótese de indução , nenhum natural se encontra entre n e $n + 1$; se houvesse um natural p entre $n + 1$ e $(n + 1) + 1$, ou seja, $n + 1 < p < (n + 1) + 1$, seria obviamente $p > 1$ e, portanto, p seria sucessor de certo natural k ($p = k + 1$) ; então, ter-se-ia, $n + 1 < k + 1 < (n + 1) + 1$, donde $n < k < (n + 1)$, contrariamente ao estabelecido na hipótese de indução.

Como consequência das propriedades anteriores, conjunto **N** é formado pelos números : 1 , $1^+ = 1 + 1 = 2$, $2^+ = 2 + 1 = 3$, ... ; e não existem naturais menores que 1 nem compreendidos entre qualquer n e o seu sucessor $n^+ = n + 1$.

Finalmente, apresenta-se uma outra propriedade dos números naturais usualmente conhecida por *teorema da boa ordenação* .

P11 : *Qualquer conjunto não vazio* $A \subseteq \mathbf{N}$ *tem mínimo (ou seja, existe sempre um natural* $m \in A$ *tal que,* $\forall\, x \in A$, $x \geq m$ *)*

Demonstração : Seja A um subconjunto não vazio de **N** e admita-se por absurdo que A não tem mínimo. Claro que $1 \notin A$, caso contrário, 1 seria o mínimo de A .

Seja S o conjunto de todos os naturais n tais que $n < p$ para todos os naturais $p \in A$. Claro que $1 \in S$, porque $p > 1$ qualquer que seja $p \in A$ (uma vez que 1 não pertence a A e 1 é o menor número natural) . Vejamos seguidamente que S é indutivo : se $k \in S$, também $k+1 \in S$. Se $k+1$ não pertencesse a S , para certo $p_1 \in A$ seria $p_1 \leq k + 1$; uma vez que estamos a admitir que A não tem mínimo, existiria $p_2 \in A$ tal que $p_2 < p_1$, donde resultaria $p_2 < k + 1$ o que significaria ser $p_2 \leq k$ (entre k e $k+1$ não há naturais), o que contraria a hipótese inicialmente admitida de ser $k \in S$.

Sendo S indutivo e $1 \in S$, tem-se $S = \mathbf{N}$ (propriedade **P6**) . Como A é não vazio existe pelo menos $\alpha \in A$; esse α seria um certo natural (porque A é por hipótese um subconjunto de **N**) , logo pertenceria a $S = \mathbf{N}$. Por definição do conjunto S , ter-se-ia $\alpha < p$ para todos os naturais $p \in A$; um desses $p \in A$ é precisamente o α e então deveria ser $\alpha < \alpha$, conclusão absurda que resulta de se ter admitido que o conjunto A não tem mínimo.

O teorema da boa ordenação está demonstrado.

3.2 - Números inteiros e racionais

O conjunto **Z** dos números inteiros é, por definição, o conjunto,

$$\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup \mathbf{N}^* \cup \{0\} ,$$

em que **N** é o conjunto dos números naturais e **N*** o conjunto dos simétricos dos naturais.

O conjunto **Q** dos números racionais é o conjunto de todos os números reais que são quocientes de dois inteiros :

$$\mathbf{Q} = \{ r : r = m/n \;\wedge\; m, n \in \mathbf{Z} \;\wedge\; n \neq 0 \} .$$

Tem-se evidentemente $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$, sendo estritas as inclusões, ou seja, há inteiros que não são números naturais e há racionais que não são inteiros como facilmente pode verificar-se. Quanto à eventual inclusão estrita de **Q** em **R** (existência de reais que não são racionais), a questão fica em aberto para tratamento posterior.

Vamos estudar seguidamente um teorema que permitirá concluir que entre quaisquer dois reais existe uma infinidade de números racionais.

P12 : *Em qualquer intervalo aberto* $]\, a , b \,[\;\subset \mathbf{R}$ *, com* $a < b$ *, existe pelo menos um número racional*

<u>Demonstração</u> : a) Vamos considerar primeiro o caso em que $b > 0$, sendo depois fácil provar o caso em que $b \leq 0$.

Seja $c = b - a > 0$. Como **N** é não majorado, existe um $m \in \mathbf{N}$ que verifica ao mesmo tempo as desigualdades $m > 1/c$ e $m > 2/b$, ou seja, $c > 1/m$ e $m > 2/b$.

Por ser $1/m$ positivo , a propriedade **P8** (propriedade arquimediana) , garante a existência de um natural k tal que $k.(1/m) \geq b$ e, por ser $m \geq 2/b$, claro que $k \geq 2$; dos números naturais k que satisfazem a desigualdade $k.(1/m) \geq b$, escolha-se o menor deles e designe-se por h (este mínimo existe pelo teorema da boa ordenação de **N**) , tendo-se então que, $h.(1/m) \geq b$. Claro que $h \geq b.m \geq 2$ e então h -1 é igualmente um número natural ; se fosse $(h-1).(1/m) \geq b$, então h -1 seria um dos naturais k e, portanto, h não poderia ser o mínimo desses k . Em conclusão,

$$h.(1/m) \geq b \quad \text{e} \quad (h-1).(1/m) < b \ ;$$

vejamos que também se tem $(h-1).(1/m) > a$, o que provará a existência de um número racional $r = (h-1).(1/m) \in \,]\, a , b\, [$, como se pretendia . Se fosse $(h-1).(1/m) \leq a$, seria ,

$$c = b - a \leq b - (h-1).(1/m) = b - h.(1/m) + (1/m) \leq 1/m \ ,$$

o que contradiz a condição definidora do m ($c > 1/m$).

b)Vejamos agora o caso em que $b \leq 0$. Neste caso o intervalo $]\, -b , -a\, [$ encontra-se nas condições consideradas na alínea a), pois,

$$a < b \leq 0 \ \Rightarrow 0 \leq -b < -a \ ;$$

existe portanto um racional r tal que $-b < r < -a$ e então o racional $-r$ pertencerá ao intervalo $]\, a , b\, [$.

<u>**Corolário**</u> **:** *Em qualquer intervalo* $]\, a , b\, [\subset \mathbf{R}$ *, com* $a < b$*, existe uma infinidade de números racionais*

<u>Demonstração</u> : Dado o intervalo $]\, a , b\, [\subset \mathbf{R}$, com $a < b$, o teorema garante a existência de pelo menos um racional r_1 nesse intervalo. Admita-se por absurdo que apenas um número finito de racionais r_1 , r_2 , ... , r_α, existem no intervalo. Designando por r^* o maior desses finitos r_j , ter-se-ia, $a < r^* < b$; mas então o teorema garantiria a existência de um racional entre r^* e b , racional esse que também pertenceria ao intervalo $]\, a, b\, [$ e seria portanto um dos r_j maior que o respectivo máximo r^*, o que é impossível .

3.3 - <u>Radiciação em R</u>

Seja b um número real positivo. Dado o número natural k , propomo-nos estudar a existência de um número real $\alpha > 0$ tal que $\alpha^k = b$. Como se sabe tal número α , caso exista , é chamado raiz positiva índice k de b representa-se por $\sqrt[k]{b}$. O caso em que $k = 1$ é trivial (obtém-se $\alpha = b$) , bastando portanto considerar o caso em que $k \geq 2$.

A) Estuda-se em primeiro lugar o caso em que $b > 1$. Considere-se o conjunto $A = \{\, x \;:\; x \in \mathbf{R} \;\wedge\; x > 0 \;\wedge\; x^k \leq\; b \,\}$. Claro que A é não vazio (pelo menos $1 \in A$) e, por outro lado, trata-se de um conjunto majorado : tem-se $x \leq b$ para todo o $x \in A$; com efeito , por ser $b > 1$, tem-se que $b = 1 + c$ com $c > 0$ e, portanto, por ser $k > 1$,

$$x > b \;\Rightarrow\; x^k \;>\; b^k = (1 + c)^k \;>\; 1 + k\,c \;>\; 1 + \; c = b \;\Rightarrow\; x \notin A\,.$$

Existe portanto $\alpha = Sup\, A$. Vejamos que não pode ter-se , nem $\alpha^{\,k} < b$ nem $\alpha^{\,k} >\; b$, só restando portanto a hipótese de ser $\alpha^{\,k} = b$ o que provará a existência da raiz $\alpha = \sqrt[k]{b}$.

a) Não pode ter-se $\alpha^{\,k} \;<\; b$. Com efeito se assim fosse, seria b - $\alpha^{\,k} \;>\; 0$ e a propriedade arquimediana (propriedade **P8**) garantiria a existência de um natural n tal que,

$$(\, b - \alpha^{\,k}) \,.\, n \;\geq\; (1{+}\alpha\,)^k - \alpha^{\,k} \quad \text{, ou seja ,} \quad b - \alpha^{\,k} \;\geq\; \frac{(1+\alpha\,)^k \;-\; \alpha^{\,k}}{n} \quad .$$

Então seria,

$$\begin{aligned}(\alpha + 1/n\,)^{\,k} &= \alpha^{\,k} \;+\; C_1^k \,.\, \alpha^{\,k-1} \,.\, (1/n) \;+\; C_2^k \,.\, \alpha^{\,k-2} \,.\, (1/n)^2 \;+ \dots +\; C_k^k \,.\, (1/n)^k \;\;\leq \\ &\leq \alpha^{\,k} + \left[\; C_1^k \,.\, \alpha^{\,k-1} \;+\; C_2^k \,.\, \alpha^{\,k-2} \;+ \dots +\; C_k^k \;\right] . \,(1/n) \;\;= \\ &= \;\alpha^{\,k} + \left[(1+\alpha\,)^{\,k} \;-\; \alpha^{\,k} \;\right] . \,(1/n) \;\;\leq\; \alpha^{\,k} \;+\; b - \alpha^{\,k} = \; b\,;\end{aligned}$$

existiria portanto um real $\beta \;=\; \alpha + 1/n \;\in A$ maior que o supremo deste conjunto o que é impossível.

b) **Não pode ter-se $\alpha^k >\; b$** . Com efeito se assim fosse, seria $\alpha^{\,k}$ **-** $b > 0$ e a propriedade arquimediana (propriedade **P8**) garantiria a existência de um natural n tal que,

$$(\alpha^{\,k} - b) \,.\, n \;\geq\; (1{+}\alpha\,)^k - \alpha^{\,k} \quad \text{, ou seja ,} \quad \alpha^{\,k} - b \;\geq\; \frac{(1+\alpha\,)^k \;-\; \alpha^{\,k}}{n} \quad .$$

Por ser $\alpha = Sup\, A$, existe um certo $t \in A$ tal que α - $1/n < t \leq \alpha$ e, por ser $\alpha \geq 1$ e n natural , tem-se $t > \alpha$ - $1/n \geq 0$; então,

$$t^k > \;(\alpha - 1/n)^k =$$

$$\begin{aligned}&= \alpha^{\,k} \;-\; C_1^k \,.\, \alpha^{\,k-1} \,.\, (1/n) \;+\; C_2^k \,.\, \alpha^{\,k-2} \,.\, (1/n)^2 \;- \dots + (-1)^k \,.\; C_k^k \,.\, (1/n)^k \;\;> \\ &> \;\alpha^{\,k} - \left[\; C_1^k \,.\, \alpha^{\,k-1} \;+\; C_2^k \,.\, \alpha^{\,k-2} \;+ \dots +\; C_k^k \;\right] . \,(1/n) \;\;= \\ &= \alpha^{\,k} - \left[(1+\alpha\,)^{\,k} \;-\; \alpha^{\,k} \;\right] . \,(1/n) \;\;\geq\; \alpha^{\,k} \;-\; \alpha^{\,k} + b = \; b\,;\end{aligned}$$

mas então o referido t , supostamente pertencente a A , verifica a condição $t^k > b$ e, portanto, não pode pertencer a A . Esta contradição resulta de se ter admitido que $\alpha^{\,k} >\; b$.

B) Estuda-se agora com facilidade o caso em que $0 < b < 1$. Neste caso, tem-se $1/b > 1$ e o resultado da alínea **A)** garante a existência de um α positivo tal que $\alpha^k = 1/b$; então o real positivo $\theta = 1/\alpha$ será tal que,

$$\theta^k = 1/\alpha^k = b ,$$

ficando, também neste caso, garantida a existência da raíz positiva de índice k do real b .

C) No caso em que $b = 1$, tem-se $1^k = 1$ qualquer que seja o natural k e fica também garantida a existência da raiz positiva de índice k da unidade.

Continuando a considerar o problema da existência da raiz $\sqrt[k]{b}$, no caso em que $b > 0$, podemos concluir que, para além da raiz positiva cuja existência já demonstramos, existe ainda uma raiz negativa no caso em que o índice k seja par. Com efeito, sendo α a raiz positiva de índice k do real b , caso k seja par existe ainda uma raiz negativa de índice k para o mesmo b que é precisamente o real $-\alpha$: $(-\alpha)^k = (-1)^k . \alpha^k = \alpha^k = b$.

No caso de ser $b = 0$, tem-se evidentemente $\sqrt[k]{0} = 0$.

No caso de ser $b < 0$, se k for ímpar existe uma raiz negativa de índice k do real b : sendo α a raiz positiva de índice k do real $-b > 0$, tem-se , $\alpha^k = -b$ e , portanto , $(-\alpha)^k = (-1)^k . \alpha^k = -\alpha^k = b$, ou seja, neste caso $-\alpha$ será a raiz (negativa) de índice impar k do real negativo b .

Subsiste como impossibilidade o caso em que $b < 0$ e o índice da raiz é par, pois nesse caso a existência da raiz não é permitida pela regra dos sinais da multiplicação.

3.4 - <u>Existência de reais não racionais</u>

Estamos agora em condições de estabelecer a existência de números reais que não são racionais, os quais se designam correntemente por números irracionais.

O primeiro número irracional de que provavelmente se teve conhecimento é o número real $\sqrt{2}$. A demonstração mais antiga conhecida de que o número $\sqrt{2}$ não é racional é atribuída a Euclides (?) e é um modelo de simplicidade. Vejamos como raciocina Euclides para provar que a raiz quadrada de 2 não é racional. Se o fosse, seria representável por uma fracção de termos naturais n/m (porque $\sqrt{2} > 0$ e qualquer racional positivo é o quociente de dois inteiros positivos, ou seja de dois números naturais); e podemos considerar que esta função já foi simplificada o mais possível de forma a que os seus termos sejam primos entre si . Seria então $(n/m)^2 = 2$, donde se tiraria $n^2 = 2m^2$ o que implicaria que n^2 teria de ser par ; mas então também n seria par (uma vez que o quadrado de um natural ímpar é ímpar), ou seja, seria $n = 2p$ e, portanto, ter-se-ia $(2p)^2 = 2m^2$; desta última igualdade resultaria $m^2 = 2p^2$, ou seja, m^2 seria par e o mesmo aconteceria então com m ; mas então os naturais n e m primos entre si seriam ambos pares, ou seja divisíveis ambos por 2 o que evidentemente é uma contradição, que resulta de se ter admitido que $\sqrt{2}$ é um número racional.

Com argumentos semelhantes pode estabelecer-se a irracionalidade de muitos outros reais do tipo $\sqrt[k]{b}$. Não se pense porém que os números irracionais só podem ser provenientes do cálculo de raízes de números inteiros ou mesmo racionais; em certo sentido que será esclarecido quando estudarmos os números cardinais infinitos, podemos dizer que a maioria dos números irracionais não são o resultado do cálculo de raízes de racionais.

Podemos agora demonstrar uma propriedade semelhante a **P12**, o qual garante a existência de pelo menos um irracional (logo de uma infinidade) em qualquer intervalo $]\, a\, ,\, b\, [\ \subset \mathbf{R}$. A demonstração a efectuar é praticamente decalcada da do teorema 2, apenas sendo necessário um ligeiro ajustamento.

P13 : *Em qualquer intervalo aberto* $]\, a\, ,\, b\, [\ \subset \mathbf{R}$ *, com* $a < b$ *, existe pelo menos um número irracional*

<u>Demonstração</u> : A demonstração é tal qual a de **P12**, só com um pequeno ajustamento. Assim, no caso $b > 0$, o m que intervém na demonstração, em vez de ser escolhido no conjunto não majorado **N** de modo a respeitar ao mesmo tempo as desigualdades $m > 1/c$ e $m > 2/b$, é escolhido no conjunto não majorado $M = \{\ \sqrt{2}\,.\,p\ :\ p \in \mathbf{N}\}$ com respeito pelas mesmas desigualdades. A demonstração segue depois tal qual como no caso de **P12**, concluindo-se no final que existe,

$$r = (h - 1)\,.\,(1/m)\ \in\ ]\, a\, ,\, b\, [\ ,$$

só que agora, contrariamente ao verificado no caso de **P12**, o número r obtido é irracional: com efeito, se r fosse racional , como é positivo, seria $r = \alpha\,/\,\beta$ com $\alpha\,,\,\beta\ \in \mathbf{N}$; e então como $m = \sqrt{2}\,.\,p$ com certo $p \in \mathbf{N}$, seria,

$$r = \alpha\,/\,\beta\ =\ \frac{h-1}{\sqrt{2}\,.\,p}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}\ =\ \frac{\beta\,.(h-1)}{\alpha\,.\,p}\ ,$$

e portanto $\sqrt{2}$ seria racional o que já sabemos não ser verdade.

<u>**Corolário**</u> **:** *Em qualquer intervalo* $]\, a\, ,\, b\, [\ \subset\ \mathbf{R}$*, com* $a < b$*, existe uma infinidade de números irracionais*

<u>Demonstração</u> : Tal qual a do corolário de **P12**.

4. <u>Representação decimal dos números reais</u>

4.1 - <u>Representação decimal dos reais não negativos</u>

Supõe-se o leitor já familiarizado com a representação dos inteiros não negativos (naturais e zero) na base 10, mediante o uso de 10 símbolos próprios para os 10 primeiros inteiros não negativos :

Zero (0) ; *Um* (1) ; *Dois* (2) ; ... ; *Nove* (9) .

Dado um número real $a \geq 0$, seja a_0 o maior inteiro que é menor ou igual ao real a (como $a \geq 0$, claro que $a_0 \geq 0$). Determinado a_0 , seja a_1 o maior inteiro tal que,

$$a_0 + a_1/10 \leq a \, ;$$

claro que $a_1 = 0 , 1 , 2 , \ldots , 9$: não poderá ter-se $a_1 \geq 10$, pois então seria $a \geq a_0 + 1$ e a_0 não teria sido o maior inteiro que é menor ou igual ao real a . Determinados a_0 e a_1 , seja a_2 o maior inteiro tal que,

$$a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 \leq a \, ;$$

sendo, tal como no caso de a_1 , $a_2 = 0 , 1 , 2 , \ldots , 9$. Em geral, tendo sido determinados, a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_{n-1} , seja a_n , o maior inteiro tal que,

$$a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_{n-1}/10^{n-1} + a_n/10^n \leq a \, ;$$

claro que, tal como no caso dos anteriores a_i , tem-se $a_n = 0 , 1 , 2 , \ldots , 9$.

Seja S_a o conjunto de todos os números reais (racionais),

$$r_n = a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_{n-1}/10^{n-1} + a_n/10^n \qquad (n = 0 , 1 , 2 , \ldots) ,$$

obtidos pelo processo descrito a partir do real a . Trata-se de um conjunto não vazio e majorado pelo real a, existindo portanto o respectivo supremo em **R** , $\lambda_a = Sup \; S_a$. Vejamos que é exactamente $\lambda_a = a$: se fosse $\lambda_a < a$, ter-se-ia, $a - \lambda_a > 0$ e existiria então um inteiro m tal que $0 < 1/10^m < a - \lambda_a$ e, por outro lado, seria,

$$r_n = a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_{n-1}/10^{n-1} + a_n/10^n \leq \lambda_a < a \, ;$$

para $n = 0 , 1 , 2 , \ldots$; em particular, seria, com o m referido,

$$r_m + 1/10^m = a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + (a_m + 1)/10^m \leq \lambda_a + 1/10^m < a \, ,$$

e assim a_m não teria sido o maior inteiro tal que,

$$a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \ldots + a_{m-1}/10^{m-1} + a_m/10^m \leq a \, ,$$

como se exige na definição de a_m .

Note-se que, nesta construção, os a_n não podem ser todos iguais a 9 de certa ordem em diante. Com efeito, se $a_n = 9$ para $n > k$, ter-se-ia,

$$r_n = a_0 + a_1/10 + \ldots + a_k/10^k + 9/10^{k+1} + \ldots + 9/10^n \, ;$$

então o supremo dos r_n seria,

$$a = Sup\, S_a = r_k + Sup\, \{9/10^{k+1} + \ldots + 9/10^{n} \;:\; n > k\} ,$$

e como,

$$9/10^{k+1} + \ldots + 9/10^{n} = 1/10^{k} - 1/10^{n} ,$$

conclui-se que,

$$a = Sup\, S_a = r_k + 1/10^{k} = a_0 + a_1/10 + \ldots + (a_k + 1)/10^{k} ,$$

e então a_k não teria sido o maior inteiro tal que,

$$a_0 + a_1/10 + \ldots + a_k/10^{k} \le a ,$$

como se exige na definição do a_k .

Em conclusão: Qualquer real $a \ge 0$ se pode representar por uma sucessão de inteiros, a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_n , ... determinados pelo processo indicado; esses inteiros são utilizados para escrever a chamada dízima representativa de a, ou seja, $a = a_0 , a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ em que a vírgula separa a parte inteira da parte decimal ; como se disse, a_0 é um inteiro maior ou igual a zero e cada um dos a_j situados à direita da vírgula é um dos dígitos 0, 1, 2 , ... , 9 , não podendo ser todos iguais a 9 de certa ordem em diante.

Sendo a e b dois reais não negativos distintos eles não podem ser representados pela mesma dízima : caso contrário os conjuntos S_a e S_b referidos anteriormente seriam coincidentes e teriam portanto o mesmo supremo, ou seja, seria $a = Sup\, S_a = Sup\, S_b = b$.

Inversamente, dada a dízima $a_0 , a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$, com a_0 inteiro não negativo e os outros a_j não todos iguais a 9 de certa ordem em diante, existe um certo real a representado por tal dízima. Com efeito, fazendo,

$$r_n = a_0 + a_1/10 + \ldots + a_n/10^{n} \quad , \quad n = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots ,$$

é fácil ver que o conjunto B dos r_n é majorado (um majorante é por exemplo o inteiro $a_0 + 1$) e representando por a o respectivo supremo vê-se com facilidade que $B = S_a$, ou seja, a dízima de que se partiu representa esse real não negativo a .

Para terminar, ainda um pormenor importante. Se no processo de construção do conjunto S_a se obtiver, para certo m,

$$a_0 + a_1/10 + \ldots + a_m/10^{m} = a ,$$

será necessariamente $a_n = 0$ para $n > m$. Neste caso o conjunto S_a será finito e a dízima que representa o real a será, $a = a_0 , a_1\, a_2 \ldots a_m 0\,0\,0 \ldots$, podendo ser omitidos os zeros à direita de a_m e escrever-se simplesmente, $a = a_0 , a_1\, a_2 \ldots a_m$; diz-se então que a dízima é finita. Neste caso especial o real ,

$$a = a_0 + a_1/10 + \ldots + a_m/10^m \ ,$$

será racional. Pode portanto dizer-se que as dízimas finitas representam sempre números racionais, mas a inversa não é verdadeira pois, como veremos no ponto seguinte, existem racionais representados por dízimas infinitas (1).

4.2 - Algoritmo para obtenção da dízima de um racional não negativo

Seja r um racional não negativo. Então $r = \theta/\mu$, com θ e μ inteiros positivos. O algoritmo da divisão de θ por μ , continuado indefinidamente enquanto se obtiverem restos significativos, permite obter a dízima que representa o racional $r = \theta/\mu$:

a) Como se sabe, para dividir θ por μ começa-se por determinar o maior inteiro a_0 tal que, $a_0 . \mu \leq \theta$ e determina-se em seguida o resto, $r_1 = \theta - a_0 . \mu$ que, como se sabe, só pode ser $r_1 = 0 , 1 , \ldots , \mu\text{-}1$. Se for $r_1 = 0$, a divisão termina e nesse caso $\theta = a_0 . \mu$ concluindo-se então que $r = \theta/\mu = a_0$ é inteiro. Caso seja, $r_1 = 1 , \ldots , \mu\text{-}1$,

b) Calcula-se $10\, r_1$ e procura-se o maior inteiro a_1 tal que $a_1 . \mu \leq 10\, r_1$. Claro que deverá ser $a_1 \leq 9$, porque $a_1 \geq 10$ implicaria, $10\, r_1 \geq a_1 . \mu \geq 10\, \mu$, ou seja, $r_1 \geq \mu$, quando anteriormente se viu ser $r_1 < \mu$. O inteiro a_1 assim determinado é o maior inteiro que faz,

$$a_0 + a_1/10 \leq r = \theta/\mu \ ,$$

porque , tendo em conta que $r_1 = \theta - a_0 . \mu$, a desigualdade precedente é equivalente a $a_1 . \mu \leq 10\, r_1$. A partir de a_1 determina-se em seguida o resto $r_2 = 10\, r_1 - a_1 . \mu$. Sendo $r_2 = 0$, a divisão termina e de $10\, r_1 - a_1 . \mu = 0$ tira-se que, $a_0 + a_1/10 = r = \theta/\mu$. Sendo $r_2 = 1 , \ldots , \mu\text{-}1$,

c) Calcula-se $10\, r_2$ e procede-se como em b), determinando o maior inteiro a_2 tal que $a_2 . \mu \leq 10\, r_2$. E assim por diante , vão-se determinando os sucessivos restos r_j e os

---

(1) Embora a dízima $a = a_0 , a_1\, a_2 \ \ldots \ a_k\, 999 \ldots$ ($a_k < 9$, se $k \geq 1$) nunca surja na construção acima, existe como dízima e representa o mesmo número que a dízima $a = a_0 , a_1\, a_2 \ \ldots \ (a_k + 1)$. Por exemplo, 0,9999 … representa o real 1 e 0,45999999 … representa o real 0,46 . Refira-se ainda que se na construção supra se substituir $\leq$ por $<$ na condição de determinação dos a_i podemos obter dízimas com os a_n todos iguais a 9 de certa ordem em diante. Sempre que na construção que adoptamos se obtiver a dízima finita $a_0 , a_1\, a_2 \ \ldots \ (a_k + 1)$ na construção alternativa obtém-se a dízima infinita $a_0 , a_1\, a_2 \ \ldots \ a_k\, 999 \ldots$.

correspondente inteiros a_j . Caso se chegue a um certo resto $r_m = 0$, a divisão termina e conclui-se que,

$$r = \theta / \mu = a_0 + a_1/10 + a_2/10^{2} + ... + a_{m-1}/10^{m-1} =$$

$$= a_0 , a_1 \, a_2 \; ... \; a_{m-1} \; ;$$

caso os sucessivos restos sejam sempre significativos, a divisão prossegue indefinidamente e, nesse caso, $r = a_0 , a_1 \; a_2 \; ... \; a_n$ ... (dízima infinita).

Note-se que no caso dos sucessivos restos serem sempre significativos (dízima infinita), como tais restos só podem tomar os valores $1, 2, ..., \mu$-1 , haverá um primeiro r_β (no máximo com $\beta = \mu$) que coincide com um outro r_α já obtido anteriormente. E como,

$$r_i = r_j \Rightarrow a_i = a_j \Rightarrow r_{i+1} = r_{j+1} \; ,$$

tem-se,

$$r_\beta = r_\alpha \qquad a_\beta = a_\alpha$$

$$r_{\beta+1} = r_{\alpha+1} \qquad a_{\beta+1} = a_{\alpha+1}$$

$$r_{\beta+2} = r_{\alpha+2} \qquad a_{\beta+2} = a_{\alpha+2}$$

$$... \qquad ...$$

$$r_{\beta+(\beta-\alpha)} = r_\beta = r_\alpha \qquad a_{\beta+(\beta-\alpha)} = a_\beta = a_\alpha$$

$$... \qquad ...$$

Então o ciclo ou período ($a_\alpha \, a_{\alpha+1} \; ... \; a_{\beta-1}$) repete-se indefinidamente na dízima. Caso seja $\alpha = 1$, o ciclo inicia-se em a_1 ; caso seja $\alpha > 1$, os inteiros iniciais da parte decimal da dízima (a_1 , a_2 , ... , $a_{\alpha-1}$) ficam fora do ciclo. As dizimas infinitas cuja parte decimal apresenta um ciclo ou período que se repete indefinidamente são chamadas *dízimas periódicas* (*simples* se e ciclo se inicia em a_1 , *mistas* se o ciclo se inicia em a_α , com $\alpha > 1$.

Em conclusão, qualquer racional não negativo pode-se representar por uma dízima finita ou infinita periódica. Po exemplo:

1/8 = 0,125 ; 1/3 = 0,333333 ... = 0, (3) ; 41/66 = 0,62121212 ... = 0,62(12) .

Inversamente, pode ver-se sem grande dificuldade que qualquer dízima finita ou periódica representa um racional. Os exemplos seguintes sugerem como pode obter-se a representação fraccionária de um racional a partir da respectiva dízima, tanto no caso da dízima ser finita, como no caso de ser infinita periódica.

a) $1{,}255 = 1 + 2/10 + 5/10^2 + 5/10^3 = 1255/1000 = 251/200$;

b) $0{,}21888\ldots = Sup\ \{ 2/10 + 1/10^2 + 8/10^3 + \ldots + 8/10^n \ :\ n \geq 3\} =$

$$= 21/100 + Sup\ \{8/10^3 + \ldots + 8/10^n \ :\ n \geq 3\} =$$

$$= 21/100 + Sup\ \{ \frac{8/10^3 - 8/10^{n+1}}{1 - 1/10} \ :\ n \geq 3\} =$$

$$= 21/100 + \frac{8/10^3}{1 - 1/10} = 21/100 + 8/900 = 197/900 .$$

4.3 - Dízimas infinitas não periódicas e números irracionais

Face ao exposto em 4.2 conclui-se que qualquer número representável por uma dízima infinita não periódica é necessariamente não racional, ou seja, é irracional. Assim, por exemplo, o número representado pela dízima,

$$21{,}10110111011110\ldots = 21, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots \quad ,$$

com,

$$a_n = \begin{cases} 0 \ , \ n = \dfrac{m(m+3)}{2} \ \wedge \ m = 1, 2, 3, \ldots \\ 1 \ , \ outros\ \ n \end{cases} \quad ,$$

é irracional .

4.4 - Representação de números reais negativos

A representação por dízimas é extensiva aos numeros reais negativos. Com efeito, sendo $a \in \mathbf{R}^-$ tem-se $-a \in \mathbf{R}^+$ e sendo $-a$ representado pela dízima, $a_0 , a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots$, representa-se a por $- a_0 , a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n \ldots$.

5. Exercícios

1 - Indique se são majorados, minorados e limitados os subconjuntos de **R** seguintes :

a) $A = \{ x \ : \ | x - 3 | = 2 \, . \, | x | \}$;

b) $B = \{ x \ : \ x \neq 0 \ \wedge \ x / x^{-1} < x^{-1}/x \}$.

Indique ainda, caso existam em **R** , o supremo , o ínfimo, o máximo e o mínimo de cada um dos conjuntos.

2 - Sejam A e B dois subconjuntos de **R** tais que $A \subseteq B$. Suponha que A é não vazio e que B é majorado. Nessas condições, justifique que existem os supremos de A e de B e prove que $Sup\, A \leq Sup\, B$.

3 - Seja A um subconjunto de **R** , no vazio e majorado e seja m um majorante de A distinto do supremo deste conjunto . Mostre que existe um real $\varepsilon > 0$ tal que $]\, m\text{-}\varepsilon \, , m\text{+}\varepsilon \,[\ \cap A = \varnothing$.

4 - Seja A um subconjunto de **R**, no vazio e majorado e seja a o respectivo supremo. Mostre que para qualquer real $\varepsilon > 0$, o conjunto $]\, a\text{-}\varepsilon \, , a\text{+}\varepsilon \,[\ \cap A$ é não vazio. Sendo $a \notin A$, mostre que o conjunto $]\, a\text{-}\varepsilon \, , a\text{+}\varepsilon \,[\ \cap A$ não pode ser finito.

5 - Sendo A e B subconjuntos de **R** majorados, prove que,

$$Sup\, (\, A \cup B \,) = Máx\, \{\, Sup\, A \ , \ Sup\, B \,\} \ .$$

Sendo A e B subconjuntos de **R** minorados, prove que,

$$Inf\, (\, A \cup B \,) = Mín\, \{\, Inf\, A \ , \ Inf\, B \,\} \ .$$

6 - Sendo A e B conjuntos majorados, considere o conjunto,

$$C = \{\, x + y \ : \ x \in A \ \wedge \ y \in B \,\}.$$

Mostre que C é majorado e que $Sup\, C = Sup\, A + Sup\, B$.

7 - Prove, por indução finita, as seguintes identidades em **N** :

a) $1 + 2 + 3 + ... + (n{+}1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n{+}1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$;

c) $n^3 + 3\, n^2 + 2\, n = 6\, k$, com certo $k \in \mathbf{N}$.

8* - Sendo $m \in \mathbf{N}$ prove, por indução finita, que o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ é dado por C_m^{n+m-1} . Nota : Uma solução inteira não negativa da equação dada é um énuplo de valores (a_1, a_2 , ... , a_n) que verificam a equação e tais que cada a_i é um inteiro não negativo.

9 - Um número natural n diz-se par se e só se existe um natural k tal que $n = 2k$; diz-se ímpar se e só se n+1 é par. Posto isto,

a) Mostre que 2 é par e 1 é impar ;

b) Mostre que um dado natural não pode ser ao mesmo tempo par e ímpar;

c) Mostre que um dado natural ou é par ou é ímpar (não há terceira hipótese).

10 - Utilize o teorema da boa ordenação em **N** para provar as seguintes propriedades:

a) Qualquer subconjunto de **N** que seja majorado tem máximo;

b) Qualquer subconjunto de **Z** que seja minorado tem mínimo;

c) Qualquer subconjunto de **Z** que seja majorado em máximo.

11 - Dado um real a qualquer, mostre que existe um e um só $n \in \mathbf{Z}$ tal que $n \le a < n+1$.

12 - Sendo m e n inteiros, com $m \ge 0$ e $n > 0$, mostre que existem inteiros q e r não negativos tais que, $m = n\,q + r$ e $r < n$. Mostre ainda que tais inteiros q e r são únicos.

13 - Sendo m um inteiro não negativo, prove que existem inteiros p e r não negativos tais que, $m = p^2 + r$ e $r < 2p + 1$. Mostre ainda que tais inteiros p e r são únicos.

14 - Prove que se x é um racional diferente de zero e y um irracional, então $x + y$, $x \,.\, y$ e x / y são números irracionais; mostre também, usando exemplos convenientes, que sendo x e y irracionais $x + y$, $x \,.\, y$ e x / y podem não ser irracionais.

15 - Mostre a raiz quadrada de 5 é um número irracional.

16 - Sabendo que qualquer $n \in \mathbf{N}$ pode ser factorizado do seguinte modo,

$$n = a_1^{k_1}\, a_2^{k_2} \ldots a_p^{k_p} \quad ,$$

com os a_i primos e os $k_i \in \mathbf{N}$,

a) Prove que a condição necessária e suficiente para que n seja quadrado perfeito é que os expoentes k_i sejam números pares ;

b*) Prove que se n não for quadrado perfeito, então $\sqrt{n}$ é um número irracional.

17 - Escreva as dízimas que representam os seguintes números racionais:

a) 31/15 ; **b)** 7/13 ; **c)** 366 / 300 .

18 - Represente por fracções irredutíveis os racionais representados pelas seguintes dízimas:

a) 1,2234 ; **b)** 0,228 ; **c)** 0,141414 ... = 0, (14) ; **d)** 0,5333 ... = 0, 5(3) .

19 - Quais das dízimas seguintes representam um número irracional :

a) 1, $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$, com $a_n = \begin{cases} 2 & , \ n \ par \\ 1 & , \ n \ impar \end{cases}$;

b) 12, $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$, com $a_n = 3 + 2 \,.\, (-1)^n$;

c) 0, $a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$, com $a_n = \begin{cases} 1 & , \ n = \dfrac{m(m+1)}{2} \ \wedge \ m = 1,2,3, \ldots \\ 0 & , \ outros \ n \end{cases}$.

RESPOSTAS :

1 - a) Limitado, supremo = máximo = 1 e ínfimo = mínimo = -3 ; **b)** Limitado, supremo = 1 , ínfimo = -1 , não existem nem máximo nem mínimo do conjunto.

17 - a) 2 , 0(6) ; **b)** 0 , (538461) ; **c)** 1,22 .

18 - a) 6117 / 5000 ; **b)** 57 / 250 ; **c)** 14 / 99 ; **d)** 8 /15 .

19 - Apenas a dízima c) representa um número irracional.

CAPÍTULO II

NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM R

1. Distância e vizinhanças

Ao número real não negativo $d(x, y) = |\, x - y \,|$ chama-se *distância* entre os números reais x e y . São imediatas as seguintes propriedades:

P1 : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
P2 : $d(x, y) = d(y, x)$ (*simetria*);
P3 : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*desigualdade triangular*).

A propriedade **P3** pode demonstrar-se como segue, utilizando a desigualdade modular da soma : $d(x, y) = |\, x - y \,| = |\, (x - z) + (z - y) \,| \leq |\, x - z \,| + |\, z - y \,| \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Dado o real $a \in \mathbf{R}$ e sendo $\varepsilon > 0$ ao conjunto (intervalo),

$$\mathrm{V}_\varepsilon(a) = \{\, x : \ d(x, a) < \varepsilon \,\} = \{\, x : \ |\, x - a \,| < \varepsilon \,\} = \,]\, a - \varepsilon \ , \ a + \varepsilon \,[\ ,$$

chama-se *vizinhança* de a com raio ε . São óbvias as seguintes propriedades :

P4 : $\varepsilon < \delta \Rightarrow \mathrm{V}_\varepsilon(a) \subset \mathrm{V}_\delta(a)$;
P5 : $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \mathrm{V}_\varepsilon(a) = \{a\}$; $a \neq b \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : \mathrm{V}_\varepsilon(a) \cap \mathrm{V}_\varepsilon(b) = \varnothing$.

2. Conceitos topológicos básicos

Definem-se seguidamente os conceitos topológicos mais importantes:

a) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto interior* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se existe uma certa $\mathrm{V}_\varepsilon(a)$ contida no conjunto A . O conjunto dos pontos interiores de um conjunto A designa-se por *interior* do conjunto e representa-se por *INT A* , podendo evidentemente ser *INT A* = $\varnothing$ (nada obriga a que um dado conjunto tenha pontos interiores).

b) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto fronteiro* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se em qualquer $\mathrm{V}_\varepsilon(a)$ existem pontos do conjunto A e pontos do complementar de A. O conjunto dos pontos fronteiros de um conjunto A designa-se por *fronteira* do conjunto e representa-se por *FRONT A* , podendo evidentemente ser *FRONT A* = $\varnothing$.

c) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto exterior* ao conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se existe uma certa $\mathrm{V}_\varepsilon(a)$ contida no complementar do conjunto A . O conjunto dos pontos exteriores ao conjunto A designa-se por *exterior* do conjunto e representa-se por *EXT A* , podendo evidentemente ser *EXT A* = $\varnothing$.

d) Diz-se que $a \in \mathbf{R}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existe pelo menos um ponto de A distinto de a. O conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se *derivado* de A e representa-se por A', podendo evidentemente ser $A' = \varnothing$.

e) Chama-se *aderência* ou *fecho* do conjunto A à união do seu interior com a sua fronteira, ou seja, $Ad\,A = INT\,A \cup FRONT\,A$. Excepto no caso de A ser vazio, tem-se sempre $Ad\,A \neq \varnothing$.

f) Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se *aberto* se e só se coincide com o seu interior, ou seja, $A = INT\,A$. Dado que em qualquer caso (A aberto ou não) sempre se tem $INT\,A \subseteq A$, para provar que A é aberto bastará provar que $A \subseteq INT\,A$.

g) Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se *fechado* se e só se coincide com a sua aderência, ou seja, se e só se, $A = Ad\,A = INT\ A \cup FRONT\ A$.

A partir destes conceitos básicos podemos enunciar uma série de propriedades, a maioria com demonstração muito simples, sem no entanto termos a preocupação de exaustividade. Algumas outras serão apresentadas como exercício no final do capítulo. Vejamos então:

P6 : $INT\ A \cup FRONT\ A \cup EXT\ A = \mathbf{R}$

Demonstração: É evidente, dadas as definições de interior, fronteira e exterior de um conjunto ; qualquer ponto de espaço respeita uma e uma só das definições a), b) ou c).

P7 : $EXT\,A = INT\ \overline{A}$

Demonstração: É também evidente, dado que um ponto $a \in EXT\,A$ se e só se existe uma $V_\varepsilon(a)$ contida no complementar de A e tal equivale a ter-se $a \in INT\ \overline{A}$.

P8 : $FRONT\ A = FRONT\ \overline{A}$

Demonstração: Basta atender à definição: $a \in FRONT\ A$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existem pontos de A e pontos de $\overline{A}$, o que equivale a ser $a \in FRONT\ \overline{A}$.

P9 : *Se* $A \subseteq B$, *então* $A' \subseteq B'$

Demonstração : Tomando $a \in A'$, tem-se que em qualquer vizinhança de a existe pelo menos um ponto de A distinto de a e, portanto, dado ter-se $A \subseteq B$, também existe pelo menos um ponto de B distinto desse mesmo a, ou seja, $a \in B'$.

P10 : $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demonstração : Por ser $A \subseteq (A \cup B)$ e $B \subseteq (A \cup B)$, a propriedade **P9** garante que $A' \subseteq (A \cup B)'$ e $B' \subseteq (A \cup B)'$ o que implica a inclusão,

$$A' \cup B' \subseteq (A \cup B)',$$

faltando portanto provar a inclusão contrária para se poder considerar provada a igualdade do enunciado. Provemos então que $(A \cup B)' \subseteq A' \cup B'$. Deveremos provar que,

$$a \in (A \cup B)' \Rightarrow a \in A' \cup B' ,$$

mas no caso presente torna-se mais fácil provar a implicação equivalente,

$$a \notin A' \cup B' \Rightarrow a \notin (A \cup B)' .$$

Para tal, considere-se $a \notin A' \cup B'$, ou seja, $a \notin A'$ e $a \notin B'$; existe então uma $V_\varepsilon(a)$ sem pontos de A para além do próprio a e existe uma outra $V_\delta(a)$ sem pontos de B para além do próprio a ; tomando $\theta = mín\ \{\varepsilon, \delta\}$ em $V_\theta(a)$ não se encontram pontos nem de A nem de B , para além do próprio a ; então existe uma vizinhança de a sem pontos de $A \cup B$ para além do próprio a , ou seja, $a \notin (A \cup B)'$, como se queria provar.

P11 : *As vizinhanças* $V_\varepsilon(a)$ *são conjuntos abertos*

Demonstração : Dado $b \in V_\varepsilon(a)$, tem-se $d(a, b) < \varepsilon$. Tomando,

$$\delta = \varepsilon - d(a, b) > 0 ,$$

vejamos que $V_\delta(b) \subseteq V_\varepsilon(a)$. Com efeito, usando as propriedades **P2** e **P3** ,

$$x \in V_\delta(b) \Rightarrow d(x, b) < \delta = \varepsilon - d(a, b) \Rightarrow d(x, b) + d(a, b) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x, a) < \varepsilon \Rightarrow x \in V_\varepsilon(a) .$$

Por definição de ponto interior conclui-se assim que $b \in INT\ V_\varepsilon(a)$, ou seja, $V_\varepsilon(a) \subseteq INT\ V_\varepsilon(a)$ o que chega para garantir a igualdade $V_\varepsilon(a) = INT\ V_\varepsilon(a)$. Em conclusão, $V_\varepsilon(a)$ é um conjunto aberto como se queria provar.

P12 : *Sendo* A *um conjunto qualquer,* $INT\ A$ *é um conjunto aberto*

Demonstração : Basta provar que $INT\ A \subseteq INT\ (INT\ A)$, pois tal chega para garantir que $INT\ A = INT\ (INT\ A)$, ou seja que $INT\ A$ é um conjunto aberto.

Para tal notemos que $A \subseteq B \Rightarrow INT\ A \subseteq INT\ B$ implicação que é praticamente evidente e cuja justificação se deixa ao cuidado do leitor.

Então,

$$a \in INT\,A \Rightarrow \exists\ V_\varepsilon(a) :\ \ V_\varepsilon(a) \subseteq A \ \Rightarrow \exists\ V_\varepsilon(a) :\ \ INT\ \ V_\varepsilon(a) \subseteq INT\,A$$

Como o conjunto $V_\varepsilon(a)$ é aberto (ver propriedade **P11**) tem-se $INT\ \ V_\varepsilon(a) = V_\varepsilon(a)$ e portanto,

$$a \in INT\,A \ \Rightarrow \exists\ V_\varepsilon(a) :\ \ V_\varepsilon(a) \subseteq INT\,A \ \ \Rightarrow \ \ a \in INT\,(INT\ A\,)\,,$$

ou seja, $INT\,A \subseteq INT\,(INT\,A)$ como se queria provar.

P13 : $Ad\,A = A \cup A'$

<u>Demonstração</u> : Dado $a \in Ad\ A$, poderá ser $a \in A$ ou $a \notin A$. Se for $a \in A$, teremos $a \in A \cup A'$. Se for $a \notin A$, o ponto a não pode ser interior do conjunto A , logo necessariamente $a \in FRONT\,A$ e então em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existe pelo menos um ponto do conjunto A que não pode ser o próprio a dado estarmos a considerar o caso $a \notin A$; então, por definição de ponto de acumulação, $a \in A'$, ou seja, também neste caso se tem $a \in A \cup A'$. Em conclusão: $Ad\,A \subseteq A \cup A'$.

Para provar a inclusão contrária tome-se $a \in A \cup A'$ e vejamos que igualmente $a \in Ad\ A$. Se for $a \in A$, tem-se evidentemente $a \in Ad\ A$. Se for $a \notin A$, necessariamente $a \in A'$, logo em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existe o ponto a que pertence ao complementar do conjunto A e pelo menos um ponto do conjunto A , ou seja, $a \in FRONT\,A$ e portanto também neste caso $a \in Ad\,A$.

P14 : *O conjunto A é fechado se e só se* $A' \subseteq A$

<u>Demonstração</u> : Sendo A fechado então, por definição, $A = Ad\,A = A \cup A'$ donde resulta $A' \subseteq A$. Por outro lado, sendo $A' \subseteq A$ tem-se $Ad\,A = A \cup A' = A$, ou seja, o conjunto A é fechado.

P15 : *O derivado e a aderência ou fecho de um qualquer conjunto A são conjuntos fechados*

<u>Demonstração</u> : Vejamos primeiro o caso do derivado. Pela propriedade **P14**, basta provar que $(A')' \subseteq A'$. Dado $x \in (A')'$, em qualquer $V_\varepsilon(x)$ existe pelo menos um ponto $y \neq x$ pertencente ao conjunto A'. Por ser $y \in A'$, por seu lado, em qualquer $V_\delta(y)$ existe um $z \neq y$ pertencente ao conjunto A . Tomando em particular,

$$\delta = m\acute{\imath}n\ \{\ \varepsilon - d(y,x)\ ;\ d(y,x)\ \}\ ,$$

resulta $d(z,y) < \delta \le \varepsilon - d(y,x)$, ou seja, $d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \varepsilon$, assim se concluindo que $z \in V_\varepsilon(x)$. Se se provar que $z \neq x$, fica provado que em $V_\varepsilon(x)$ - qualquer - existe sempre pelo menos um $z \neq x$ pertencente ao conjunto A , ou seja, fica provado que $x \in A'$, assim se demonstrando a inclusão $(A')' \subseteq A'$, ou seja, que A' é fechado. Ora, atendendo à definição do particular δ considerado, resulta $\delta \le d(y,x) \le d(y,z) + d(z,x)$; e dado que $d(y,z) = d(z,y) < \delta$, sai $d(z,x) > 0$ ou seja $z \neq x$.

Vejamos agora que também a aderência ou fecho de um conjunto A é sempre um conjunto fechado. Dado que $Ad\,A = A \cup A'$ (ver propriedade **P13**) e atendendo à igualdade estabelecida na propriedade **P10**, tem-se, considerando a inclusão já provada, $(A')' \subseteq A'$,

$$[Ad\,A]' = (A \cup A')' = A' \cup (A')' \subseteq A' \cup A' = A' \subseteq Ad\,A\,,$$

o que permite concluir que o conjunto $Ad\,A$ é um conjunto fechado.

P16 : *Um conjunto A é fechado se e só se o seu complementar $\overline{A}$ for aberto. Um conjunto A é aberto se e só se o seu complementar $\overline{A}$ for fechado.*

Demonstração : Admita-se que A é fechado e demonstre-se que $\overline{A}$ é aberto. Tomando $x \in \overline{A}$ existe uma vizinhança desse x sem nenhum ponto de A : com efeito, se em qualquer vizinhança do ponto x existisse pelo menos um ponto do conjunto A, tal ponto não poderia ser o próprio x (porque x pertence ao complementar de A) e então poderia concluir-se que o ponto x era ponto de acumulação de A ; mas como o conjunto A é fechado por hipótese, tal ponto x pertenceria então ao conjunto A (lembre-se que ser A fechado equivale a $A' \subseteq A$) e não a $\overline{A}$ como se admitiu inicialmente. Ora se existe uma vizinhança de x sem nenhum ponto de A, tal significa que essa vizinhança está contida no complementar de A, ou seja, existe uma $V_\varepsilon(x) \subseteq \overline{A}$, assim se provando que,

$$x \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, V_\varepsilon(x) \ :\ V_\varepsilon(x) \subseteq \overline{A} \Rightarrow x \in INT\,\overline{A}\,,$$

significando esta implicação que $\overline{A} \subseteq INT\,\overline{A}$, ou ainda, que $\overline{A}$ é um conjunto aberto.

Admita-se agora que $\overline{A}$ é aberto e demonstre-se que então A é fechado, ou seja, demonstre-se que $A' \subseteq A$. Tomando $a \notin A$ tem-se $a \in \overline{A}$ e dado que por hipótese $\overline{A}$ é aberto, existe uma vizinhança de a contida no conjunto $\overline{A}$ o que implica que esse ponto a não pode ser ponto de acumulação de A . Provou-se então que $a \notin A \Rightarrow a \notin A'$ equivalendo esta implicação a ser $A' \subseteq A$. Está demonstrado o que se pretendia.

Para provar que o conjunto A é aberto se e só se $\overline{A}$ for fechado (segunda parte da propriedade), basta notar que pela primeira parte da propriedade o conjunto $B = \overline{A}$ será fechado se e só se $\overline{B} = A$ for aberto.

P17 : *A união de um qualquer número de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A intersecção de um qualquer número de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração : Sejam A_α conjuntos abertos em número finito ou infinito. Para provar que a união dos A_α é aberto teremos de provar que, $\bigcup_\alpha A_\alpha \subseteq INT\,(\bigcup_\alpha A_\alpha)$.

Ora, dado um qualquer $a \in \bigcup_\alpha A_\alpha$ tem-se que esse ponto a pertence pelo menos a um dos A_α ; como esse A_α a que o ponto a pertence é um conjunto aberto, existirá uma V_ε (a) contida em A_α e portanto essa mesma vizinhança estará contida em $\bigcup_\alpha A_\alpha$, ou seja, o ponto a pertencerá a $INT\ (\bigcup_\alpha A_\alpha)$. Fica assim provada a inclusão desejada, isto é , fica provado que a união dos abertos A_α é igualmente um conjunto aberto.

Quanto à intersecção de um número qualquer de conjuntos fechados F_α note-se que,

$$\overline{\bigcap_\alpha F_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{F_\alpha} \quad \text{(2ª lei de De Morgan)}$$

e que os conjuntos $\overline{F_\alpha}$ são abertos (complementares de conjuntos fechados). Pela primeira parte da propriedade, já demonstrada, conclui-se que o conjunto $\overline{\bigcap_\alpha F_\alpha}$ é aberto e portanto o respectivo conjunto complementar $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é fechado.

P18 : *A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A reunião de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração : Vejamos em primeiro lugar o caso da reunião de um número finito de conjuntos fechados. Bastará considerar o caso de dois conjuntos, pois por indução finita poderemos facilmente passar ao caso de mais de dois conjuntos (mas em número finito). Sendo F e G conjuntos fechados, tem-se, usando as propriedades **P10** e **P14**,

$$(F \cup G)' = F' \cup G' \subseteq F \cup G\,,$$

o que prova que a união de F e G é também um conjunto fechado.

Vejamos agora o caso da intersecção de dois conjuntos abertos (para mais de dois, mas em número finito, procede-se por indução). Sendo A e B conjuntos abertos, tem-se que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são fechados e, portanto, $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado; então o complementar de $\overline{A} \cup \overline{B}$, que é precisamente $A \cap B$, é aberto.

Convirá esclarecer que a reunião de uma infinidade de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado e, do mesmo modo, a intersecção de uma infinidade de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. É fácil encontrar exemplos que mostram essa possibilidade. A este propósito a propriedade seguinte é elucidativa:

P19 : *Qualquer conjunto fechado é a intersecção de uma infinidade numerável de conjuntos abertos. Qualquer conjunto aberto é a união de uma infinidade numerável de conjuntos fechados.*

Demonstração: Vejamos em primeiro lugar o caso de um conjunto fechado F . Com r número racional positivo, definam-se os conjuntos,

$$I_r = \{\, x : \exists \;\; a \in F \;\; tal\ que \;\; d(x, a) < r \,\} \ ,$$

que como veremos de seguida são todos abertos. Com efeito, dado um $x \in I_r$ existirá um $a \in F$ tal que $d(x, a) < r$. Fixando $\varepsilon = r - d(x, a) > 0$, prova-se que $V_\varepsilon(x) \subseteq I_r$; de facto, sendo $y \in V_\varepsilon(x)$, tem-se $d(y, x) < \varepsilon = r - d(x, a)$, donde resulta,

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r \ ,$$

ou seja, $y \in I_r$.

Falta provar que a intersecção dos conjuntos abertos I_r é igual ao conjunto fechado F , devendo notar-se que os conjuntos I_r são em infinidade numerável (são tantos quantos os racionais positivos que já sabemos serem em infinidade numerável). Para tal notemos que:

a) O conjunto F está contido em qualquer I_r , tal resultando imediatamente do modo como se definem os conjuntos I_r ;

b) De a) resulta logo que,

$$F \subseteq \bigcap_{r \in Q^+} I_r \ ;$$

c) Note-se agora que, sendo $x \notin F$, tem-se $x \in \overline{F}$ e como $\overline{F}$ é um conjunto aberto (dado que F é fechado) existe uma $V_\varepsilon(x)$ contida em $\overline{F}$, ou seja, nessa $V_\varepsilon(x)$ não há pontos do conjunto F ; então, sendo r um racional positivo menor que ε , nenhum ponto $a \in F$ é tal que $d(x, a) < r < \varepsilon$, caso contrário esse a seria um ponto de F pertencente a $V_\varepsilon(x)$, o que já vimos não ser possível; mas então, por definição dos conjuntos I_r tem-se que o ponto x que vimos considerando não pertence aos I_r com racionais $r < \varepsilon$; em conclusão,

$$x \notin F \Rightarrow x \notin \bigcap_{r \in Q^+} I_r \ ,$$

o que equivale a ser $\bigcap_{r \in Q^+} I_r \subseteq F$;

d) As inclusões demonstradas em b) e em c) permitem concluir que $\bigcap_{r \in Q^+} I_r = F$, igualdade que se pretendia demonstrar.

O caso de um conjunto aberto A é agora imediato: o complementar de A é fechado, logo é a intersecção de uma infinidade numerável de conjuntos abertos, como acabou de demonstrar-se. Mas então o conjunto A será a reunião de uma infinidade numerável de complementares de conjuntos abertos (2ª lei de De Morgan); ou seja, o conjunto A será a reunião de uma infinidade numerável de conjuntos fechados (dado que os complementares dos abertos são fechados).

P20 : *A condição necessária e suficiente para que* <u>*a*</u> *seja ponto de acumulação de um conjunto A é que em qualquer vizinhança desse ponto se encontrem infinitos pontos de A*

<u>Demonstração</u> : A condição é obviamente suficiente: se em cada vizinhança do ponto se encontrarem infinitos pontos do conjunto, encontra-se pelo menos um ponto do conjunto e portanto, por definição, trata-se de um ponto de acumulação do conjunto em causa.

Vejamos que a condição é igualmente necessária. Admita-se que a é ponto de acumulação do conjunto A. Se em certa $V_\varepsilon(a)$ apenas se encontrarem finitos pontos do conjunto, sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os pontos de A distintos de a que se encontram naquela vizinhança. Fixando agora,

$$\delta = Mín\ \{\, d(x_1, a)\,;\, d(x_2, a)\,;\, \ldots\,;\, d(x_k, a)\,\} > 0\ ,$$

vê-se de imediato que em $V_\delta(a)$ não existem pontos do conjunto A para além eventualmente do próprio a : com efeito, se algum $y \neq a$ pertencesse ao conjunto A e igualmente a $V_\delta(a)$, ter-se-ia $d(y, a) < \delta < \varepsilon$ e portanto esse y pertenceria igualmente a $V_\varepsilon(a)$; o ponto y referido seria então um dos x_j ($j = 1, 2, \ldots, k$) o que obrigaria a ser $d(y, a) \geq \delta$, dado o modo como se definiu o valor δ. Mas se em $V_\delta(a)$ não existem pontos do conjunto A para além eventualmente do próprio a, conclui-se que o ponto a não pode ser ponto de acumulação do conjunto A . <u>Chega-se assim a uma contradição</u>: se tomarmos um ponto de acumulação de um conjunto A e admitirmos a existência de uma vizinhança desse ponto onde apenas haja um número finito de pontos do conjunto, conclui-se que tal ponto não pode ser ponto de acumulação desse conjunto. Tal significa que, sendo a ponto de acumulação de A, então necessariamente em qualquer vizinhança desse ponto existem infinitos pontos do conjunto.

Corolário 1 : *Os conjuntos finitos não admitem pontos de acumulação*

Corolário 2 : *É condição necessária de existência de pontos de acumulação de um conjunto, que este seja um conjunto infinito.*

3. <u>Teorema de Bolzano-Weierstrass</u>

Estuda-se seguidamente um importante teorema que assegura que qualquer subconjunto de **R** que seja limitado e infinito admite pelo menos um ponto de acumulação.

Teorema 1 : *Qualquer conjunto de números reais que seja limitado e infinito admite pelo menos um ponto de acumulação* (Bolzano - Weierstrass).

<u>Demonstração</u> : Sejam a e b , respectivamente, um minorante e um majorante do conjunto A. Represente-se por X o conjunto dos números $x \in [\, a\,, b\,]$ que tenham à sua direita (sejam excedidos por) uma infinidade de elementos do conjunto A. Claro que X é não vazio porque pelo menos $a \in X$ (o ponto a , minorante de A, tem à sua

direita infinitos elementos do conjunto A que por hipótese é infinito). Por outro lado, X é majorado, sendo por exemplo o real b um seu majorante (nenhum elemento de X excede b, porque à direita desse b não há elementos do conjunto A). Por ser X majorado, admite supremo, seja ele λ.

Vejamos agora que o referido supremo λ é ponto de acumulação do conjunto A, o que concluirá a demonstração do teorema. Dada uma qualquer $V_\varepsilon(\lambda) = \,]\, \lambda - \varepsilon , \lambda + \varepsilon \,[$,

a) À direita de $\lambda - \varepsilon$ há elementos de X, caso contrário $\lambda - \varepsilon$ seria um majorante de X inferior ao respectivo supremo;

b) Logo, à direita de $\lambda - \varepsilon$ existem infinitos elementos de A;

c) À direita de $\lambda + \varepsilon$ não pode haver uma infinidade de elementos de A, caso contrário $\lambda + \varepsilon \in X$ o que seria contrário ao facto de λ ser o supremo de X; logo,

d) Em $V_\varepsilon(\lambda) = \,]\, \lambda - \varepsilon , \lambda + \varepsilon \,[$ tem de haver uma infinidade de elementos de A.

Assim se conclui que $\lambda \in A'$ como se pretendia provar.

4. Conjuntos limitados

Conhece-se já o conceito de conjunto limitado, relativamente aos subconjuntos $A \subseteq \mathbf{R}$. Este conceito define-se, como se sabe, à custa dos conceitos de majorante e minorante os quais, por sua vez, pressupõem a existência de uma relação de ordem em $\mathbf{R}$. Tem-se a seguinte propriedade :

P21 : *Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ é limitado se e só se existe um real $a \in \mathbf{R}$ e um $\varepsilon > 0$ tal $A \subseteq V_\varepsilon(a)$.*

Demonstração : A condição é necessária. Se $A \subseteq \mathbf{R}$ é limitado, sejam $\mu , \lambda \in \mathbf{R}$, respectivamente, o ínfimo e o supremo de A . Fazendo,

$$a = \frac{\mu + \lambda}{2} \quad \text{e} \quad \varepsilon > \lambda - a$$

conclui-se imediatamente que $A \subseteq V_\varepsilon(a)$. A condição é igualmente suficiente, pois de $A \subseteq V_\varepsilon(a)$ tira-se imediatamente que o conjunto A é majorado e minorado.

Vejamos seguidamente algumas propriedades de fácil demonstração:

P22 : *A união de um número finito de conjuntos limitados é um conjunto limitado*

Demonstração : Sejam A_i , $i = 1, 2, ..., k$, conjuntos limitados. Existem $V_{\varepsilon_i}(a_i)$ tais que $A_i \subseteq V_{\varepsilon_i}(a_i)$. Passando a considerar $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, fixe-se um qualquer $a \in \mathbf{R}$ e seja $\varepsilon = \textit{máx}\ \varepsilon_i + \textit{máx}\ d(a_i , a)$; conclui-se com facilidade que $A \subseteq V_\varepsilon(a)$, ou seja o conjunto A é igualmente limitado.

P23 : *A intersecção de conjuntos limitados (em qualquer número) é um conjunto limitado.*

Demonstração: Basta notar que o subconjunto de um conjunto limitado é igualmente limitado e que a intersecção de conjuntos é sempre um subconjunto de qualquer um deles.

P24 : *O derivado e o fecho de um conjunto limitado são conjuntos limitados*

Demonstração : Basta fazer a demonstração para o derivado, porque sendo o derivado limitado, como o fecho (ou aderência) é a união do conjunto com o seu derivado ele é igualmente limitado (propriedade **P22**). Seja A limitado e vejamos então que A' é igualmente limitado. Seja $V_{\varepsilon}(a)$ a vizinhança que contém A e vejamos então que $A' \subseteq V_{2\varepsilon}(a)$, o que provará ser A' igualmente limitado. Dado um qualquer $y \in A'$, tem-se que em $V_{\varepsilon}(y)$ existe pelo menos um $x_{\varepsilon} \neq y$ que pertence a A, logo também a $V_{\varepsilon}(a)$; então por ser x_{ε} pertencente a $V_{\varepsilon}(a)$ e $V_{\varepsilon}(y)$, tem-se $d(y, a) \leq d(y, x_{\varepsilon}) + + d(x_{\varepsilon}, a) < 2\varepsilon$, ou seja $y \in V_{2\varepsilon}(a)$; em conclusão, $A' \subseteq V_{2\varepsilon}(a)$ como se queria provar.

No teorema seguinte estudam-se propriedades importantes dos conjuntos majorados e minorados.

Teorema 2 : *Sendo A majorado em* **R**, *o respectivo supremo λ ou é elemento do conjunto (e nesse caso é o máximo do conjunto), ou é ponto de acumulação do conjunto, podendo também ser uma coisa e outra. Do mesmo modo, sendo A minorado em* **R**, *o respectivo ínfimo μ ou é elemento do conjunto (e nesse caso é o mínimo do conjunto), ou é ponto de acumulação do conjunto, podendo também ser uma coisa e outra*

Demonstração : Faremos a demonstração para o caso do supremo, valendo para o ínfimo uma argumentação semelhante.

Se $\lambda = Sup\, A \in A$, tem-se $\lambda = Máx\, A$. Se pelo contrário for $\lambda = Sup\, A \notin A$, então no intervalo $]\, \lambda - \varepsilon\, , \lambda\, [$ deverá existir pelo menos um $x \in A$, caso contrário ter-se-ia $x \leq \lambda - \varepsilon$ para todo o $x \in A$ e então o número $\lambda - \varepsilon$ seria um majorante de A inferior ao respectivo supremo; mas então em qualquer $V_{\varepsilon}(\lambda) =]\, \lambda - \varepsilon\, , \lambda + \varepsilon\, [$ deverá existir pelo menos um $x \in A$ distinto de λ, ou seja, λ deverá ser ponto de acumulação de A.

Refira-se ainda , para terminar a demonstração, que é possível ser ao mesmo tempo $\lambda = Sup\, A \in A$ e $\lambda = Sup\, A \in A'$, como acontece por exemplo no caso do conjunto $A = [\, -1\, , 2\,]$.

Corolário 1 : *Sendo A um conjunto fechado, se for majorado tem máximo; se for minorado tem mínimo; se for limitado tem máximo e mínimo*

Demonstração : Resulta de imediato do teorema anterior atendendo a que se A for fechado, então $A' \subseteq A$.

5. Ampliação de R . Pontos impróprios

Tendo em vista simplificar certos enunciados no âmbito da teoria dos limites é usual ampliar o conjunto **R** considerando mais dois símbolos, a saber $+\infty$ (mais infinito) e $-\infty$ (menos infinito), genericamente designados por pontos impróprios ou pontos infinitos.

A relação de ordem em **R** é ampliada de modo a abranger os novos símbolos, considerando-se as seguintes convenções:

a) $-\infty < x < +\infty$, qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$;
b) $-\infty < +\infty$.

Neste quadro, qualquer conjunto $X \subseteq \mathbf{R}$ tem supremo, finito ou real se for majorado em **R** ou $+\infty$ se o não for ; do mesmo modo qualquer subconjunto de **R** tem ínfimo, finito ou real se for minorado em **R** ou $-\infty$ se o não for.

Definem-se também as vizinhanças (em relação a **R**) dos dois pontos impróprios, do modo seguinte:

$$V_\varepsilon(+\infty) =]\, 1/\varepsilon ,\, +\infty\, [\quad \text{e} \quad V_\varepsilon(-\infty) =]\, -\infty ,\, -1/\varepsilon\, [\ .$$

Os pontos impróprios podem então ser pontos de acumulação (impróprios) dos conjuntos $X \subseteq \mathbf{R}$ mas, em qualquer caso, no derivado X' não se incluem os eventuais pontos impróprios de acumulação. A definição é a seguinte: *diz-se que* $+\infty$ ($-\infty$) *é ponto impróprio de acumulação de* X *se só se em qualquer* $V_\varepsilon(+\infty)$ [$V_\varepsilon(-\infty)$] *se encontra pelo menos um ponto* $x \in X$.

6. Exercícios

1 - Mostre que,

a) $INT\ A = A - (\overline{A})'$;

b) $FRONT\ A = [\, A \cap (\overline{A})'] \cup [\, A' \cap (\overline{A})\,]$;

c) $EXT\ A = \overline{A} - A'$;

d) $INT\,(A \cap B) = (\, INT\ A\,) \cap (\, INT\, B\,)$.

2 - Mostre que se $FRONT\ A = \emptyset$, então A é um conjunto aberto.

3 - Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se denso se e só se $A \subseteq A'$ e diz-se perfeito se e só se $A = A'$ (ou seja, se e só se for denso e fechado). Prove que,

a) Sendo A_α conjuntos densos, em qualquer número, então $\bigcup_\alpha A_\alpha$ é igualmente um conjunto denso;

b) Sendo A denso, então A' e $Ad\ (A)$ são perfeitos ;

c*) A união de todos os conjuntos densos contidos num conjunto fechado é um conjunto perfeito;

d*) Sendo P a união de todos os conjuntos densos contidos num conjunto fechado F , então se for $A \neq \emptyset$ e $A \subseteq F - P$, o conjunto A não pode ser denso.

4 - Chama-se *distância* do ponto a ao conjunto A ao número real ,

$$d(a, A) = Inf\ \{\ d(a, x)\ :\ x \in A\ \}\ .$$

a) Mostre que $d(a, A)$ existe sempre (finita) ;

b*) Mostre que $d(a, A) = 0 \Leftrightarrow a \in Ad\, A$.

5 - Determine o interior, o fecho e o derivado de cada um dos subconjuntos de **R** :

a) $A = [\ 0\ ,2\ ] \cup]\ 3\ ,5\ [\cup \{\ 6\ ,7\ \}$;

b) $B = [\ 1\ ,2\ ] \cap \mathbf{Q}$.

6 - Determine o interior, a fronteira, o derivado e o fecho de cada um dos subconjuntos de **R** :

a) $A = \{ \ \dfrac{n}{n^2+1} \ : \ n \in \mathbf{N} \ \} \cup \,]\, 4/3 \ , \ 3/2 \, [\, \cup \{ \ \dfrac{n+1}{n} \ : \ n \in \mathbf{N} \ \}$;

b) $B = \{ \ 1 + (-1)^n \ . \dfrac{n+2}{n+1} \ : \ n \in \mathbf{N} \}$;

c) $C = \{ \ n^{(-1)^n} \ : n \in \mathbf{N} \}$;

d) $D = \{ \ n^{(-1)^m} \ : n \, , \, m \in \mathbf{N} \}$;

e) $E = \ \{ \, m \ + \ 1/n \ : \ m \, , \, n \in \mathbf{N} \}$;

f) $F = \ \{ \, 1/m \ + \ 1/n \ : \ m \, , \, n \in \mathbf{N} \}$.

7 - Quando possível dê exemplos de um subconjunto em **R** que :

a) Seja finito, não vazio e aberto;

b) Seja fechado, mas não limitado;

c) Seja igual ao seu derivado;

d) Seja igual à sua fronteira;

e) Tenha por exterior um conjunto limitado;

f) Seja um subconjunto próprio do seu derivado.

8 - Mostre que em **R** um conjunto aberto não pode ter máximo nem mínimo.

RESPOSTAS

5 - a) $INT \ A \ = \ ]\, 0 \, , 2 \, [\ \cup \,]\, 3 \, , 5 \, [$, $Ad \, A = [\, 0 \, , 2 \,] \ \cup [\, 3 \, , 5 \,] \cup \{ \, 6 \, , \, 7 \, \}$,

$A' = [\, 0 \, , 2 \,] \ \cup [\, 3 \, , 5 \,]$;

b) $INT \ B \ = \ \varnothing$, $B' = Ad \, B = [\, 1 \, , 2 \,]$.

6 - a) $INT \ A \ = \,]\, 4/3 \, , 3/2 \, [$,

$FRONT\ A = \{ \dfrac{n}{n^2+1} : n \in \mathbf{N} \} \cup \{ \dfrac{n+1}{n} : n \in \mathbf{N} \} \cup \{ 0 , 1 \}$,

$A' = [\, 4/3 , 3/2 \,] \cup \{ 0 , 1 \}$, $Ad\, A = A \cup \{ 0 , 1 \}$;

b) $INT\ B = \varnothing$, $FRONT\ B = B \cup \{ 0 , 2 \}$, $B' = \{ 0 , 2 \}$, $Ad\, B = FRONT\, B$;

c) $INT\ C = \varnothing$, $FRONT\ C = C \cup \{ 0 \}$, $C' = \{ 0 \}$, $Ad\, C = FRONT\ C$;

d) $INT\ D = \varnothing$, $FRONT\ D = D \cup \{ 0 \}$, $D' = \{ 0 \}$, $Ad\, D = FRONT\ D$;

e) $INT\ E = \varnothing$, $FRONT\ E = E \cup \mathbf{N}$, $E' = \mathbf{N}$, $Ad\, E = FRONT\ E$;

f) $INT\ F = \varnothing$, $FRONT\ F = F \cup \{ 0 \}$,

$F' = \{ 1/m : m \in \mathbf{N} \} \cup \{ 0 \}$, $Ad\, F) = FRONT\ F$.

7 - a) Impossível ; **b)** Por exemplo, $[\, 1 , +\infty\, [$; **c)** Por exemplo, $\mathbf{R}$; **d)** Por exemplo, $\mathbf{N}$; **e)** Por exemplo, $]\, -\infty , 1 \,] \cup [\, 2 , +\infty\, [$; **f)** Por exemplo, $\mathbf{Q}$.

CAPÍTULO III

SUCESSÕES DE TERMOS REAIS

1. <u>Generalidades</u>

Chama-se *sucessão de termos reais* a qualquer aplicação de **N** em **R** . O real u_1 que corresponde ao natural 1 é o primeiro termo da sucessão ; o real u_2 que corresponde ao natural 2 é o segundo termo da sucessão ; em geral, o real u_n que corresponde ao natural n é o enésimo – *termo geral* ou ainda *termo de ordem* n – da sucessão. Os termos de uma sucessão dispõem-se por ordem crescente dos respectivos índices (por ordem crescente dos naturais a que correspondem) : $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$.

A forma mais comum de definir em concreto na prática uma sucessão é indicar uma expressão analítica para o termo geral u_n , a qual permite obter qualquer termo particular por simples substituição de n pelos sucessivos valores desta variável; em certos casos porém a conveniente definição de u_n requer duas ou mais expressões analíticas. Os três seguintes exemplos são elucidativos :

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad ; \quad v_n = (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n^2+1} \quad ; \quad w_n = \begin{cases} 1/n & , \ n \ \textit{par} \\ 2+n & , \ n \ \textit{ímpar} \end{cases} \quad .$$

Um outro modo menos usual de definir uma sucessão consiste em dar uma regra que permita o cálculo de cada termo à custa de um ou mais termos precedentes (definição por recorrência), como nos dois exemplos seguintes:

$$u_n = \frac{1}{n+1} \cdot u_{n-1} \ , \ u_1 = 1/2 \quad ; \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-2} \ , \ v_2 = 1/2 \quad v_1 = -1 \ .$$

Por vezes a expressão analítica que define o termo geral u_n só tem significado ininterruptamente para $n > k$, com k natural fixo, caso em que primeiro termo da sucessão se obtém com $n = k + 1$, o segundo com $n = k + 2$ e assim por diante. Estes casos podem sempre reconverter-se à situação standard fazendo $v_n = u_{k+n}$, ou seja,

$$v_1 = u_{k+1} \ , v_2 = u_{k+2} \ , v_3 = u_{k+3} \ , \text{ etc.}$$

É o caso por exemplo de,

$$u_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \quad ,$$

que só tem significado para $n > 2$ e que gera ou origina a mesma sucessão que o termo geral

$$v_n = u_{2+n} = \frac{1}{(n+1)\,n} \quad (n = 1 , 2 , \ldots , n , \ldots) .$$

Uma sucessão $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$ de números reais diz-se *majorada* se e só se existir um $k \in \mathbf{R}$ tal que $u_n \leq k$, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$; diz-se *minorada* se e só se existir um $k \in \mathbf{R}$ tal que $u_n \geq k$, qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$; diz-se *limitada* se só se for majorada e minorada simultaneamente.

Uma sucessão diz-se *crescente* se e só se $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots$ e diz-se *decrescente* se e só se $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq \ldots$; genericamente, designam-se por *monótonas* as sucessões crescentes ou decrescentes .

No desenvolvimento da teoria desempenha papel significativo o chamado conjunto dos termos de uma sucessão. Trata-se do conjunto $U = \{ x : \exists \ n \in \mathbf{N} : u_n = x \}$, conjunto que, dependendo da sucessão, pode ser finito ou infinito numerável. Por exemplo, para a sucessão $u_n = 1/n$ tem-se $U = \{ 1 , 1/2 , 1/3 , \ldots \}$ e para a sucessão $u_n = (-1)^n$ tem-se $U = \{ -1 , 1 \}$. Cada elemento do conjunto U aparece pelo menos uma vez como termo da sucessão, mas nada impede que se repita um número finito ou uma infinidade de vezes, como acontece no caso da sucessão de termo geral $u_n = [(-1)^n + 1] .1/n$ em que se tem $U = \{ 0 , 1 , 1/2 , 1/3 , \ldots \}$, sendo que o zero se repete uma infinidade de vezes na sucessão (são nulos todos os termos de ordem ímpar) .

2. Conceito de limite. Teoremas fundamentais

Diz-se que $lim\, u_n = u$ (finito, $+\infty$ ou $-\infty$) se só se :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ n_\varepsilon \ : \ n > n_\varepsilon \Rightarrow \ u_n \in \mathrm{V}_\varepsilon(u) \ .$$

Consoante u seja finito, mais infinito ou menos infinito, a condição $u_n \in \mathrm{V}_\varepsilon(u)$ pode escrever-se respectivamente $| u_n - u | < \varepsilon$, $u_n > 1/\varepsilon$ ou $u_n < -1/\varepsilon$.

As sucessões com limite finito dizem-se *convergentes* e as sucessões convergentes para zero dizem-se *infinitésimos* . Tendo em conta a definição de limite, conclui-se de imediato que u_n converge para o real u se e só se a sucessão $v_n = u_n - u$ é um infinitésimo.

Conclui-se com facilidade que $lim\, u_n = u$ (finito) $\Rightarrow$ $lim\, | u_n | = | u |$; esta implicação resulta de imediato do facto de ser $|\, | u_n | - | u |\, | \leq | u_n - u |$, desigualdade sobre módulos cuja justificação se deixa ao cuidado do leitor . Note-se, no entanto, que pode existir $lim\, | u_n |$ sem que exista $lim\, u_n$, como mostra o exemplo da sucessão $u_n = (-1)^n$. No entanto, tem-se que $lim\, u_n = 0$ equivale a $lim\, | u_n | = 0$, como facilmente se conclui recorrendo à definição de limite.

Estudam-se seguidamente alguns teoremas importantes sobre limites.

Teorema 1 : *Sendo* $lim\, u_n = u$ *e* $v \neq u$ *não pode ter-se* $lim\, u_n = v$ (**unicidade do limite**)

Demonstração : Com $v \neq u$ é possível , escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, ter duas vizinhanças $\mathrm{V}_\varepsilon(u)$ e $\mathrm{V}_\varepsilon(v)$ sem elementos comuns (disjuntas). Ora, sendo $lim\, u_n = u$ tem-se $u_n \in \mathrm{V}_\varepsilon(u)$ de certa ordem em diante não podendo portanto ter-se $u_n \in \mathrm{V}_\varepsilon(v)$ de certa ordem em diante, ou seja, não pode ter-se $lim\, u_n = v$.

Teorema 2 : *Sucessão com limite finito é limitada*

<u>Demonstração</u> : Sendo $lim\ u_n = u$ (finito), tem-se de certa ordem m em diante

$$u_n \in V_1(u) =]\ u - 1\ ,\ u + 1\ [\ ,$$

sendo portanto a sucessão majorada por $\lambda = Máx\ \{\ u_1\ , u_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_m\ ,\ u + 1\ \}$ e minorada por $\mu = Min\ \{\ u_1\ , u_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_m\ ,\ u - 1\ \}$.

Note-se que a inversa do teorema precedente não é verdadeira como mostra o caso da sucessão limitada $u_n = (-1)^n$.

Teorema 3 : *Sendo u_n uma sucessão crescente, existe sempre lim u_n , finito se a sucessão for majorada, $+\infty$ no caso contrário. Sendo u_n uma sucessão decrescente, existe sempre lim u_n , finito se a sucessão for minorada, $-\infty$ no caso contrário*

<u>Demonstração</u> : Seja $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$ uma sucessão monótona crescente. Se a sucessão não for majorada, tem-se que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe certo termo de ordem n_ε que excede $1/\varepsilon$; dado tratar-se de uma sucessão crescente, tem-se então, a partir da referida ordem n_ε , $u_n > 1/\varepsilon$, ou seja, $lim\ u_n = +\infty$.

Se a sucessão for majorada, seja U o conjunto dos reais que são termos da sucessão ; claro que U é igualmente majorado e tem portanto supremo , $\lambda = Sup\ U$. Vejamos que se tem precisamente $lim\ u_n = \lambda$. Fixado um qualquer $\varepsilon > 0$, existe pelo menos um $x_\varepsilon \in U$ tal que, $\lambda - \varepsilon < x_\varepsilon \le \lambda$, caso contrário $\lambda - \varepsilon$ seria um majorante de U inferior ao respectivo supremo; esse x_ε será um certo termo da sucessão, seja ele o termo de ordem n_ε . Então, devido à monotonia crescente da sucessão todos os termos a partir dessa ordem pertencem ao intervalo $]\ \lambda - \varepsilon , \lambda]$, ou seja, $n > n_\varepsilon \Rightarrow |\ u_n - \lambda\ | < \varepsilon$, o que implica $lim\ u_n = \lambda$.

Tratando-se de uma sucessão monótona decrescente, uma argumentação semelhante conduz às seguintes conclusões: se a sucessão não for minorada, tem-se $lim\ u_n = -\infty$; se for minorada, tem-se $lim\ u_n = \lambda = Inf\ U$, em que U designa como no caso da monotonia crescente o conjunto dos reais que são termos da sucessão .

As conclusões precedentes subsistem no caso da monotonia só ocorrer a partir de certa ordem, como facilmente se compreende , pelo que se pode enunciar o seguinte,

Corolário : *Sendo u_n uma sucessão crescente de certa ordem em diante, existe sempre lim u_n , finito se a sucessão for majorada, $+\infty$ no caso contrário. Sendo u_n uma sucessão decrescente de certa ordem em diante, existe sempre lim u_n , finito se a sucessão for minorada, $-\infty$ no caso contrário*

Nos teoremas seguintes intervém uma condição importante verificada por certas sucessões. Uma sucessão de números reais verifica a condição de Cauchy se e só se,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_\varepsilon\ :\ n > m > n_\varepsilon \Rightarrow |\, u_n - u_m \,| < \varepsilon\ .$$

Prova-se com facilidade que as sucessões convergentes verificam a condição de Cauchy.

Teorema 4 : *Sendo* $lim\ u_n = u$ *(finito) , então a sucessão* u_n *verifica a condição de Cauchy*

<u>Demonstração</u> : Por ser $lim\ u_n = u$ (finito) , tem-se,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_\varepsilon\ :\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |\, u_n - u \,| < \varepsilon/2\ .$$

Considerando $n > m > n_\varepsilon$, temos então ,

$$|\, u_n - u_m \,| = |\, u_n - u + u - u_m \,| \ \leq\ |\, u_n - u| + |\, u - u_m \,| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\,,$$

ficando assim provado que a sucessão verifica a condição de Cauchy.

No teorema seguinte vamos ver que, inversamente, se uma sucessão verifica a condição de Cauchy. então tem limite finito. Com vista a facilitar a demonstração, vejamos dois resultados que nela serão utilizados:

a) <u>Se uma sucessão verifica a condição de Cauchy, então ela é limitada</u>. Com efeito, fixado por exemplo $\varepsilon = 1$, existe uma ordem n_1 tal que,

$$n > m > n_1 \Rightarrow |\, u_n - u_m \,| < 1\ \ ,$$

ou seja , fixando por exemplo $m = n_1 + 1$, tem-se , para $n > m$, $u_m - 1 < u_n < u_m + 1$; como os termos até à ordem m (inclusivé) são em número finito e os restantes são minorados por u_m -1 e majorados por u_m +1 , conclui-se que a sucessão é limitada.

b) <u>Se um conjunto X limitado tem dois quaisquer dos seus elementos diferindo em valor absoluto por menos de $\varepsilon > 0$, então tem-se, $0 \leq Sup\ X\ -\ Inf\ X \leq \varepsilon$</u> . Com efeito, se fosse $Sup\ X - Inf\ X > \varepsilon$, tomando $\delta > 0$ tal que $Sup\ X - Inf\ X - \delta > \varepsilon$, ter-se-ia,

$$(Sup\ X - \delta/2) - (Inf\ X + \delta/2)\ > \varepsilon\ \ ,$$

e haveria elementos $x',\, x'' \in X$ tais que,

$$x' > \ Sup\ X - \delta/2 \quad \text{e} \quad x'' < Inf\ X + \delta/2\ ,$$

donde resultaria,

$$x' - x''\ > (Sup\ X - \delta/2) - (Inf\ X + \delta/2)\ > \varepsilon\ \ ,$$

o que seria contrário à hipótese de quaisquer dois elementos de X diferirem em valor absoluto por menos de ε .

Posto isto, podemos enunciar e demonstrar o,

Teorema 5 : *Se* u_n *verifica a condição de Cauchy , então existe finito lim* u_n

Demonstração : Seja X_n o conjunto dos termos da sucessão com ordens de n em diante (inclusivé o n). Como se disse na alínea a) das considerações que precedem o teorema, a sucessão é limitada (porque supostamente verifica a condição de Cauchy) e daí decorre que os conjuntos X_n são limitados. Por outro lado, tem-se $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots \supseteq X_n \supseteq \ldots$ e então, fazendo $l_n = Inf\, X_n$ e $L_n = Sup\, X_n$, resulta : $l_1 \leq l_2 \leq \ldots \leq l_n \leq \ldots$ e $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq \geq L_n \geq \ldots$; existem portanto $l = lim\, l_n$ e $L = lim\, L_n$ (ver teorema 3) e claro que $l \leq L$;
além disso , l e L são finitos porque l_n e L_n são sucessões limitadas (tem-se $l_1 \leq l_n \leq \leq L_n \leq L_1$).

A partir da ordem n_ε os conjuntos X_n verificam a seguinte propriedade: quaisquer dois dos seus elementos diferem em valor absoluto por menos de ε , porque se trata de dois termos u_p e u_k com ordens maiores que n_ε e porque a condição de Cauchy (supostamente verificada pela sucessão) garante que nesse caso $|\, u_p - u_k \,| < \varepsilon$. Pelo que ficou dito na alínea b) das considerações que precedem o teorema, tem-se então $0 \leq L_n - l_n \leq \varepsilon$ para $n > n_\varepsilon$. Então deverá ser $0 \leq L - l \leq \varepsilon$ donde resulta, devido à arbitrariedade do valor de ε , $L = l$.

Vejamos agora que é precisamente $lim\, u_n = L = l$. Como para cada n , x_n pertence ao conjunto X_n , tem-se $l_n \leq u_n \leq L_n$ e de $lim\, l_n = l = L = lim\, L_n$ resulta então por enquadramento (ver adiante) que também $lim\, u_n = L = l$, como se queria provar.

O teorema está demonstrado.

Os teoremas que a seguir se demonstram relacionam o conceito de limite de uma sucessão com algumas noções topológicas já estudadas.

Teorema 6 : *Sendo* $A \subseteq \mathbf{R}$ *, a condição necessária e suficiente para que* a ($a \in \mathbf{R}$ *,* $a = +\infty$ *ou* $a = -\infty$) *seja ponto de acumulação de* A *é que exista exista uma sucessão* x_n *de elementos de A, com infinitos termos distintos de a, tal que lim* $x_n = a$

Demonstração : A condição é necessária. Sendo a ponto de acumulação de A , em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existe pelo menos um $x \neq a$ pertencente a A. Tomando então $\varepsilon_n = 1/n$, tem-se que em $V_{1/n}(a)$ existe um $x_n \neq a$ pertencente ao conjunto A. Vejamos que se tem $lim\, x_n = a$: dado um qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se para $n > n_\varepsilon$ (com certa ordem n_ε) que $1/n < \varepsilon$ e portanto,

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow x_n \in V_{1/n}(a) \;\wedge\; [\, V_{1/n}(a) \subset V_\varepsilon(a)\,] \;\Rightarrow\; x_n \in V_\varepsilon(a) \;,$$

assim se concluindo que $lim\, x_n = a$.

A condição é suficiente. Se existe uma sucessão x_n de elementos de A com infinitos termos distintos de a tal que $lim\, x_n = a$, vejamos que a é ponto de acumulação de A. Dada uma qualquer $V_\varepsilon(a)$ nela se encontram todos os termos x_n de certa ordem em diante (por ser $lim\ x_n = a$) e portanto, dado haver infinitos termos da sucessão distintos de a , nela se encontra pelo menos um elemento de A distinto de a , logo a é ponto de acumulação do conjunto A , como se pretendia provar.

Teorema 7 : *Um real* a *é aderente de um conjunto* $A \subseteq \mathbf{R}$ *se e só se existe uma sucessão* x_n *de elementos de* A *tal que* $lim\ x_n = a$

<u>Demonstração</u> : Se $a \in Ad\ A = A \cup A'$, ou $a \in A$ ou $a \in A'$. No primeiro caso, a sucessão de termo geral $x_n = a \in A$ tem por limite o ponto a ; no segundo caso, ou seja, se $a \in A'$, o teorema 6 garante que existe uma sucessão x_n de elementos de A que tem por limite o ponto a.

Inversamente, se existe uma sucessão x_n de elementos de A que tem por limite o ponto a, das duas uma: ou os termos da sucessão são todos iguais a a de certa ordem em diante e então $a \in A$; ou há infinitos termos x_n distintos de a e então pelo teorema 6 tem-se $a \in A'$; em qualquer dos casos $a \in Ad\ A = A \cup A'$.

Teorema 8 : *Um conjunto* $A \subseteq \mathbf{R}$ *é fechado se e só se, qualquer que seja a sucessão* x_n *de elementos de* A *com limite real, esse limite pertence ao conjunto* A

<u>Demonstração</u> : Se A é fechado, então $A = Ad\ A$. Seja x_n uma qualquer sucessão de elementos de A tal que $a = lim\ x_n$ $(a \in \mathbf{R})$; então, pelo teorema 7, esse real a pertence a $Ad\ A$, logo pertence a A .

Inversamente, se para qualquer sucessão x_n de elementos de A com limite real esse limite pertence a A , então $A = Ad\ A$ (ou seja, A é fechado). Basta provar que $Ad\ A \subseteq A$, porque a inclusão contrária é sempre verdadeira. Ora dado um qualquer $a \in Ad\ A$, o teorema 7 garante a existência de uma sucessão x_n de elementos de A e com limite real $a = lim\ x_n$ e portanto, por hipótese, $a \in A$. Fica assim provada a inclusão desejada.

3. <u>Sublimites. Teoremas fundamentais</u>

Dá-se o nome de *subsucessão* da sucessão u_1 , u_2 , ... , u_n , ... a qualquer sucessão u_{α_1} , u_{α_2} , ... , u_{α_n} , ... em que os α_n constituem uma sucessão estritamente crescente de números naturais. Claro que se $lim\ u_n = u$, também $lim\ u_{\alpha_n} = u$, porque se a partir de certa ordem n_ε se tem $u_n \in V_\varepsilon(u)$, a partir dessa mesma ordem tem-se também $u_{\alpha_n} \in V_\varepsilon(u)$, porque $n > n_\varepsilon \Rightarrow \alpha_n \geq n > n_\varepsilon$. Note-se que esta propriedade é válida mesmo no caso mais geral em que α_n é uma sucessão de números naturais, não necessariamente crescente , desde que $lim\ \alpha_n = +\infty$: com efeito, sendo n_ε a ordem a partir

da qual se tem $u_n \in V_\varepsilon(u)$ e sendo k_ε a ordem a partir da qual se tem $\alpha_n > n_\varepsilon$, resulta que $n > k_\varepsilon \Rightarrow \alpha_n > n_\varepsilon \Rightarrow u_{\alpha_n} \in V_\varepsilon(u)$, assim se concluindo que $lim\ u_{\alpha_n} = u$.

Os limites das subsucessões de uma sucessão de chamam-se *sublimites* da sucessão original.

O teorema seguinte tem grande utilidade prática na determinação dos sublimites de uma sucessão :

Teorema 9 : *Dada a sucessão u_n considerem-se as seguintes subsucessões em número finito :*

$$
\begin{array}{l}
u_{\alpha_1}\,,\, u_{\alpha_2}\,,\, \dots\,,\, u_{\alpha_n}\,,\, \dots\;,\;\; \textit{com limite } \alpha \\
u_{\beta_1}\,,\, u_{\beta_2}\,,\, \dots\,,\, u_{\beta_n}\,,\, \dots\;,\;\; \textit{com limite } \beta \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
u_{\omega_1}\,,\, u_{\omega_2}\,,\, \dots\,,\, u_{\omega_n}\,,\, \dots\;,\;\; \textit{com limite } \omega
\end{array}
$$

e admita-se que cada termo u_n da sucessão está numa e numa só das subsucessões consideradas. Nessas condições, nenhum $\lambda \neq \alpha$, β , ... , ω pode ser sublimite de u_n , ou seja, a sucessão apenas admite os sublimites α , β , ... , ω

<u>Demonstração</u> : Dado $\lambda \neq \alpha$, β , ... , ω fixe-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que a vizinhança $V_\varepsilon(\lambda)$ não tenha pontos em comum com nenhuma das vizinhanças $V_\varepsilon(\alpha)$, $V_\varepsilon(\beta)$, … , $V_\varepsilon(\omega)$. Todos os termos de u_{α_n} excepto quando muito um número finito deles pertencem a $V_\varepsilon(\alpha)$; todos os termos de u_{β_n} excepto quando muito um número finito deles pertencem a $V_\varepsilon(\beta)$; etc. Como as subsucessões são em número finito e nelas se encontram todos os termos de u_n , pode concluir-se que quando muito apenas um número finito de termos u_n poderão pertencer a $V_\varepsilon(\lambda)$, o que exclui a possibilidade de λ ser sublimite da sucessão.

Como aplicação do teorema anterior, considere-se a sucessão $u_n = (-1)^n \,.\, n + n$. Nas duas subsucessões, u_{2n} com limite $+\infty$ e u_{2n-1} com limite 0 , encontram-se todos os termos da sucessão original e, portanto, esta apenas admite como sublimites 0 e $+\infty$.

Note-se ainda que o teorema anterior deixa de ser válido se as subsucessões referidas no enunciado forem em numero infinito. Por exemplo, no caso da sucessão,

$$1\,,\,1\,,\,1/2\,,\,1\,,\,1/2\,,\,1/3\,,\,1\,,\,1/2\,,\,1/3\,,\,1/4\,,\;\dots\;,\,1\,,\,1/2\,,\,\dots\;,\,1/m\;,\;\dots\,,$$

considerando as subsucessões,

$1 , 1 , 1 , \dots , 1 , \dots$, com limite igual a 1

$1/2 , 1/2 , \dots , 1/2 , \dots$, com limite igual a 1/2

$1/3 , 1/3 , \dots , 1/3 , \dots$, com limite igual a 1/3

…………………………………………………

$$1/m\ ,\ 1/m\ ,\ \ldots\ ,\ 1/m\ ,\ \ldots\ , \text{ com limite igual a } 1/m$$

………………………………………………..

cada termo da sucessão original figura numa e numa só das subsucessões ; no entanto a sucessão dada admite também o sublimite 0 dado ser nulo o limite da seguinte subsucessão da sucessão dada : 1, 1/2 , 1/3 , 1/4 , … .

Estudam-se seguidamente alguns importantes teoremas envolvendo o conceito de sublimite.

Teorema 10 : *Qualquer sucessão u_n de números reais, admite uma subsucessão u_{α_n} monótona*

<u>Demonstração</u> : Seja K o conjunto dos naturais α tais que $n > \alpha \Rightarrow u_n > u_\alpha$. Se K for infinito, sejam $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$ os respectivos elementos dispostos por ordem cres-cente; como $\alpha_n \in K$, tem-se $p > \alpha_n \Rightarrow u_p > u_{\alpha_n}$ e resulta então, tomando $p = \alpha_{n+1} > \alpha_n$, $u_{\alpha_{n+1}} > u_{\alpha_n}$, o que prova ser u_{α_n} uma subsucessão crescente de u_n .

Caso K seja finito, seja $\beta_1 = 1 + Máx\ K$ se $K \neq \emptyset$ e $\beta_1 = 1$ se $K = \emptyset$; como $\beta_1 \notin K$, resulta da definição de K a existência de um natural $\beta_2 > \beta_1$ tal que $u_{\beta_2} \leq u_{\beta_1}$ (caso contrário seria $\beta_1 \in K$) ; e como, por sua vez, $\beta_2 \notin K$, resulta igualmente a existência de $\beta_3 > \beta_2 > \beta_1$ tal que $u_{\beta_3} \leq u_{\beta_2} \leq u_{\beta_1}$; prosseguindo deste modo, obtém-se uma subsucessão u_{β_n} monótona decrescente.

São corolários imediatos deste teorema:

Corolário 1 : *Qualquer sucessão u_n de números reais, admite uma subsucessão u_{α_n} com limite (finito ou infinito)*

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do teorema anterior, conjugado com o teorema 3.

Corolário 2 : *Qualquer sucessão limitada u_n de números reais, admite uma subsucessão u_{α_n} com limite finito*

<u>Demonstração</u> : Resulta do corolário anterior conjugado com o facto de uma sucessão limitada não admitir subsucessões com limites infinitos.

Teorema 11 : *Para que um certo b ($b \in \mathbf{R}$, $b = +\infty$ ou $b = -\infty$) seja sublimite de uma sucessão real x_n é necessário e suficiente que para qualquer $V_\varepsilon(b)$ e qualquer inteiro m, exista um inteiro $k > m$ tal que $x_k \in V_\varepsilon(b)$*

Demonstração : A condição é evidentemente necessária. Vejamos que é igualmente suficiente. Supondo a condição verificada, defina-se a subsucessão x_{α_n} de x_n pela seguinte condição: $\alpha_0 = 1$ e α_n é o menor inteiro maior que α_{n-1} que faz $x_{\alpha_n} \in V_{1/n}(b)$. Como $1/n < \varepsilon$ a partir de certa ordem n_ε, tem-se $x_{\alpha_n} \in V_{1/n}(b) \subset V_\varepsilon(b)$, a partir dessa mesma ordem, ou seja, $b = lim\ x_{\alpha_n}$, logo b é sublimite de x_n.

Teorema 12 : *A condição necessária e suficiente para que uma sucessão tenha limite é que não admita dois sublimites distintos.*

Demonstração : Que a condição é necessária ficou demonstrado nas considerações que imediatamente precedem o conceito de sublimite. Como se viu então, se $lim\ u_n = u$, também $lim\ u_{\alpha_n} = u$, qualquer que seja a subsucessão u_{α_n}.

Vejamos que a condição é também suficiente. Admita-se então que a (real , $+\infty$ $-\infty$) é o único sublimite da sucessão u_n. Caso a sucessão u_n não tivesse a como limite , então existiria um certo $\varepsilon > 0$ tal que $u_n \notin V_\varepsilon(a)$ para infinitos valores de n, sejam eles por ordem crescente α_1 , α_2 , ... , α_n , ... ; a correspondente subsucessão u_{α_n} não poderia evidentemente ter a como limite nem como sublimite mas admitiria um sublimite (pelo corolário 1 do teorema 10) o qual seria assim distinto de a ; este sublimite seria também um sublimite da sucessão inicial u_n, contrariando-se assim a hipótese assumida de a ser o único sublimite desta sucessão.

Teorema 13 : *O conjunto S dos sublimites finitos de uma sucessão x_n é um conjunto fechado*

Demonstração : Podemos supor que $S \neq \emptyset$, pois no caso de S ser vazio é obviamente fechado. Para provar que S é fechado bastará provar que $S' \subseteq S$. Dado $a \in S'$, em qualquer $V_\varepsilon(a)$ existe pelo menos um $x_\varepsilon \neq a$ pertencente a S, por definição de ponto de acumulação. Claro que esse x_ε , por pertencer a S , será limite de uma certa subsucessão x_{α_n} de x_n. Fazendo $\delta = \varepsilon - d(x_\varepsilon , a) > 0$, tem-se que todos os termos de x_{α_n} se encontram em $V_\delta(x_\varepsilon)$ de certa ordem n_ε em diante; então, dado um qualquer inteiro m, basta escolher n_0 a verificar $\alpha_{n_0} > m$ e $n_0 > n_\varepsilon$ para se ter, com $k = \alpha_{n_0} > m$,

$$d(x_k , a) \leq d(x_k , x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon , a) < \delta + d(x_\varepsilon , a) = \varepsilon ,$$

ou seja, $x_k \in V_\varepsilon(a)$; tal significa, de acordo com o teorema 11, que o ponto a é sublimite da sucessão x_n , ou seja, $a \in S$. Assim se prova que $S' \subseteq S$, ou seja, que o conjunto S é fechado.

Estamos agora em condições de definir os conceitos de *limite mínimo* e *limite máximo* de uma sucessão real. Consideremos os seguintes casos :

a) Se a sucessão u_n é limitada, o conjunto dos seus sublimites é um subconjunto de **R** fechado (ver teorema 13) e obviamente limitado . Tal conjunto admite então máximo e mínimo e pode definir-se : $lim\ max\ \ u_n$ = maior dos sublimites ; $lim\ min\ \ u_n$ = menor dos sublimites .

b) Se a sucessão u_n não é majorada mas é minorada, admite $+\infty$ como sublimite e então define-se $lim\ max\ \ u_n = +\infty$. Quanto ao limite mínimo, dois casos se podem dar : ou não há sublimites reais, sendo $+\infty$ o único sublimite e nesse caso também é $lim\ min\ \ u_n = +\infty$; ou há sublimites reais e então o respectivo conjunto será fechado e minorado, tendo portanto mínimo, mínimo esse que será precisamente $lim\ min\ \ u_n$.

c) Se a sucessão u_n é majorada mas não minorada, admite $-\infty$ como sublimite e então define-se $lim\ min\ u_n = -\infty$. Quanto ao limite máximo, dois casos se podem dar : ou não há sublimites reais, sendo $-\infty$ o único sublimite e nesse caso também é $lim\ max\ \ u_n = -\infty$; ou há sublimites reais e então o respectivo conjunto será fechado e majorado, tendo portanto máximo, máximo esse que será precisamente $lim\ máx\ \ u_n$.

d) Se a sucessão u_n não é majorada nem minorada, admite $-\infty$ e $+\infty$ como sublimites e tem-se então $lim\ min\ u_n = -\infty$ e $lim\ max\ \ u_n = +\infty$.

Claro que $lim\ min\ u_n \le lim\ max\ \ u_n$ e, para qualquer sublimite λ da sucessão, tem-se, $lim\ min\ u_n \le \lambda \le lim\ max\ \ u_n$. As considerações precedentes e o disposto no teorema 12 permitem enunciar :

Teorema 14 : *A condição necessária e suficiente para que a sucessão u_n tenha limite é que se verifique a igualdade $lim\ min\ u_n = lim\ max\ \ u_n$, sendo nesse caso o valor comum o limite da sucessão*

4. Regras elementares para cálculo de limites

4.1 – Soma, produto e quociente

As regras básicas do cálculo de limites, bem como os casos de indeterminação a que as mesmas podem conduzir, são supostamente conhecidas. Assim:

a) Limite da soma : $lim\ (u_n + v_n) = lim\ u_n + lim\ v_n$, com as convenções seguintes:
$a + (\pm\infty) = (\pm\infty) + a = \pm\infty$ (a real) ; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
Casos de **indeterminação** : $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$.

b) Limite do produto : $lim\ (u_n \,.\, v_n) = lim\ u_n \,.\, lim\ v_n$, com as convenções seguintes:
$a \,.\, (\pm\infty) = (\pm\infty) \,.\, a = \pm\infty$ (a real positivo) ; $a \,.\, (\pm\infty) = (\pm\infty) \,.\, a = \mp\infty$ (a real negativo) ; $(+\infty) \,.\, (+\infty) = (-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty$; $(+\infty) \,.\, (-\infty) = (-\infty) \,.\, (+\infty) = -\infty$.

Casos de **indeterminação** : $(\pm\infty) \,.\, 0$ e $0 \,.\, (\pm\infty)$.

c) Limite do quociente : $lim\ (u_n / v_n) = lim\ u_n / lim\ v_n$, com as convenções seguintes:

$a/(\pm\infty) = 0$; $(\pm\infty)/a = \pm\infty$ (a real positivo) ; $(\pm\infty)/a = \mp\infty$ (a real negativo) .

Casos de indeterminação : $0/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ e $(\pm\infty)/0$.

A título de exemplo demonstraremos apenas a regra do limite do quociente, no caso em que $\lim u_n = u$ finito e $\lim v_n = v$ finito e diferente de zero, que é uma das que envolve maior dificuldade.

Tem-se:

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v}\right| = \left|\frac{u_n\, v - v_n\, u}{v_n\, v}\right| = \left|\frac{u_n\, v + u_n\, v_n - u_n\, v_n - v_n\, u}{v_n\, v}\right| =$$

$$= \left|\frac{u_n\,(v - v_n) + v_n\,(u_n - u)}{v_n\, v}\right| \le \frac{|u_n|.|v_n - v| + |v_n|.|u_n - u|}{|v_n\, v|} \;;$$

de $\lim v_n = v \neq 0$, resulta $\lim |\, v_n \,| = |\, v \,| > 0$ e considerando um valor positivo α tal que $|\, v \,| - \alpha > 0$, tem-se,

$$0 < |\, v \,| - \alpha < |\, v_n \,| < |\, v \,| + \alpha \,,$$

de certa ordem k em diante; por outro lado, as sucessões u_n e v_n são limitadas (por serem convergentes) e , portanto , existe um λ tal que $|\, u_n \,| \le \lambda$ e $|\, v_n \,| \le \lambda$. Tem-se então,

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v}\right| \le \frac{\lambda.|v_n - v| + \lambda.|u_n - u|}{|v|.(|\,v| - \alpha)} \;,$$

ou seja,

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v}\right| \le \beta.(|v_n - v| + |u_n - u|) \;,$$

(β constante)

da supracitada ordem k em diante ; e como $\lim |\, u_n - u \,| = \lim |\, v_n - v \,| = 0$, também $\lim \beta.\,(|v_n - v| + |u_n - u|) = 0$ sendo, portanto,

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{u}{v}\right| \le \beta.\,(|v_n - v| + |u_n - u|) < \varepsilon \;,$$

de certa ordem n_ε em diante, o que prova ser $\lim\, (u_n / v_n) = u/v$.

4.2 – <u>Potência de expoente natural</u>

Sendo $\lim u_n = u$ e $k \in \mathbf{N}$, tem-se, aplicando a regra do limite do produto,

$$lim\ (u_n)^k \;=\; u^k = (\ lim\ u_n)^k \ ,$$

com as convenções seguintes:

$$(+\infty)^k = +\infty \ ;\ (-\infty)^k = +\infty \text{, se } k \text{ par ; } (-\infty)^k = -\infty \text{ , se } k \text{ ímpar .}$$

4.3 – <u>Raiz de índice natural</u>

Sendo $lim\ u_n = u$ e $k \in \mathbf{N}$, vejamos o que se passa com $lim\ \sqrt[k]{u_n}$. Note-se que com k par deve ser $u_n \geq 0$; com k ímpar, os termos de u_n podem ter qualquer sinal.

<u>1º Caso</u> : $u_n \geq 0$ para todos os n .

a) Quando seja $u = 0$, tem-se:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_\varepsilon\ :\ n > n_\varepsilon \Rightarrow |\, u_n \,| < \varepsilon^k \ \Rightarrow\ |\, \sqrt[k]{u_n}\ | < \varepsilon \Rightarrow lim\ \sqrt[k]{u_n} = 0\ ;$$

b) Quando seja $u = 1$, tem-se $u_n \leq \sqrt[k]{u_n} \leq 1$ ou $1 \leq \sqrt[k]{u_n} \leq u_n$, consoante seja, $u_n \leq 1$ ou $u_n \geq 1$. Em qualquer dos casos tem-se a desigualdade $|\ \sqrt[k]{u_n} - 1| \leq |\ u_n - 1|$ e então,

$$lim\ u_n = 1 \ \Rightarrow\ lim\ |\ u_n - 1| = 0 \ \Rightarrow\ lim\ |\ \sqrt[k]{u_n} - 1| = 0 \ \Rightarrow\ lim\ \sqrt[k]{u_n} = 1\ ;$$

c) Quando seja $u > 0$ e $u \neq 1$, tem-se $lim\ (u_n\,/\,u) = 1$ e então aplicando o resultado obtido em b),

$$lim\ \sqrt[k]{u_n\,/\,u} = 1 \ \Rightarrow\ lim\ \frac{\sqrt[k]{u_n}}{\sqrt[k]{u}} = 1 \ \Rightarrow\ lim\ \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{u}\ \ ;$$

d) Quando seja $u = +\infty$, tem-se,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_\varepsilon\ :\ n > n_\varepsilon \Rightarrow\ u_n > 1/\varepsilon^k \ \Rightarrow\ \sqrt[k]{u_n} > 1/\varepsilon \Rightarrow lim\ \sqrt[k]{u_n} = +\infty\,.$$

Tem-se sempre, portanto, $lim\ \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{lim\ u_n}$ desde que se convencione quanto à alínea d) : $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$.

<u>2º Caso</u> : $u_n < 0$ para todos ou alguns dos n .

Neste caso <u>k deve ser ímpar</u> para se assegurar a existência de $\sqrt[k]{u_n}$ no campo real .

Então:

a) Quando seja $u = 0$, o argumento da alínea a) do 1º caso aplica-se tal e qual;

b) Quando seja $u = 1$, tem-se $u_n \geq 0$ de certa ordem em diante e então a desigualdade $|\sqrt[k]{u_n} - 1| \leq |u_n - 1|$, obtida na alínea b) do 1º caso, é válida dessa ordem em diante concluindo-se como então que $\lim \sqrt[k]{u_n} = 1$;

c) Quando seja $u > 0$ e $u \neq 1$, o mesmo argumento que foi usado na alínea c) do 1º caso conduz a $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{u}$;

d) Quando seja $u = +\infty$, $\lim \sqrt[k]{u_n} = +\infty$ como na alínea d) do primeiro caso;

e) Quando seja $u < 0$, tem-se $-u_n$ com limite $-u > 0$ e aplicando os resultados das alíneas b) e c), resulta $\lim \sqrt[k]{-u_n} = \sqrt[k]{-u}$, donde resulta $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{u}$.

f) Quando seja $u = -\infty$, tem-se,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,,\, \exists\, n_\varepsilon \,:\, n > n_\varepsilon \Rightarrow u_n < -1/\varepsilon^k \Rightarrow \sqrt[k]{u_n} < -1/\varepsilon \Rightarrow \lim \sqrt[k]{u_n} = -\infty .$$

Tem-se sempre, portanto, $\lim \sqrt[k]{u_n} = \sqrt[k]{\lim u_n}$ desde que se convencione quanto às alíneas: $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$ e $\sqrt[k]{-\infty} = -\infty$ (k ímpar) .

4.4 – Potência de expoente racional positivo

Vejamos primeiro, como introdução, a definição de potência de expoente racional positivo. Dado $r \in \mathbf{Q}^+$ sabe-se que r se pode representar por uma fracção irredutível , $r = p/q$, com $p, q \in \mathbf{N}$. É esta representação que vai ser usada para definir potência de expoente racional positivo : $a^r = \sqrt[q]{a^p}$. Com esta definição a^r ($r > 0$) carece de sentido quando seja q par e $a < 0$ (repare-se que, sendo q par então p tem de ser ímpar porque p/q é supostamente uma fracção irredutível) .

Esta definição de potência de expoente racional positivo é coerente com a definição relativa ao caso de expoente natural, ou seja, com $r = n$ natural tem-se $r = n/1$ e, portanto, $a^r = \sqrt[1]{a^n} = a^n = a \,.\, a \,.\, \dots \,.\, a$ (n factores) .

Também facilmente se constata que as regras operatórias conhecidas sobre potências de expoente natural se estendem, com esta definição, às potências de expoente racional positivo. Assim, por exemplo, com $r = p/q$ e $s = m/n$, caso tenham sentido a^r e a^s , tem-se:

$$a^r \,.\, a^s = \sqrt[q]{a^p} \;.\; \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[qn]{a^{pn}} \;.\; \sqrt[qn]{a^{mq}} = \sqrt[qn]{a^{pn+mq}} \;;$$

caso qn e $pn + mq$ não sejam primos entre si dividem-se ambos pelo respectivo máximo divisor comum k assim se obtendo os quocientes α e β que são números naturais primos entre si : $qn = k\alpha$ e $pn + mq = k\beta$; então,

$$a^r . a^s = \sqrt[qn]{a^{pn+mq}} = \sqrt[\alpha]{a^\beta} = a^{\beta/\alpha} = a^{r+s} ,$$

porque a fracção irredutível β/α representa o racional,

$$\beta/\alpha = (k\beta)/(k\alpha) = \frac{pn + mq}{qn} = (p/q) + (m/n) = r + s .$$

Note-se ainda que não se levantam problemas de existência das sucessivas raízes envolvidas na argumentação precedente: se q ou n são pares, deve ser $a \geq 0$ e a existência das sucessivas raízes fica assegurada ; se q e n são ímpares, caso em que pode ser $a < 0$, qn e α são ímpares e fica também assegurada a existência das raízes em causa. Repare-se também que a igualdade,

$$a^{pn} . a^{mq} = a^{pn+mq} ,$$

é justificada pela regra de multiplicação de potências da mesma base e expoente natural.

Vejamos então o caso do limite da sucessão $(u_n)^r$, com $r \in \mathbf{Q}^+$. Sendo u o limite de u_n , admita-se que a representação fraccionária irredutível de r é p/q . Caso seja $u_n \geq 0$ para todos os n , tem-se igualmente $u \geq 0$ e então, aplicando o exposto em 4.2 e 4.3 :

$$lim\ (u_n)^r = lim \sqrt[q]{u_n^p} = \sqrt[q]{lim\ u_n^p} = \sqrt[q]{u^p} = u^r = (lim\ u_n)^r ,$$

com a convenção $(+\infty)^r = +\infty$. Caso seja $u_n < 0$ para todos ou alguns n , q deve ser ímpar e então também,

$$lim\ (u_n)^r = lim \sqrt[q]{u_n^p} = \sqrt[q]{lim\ u_n^p} = \sqrt[q]{u^p} = u^r = (lim\ u_n)^r ,$$

com as convenções: $(+\infty)^r = +\infty$, $(-\infty)^r = -\infty$ se p for ímpar e $(-\infty)^r = +\infty$ se p for par.

4.5 – Potência de expoente nulo

No caso de expoente nulo, define-se como se sabe $a^0 = 1$, na condição de ser $a \neq 0$ (não se define 0^0) . Esta definição conserva as propriedades operatórias das potências de expoente racional positivo como facilmente se verifica.

Tem-se então sempre $lim\ (\ u_n\ )^0 = 1$ independentemente do comportamento de u_n (exigindo-se apenas que $u_n \neq 0$).

4.6 - Potência de expoente racional negativo

Vejamos primeiro, como introdução, a definição de a^{-r}, com $-r \in \mathbf{Q}^-$. Como se sabe, define-se neste caso $a^{-r} = 1/a^r$, tendo a^r $(r > 0)$ o significado dado em 4.4.

Nos casos em que a^r $(r > 0)$ careça de sentido (vistos em 4.4), o mesmo acontece com a^{-r}, acrescendo agora um novo caso específico relativo ao expoente negativo : trata-se do caso em que $a = 0$, pois seria $0^{-r} = 1/0^r = 1/0$ (veja-se em 4.4 que, com $r > 0$, $0^r = 0$).

Com esta definição, as regras operatórias sobre potências de expoente racional positivo ou nulo, transmitem-se ao caso das potências de expoente racional negativo, como facilmente se verifica.

Sendo $lim\ u_n = u$, vejamos então o que sucede com $lim\ (u_n)^{-r}$, quando seja $-r$ racional negativo. Supondo a existência de $(u_n)^{-r}$, existe também $(u_n)^r$ e além disso $u_n \neq 0$, efectuando-se portanto o cálculo de $lim\ (u_n)^{-r}$ usando a relação,

$$lim\ (u_n)^{-r} = lim\ 1/(u_n)^r \ ,$$

conjugando o que se disse em 4.4 sobre $lim\ (u_n)^r$ com a regra do limite do quociente. Quando seja $lim\ u_n = u \neq 0$, conclui-se que ,

$$lim\ (u_n)^{-r} = lim\ 1/(u_n)^r = 1/u^r = u^{-r} \ ,$$

com a convenção $(\pm\infty)^{-r} = 0$. Fica indeterminado o caso em que $lim\ u_n = 0$, o qual exige uma análise cuidada do modo como u_n tende para zero e do valor do expoente negativo $-r$; o limite pode ser $+\infty$, $-\infty$ ou pura e simplesmente não existir.

5. Cálculo de limites por enquadramento

Admita-se que $u_n \leq w_n \leq v_n$ de certa ordem k em diante. É fácil concluir que, sendo $lim\ u_n = lim\ v_n = u \in \mathbf{R}$, também $lim\ w_n = u$. Com efeito , verificando-se $|\ u_n - u\ | < \varepsilon$ e $|\ v_n - u\ | < \varepsilon$ das ordens p_ε e q_ε em diante, respectivamente, tem-se,

$$n > p_\varepsilon \Rightarrow u - \varepsilon < u_n < u + \varepsilon \quad \wedge \quad n > q_\varepsilon \Rightarrow u - \varepsilon < v_n < u + \varepsilon \ ;$$

então, a partir da ordem $n_\varepsilon = Máx\ \{ p_\varepsilon ,\ q_\varepsilon ,\ k \}$, tem-se , por ser $u_n \leq w_n \leq v_n$, que $u - \varepsilon < w_n < u + \varepsilon$, donde resulta $lim\ w_n = u$.

Por outro lado , sendo $u_n \leq w_n$ de certa ordem em diante e $lim\ u_n = +\infty$, também $lim\ w_n = +\infty$, como é evidente; e sendo $u_n \geq w_n$ de certa ordem em diante e $lim\ u_n = -\infty$, também $lim\ w_n = -\infty$.

Vejamos três exemplos de cálculo de limites por enquadramento :
1) Cálculo de $lim\ \sqrt[n]{a}$ $(a > 0)$. Quando seja $a > 1$, tem-se $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$, donde $\sqrt[n]{a} = b_n + 1$, com $b_n > 0$. Então, $a = (1 + b_n)^n \geq 1 + n\, b_n$, ou seja , $0 < b_n \leq (a - 1)/n$, donde resulta de imediato por enquadramento que $lim\ b_n = 0$, ou ainda, $lim\ \sqrt[n]{a} = 1$.

Visto o caso $a > 1$, o caso $0 < a < 1$ é imediato : tem-se $1/a > 1$, logo $lim \sqrt[n]{1/a} = 1$ e, portanto,

$$lim \sqrt[n]{a} = lim \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = 1 .$$

Quanto ao caso $a = 1$, é óbvio que também $lim \sqrt[n]{a} = 1$.

2) Cálculo de $lim\ (1 + a/n^2)^n$, em que $a \in \mathbf{R}$. Designando por a_n o termo geral da sucessão, tem-se :

$$a_n = 1 + n.\frac{a}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{a^2}{n^4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{a^3}{n^6} + \cdots + \frac{n(n-1)\ \ldots 1}{n!}\cdot\frac{a^n}{n^{2n}} =$$

$$= 1 + \frac{a}{n} + (1-\frac{1}{n})\frac{a^2}{2!\,n^2} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{a^3}{3!\,n^3} + \cdots +$$

$$+ (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\frac{a^n}{n!n^n} \quad ;$$

então, para $n > |\, a \,|$,

$$0 \leq |\, a_n - 1 \,| \leq \frac{|a|}{n} + \frac{|a|^2}{n^2} + \frac{|a|^3}{n^3} + \cdots + \frac{|a|^n}{n^n} = \frac{|a|}{n}\cdot(1 + \frac{|a|}{n} + \frac{|a|^2}{n^2} + \cdots + \frac{|a|^{n-1}}{n^{n-1}}) =$$

$$= \frac{|a|}{n}\cdot\frac{1 - \frac{|a|^n}{n^n}}{1 - \frac{|a|}{n}} \leq \frac{|a|}{n}\cdot\frac{1}{1 - \frac{|a|}{n}} = \frac{|a|}{n-|a|} \quad ;$$

e dado que,

$$lim \frac{|a|}{n-|a|} = 0 ,$$

resulta por enquadramento, $lim\ |\, a_n - 1 \,| = 0$, ou seja, $lim\ a_n = 1$.

3) Cálculo de $lim\ (1 + a/r_n^2)^{r_n}$, em que r_n é uma sucessão de números racionais com limite $+\infty$ e $a \in \mathbf{R}$. Sendo p_n o maior inteiro que é menor ou igual a r_n , $p_n \leq r_n < p_n + 1$, tem-se por enquadramento que $lim\ p_n = +\infty$ (dado que $p_n > r_n - 1$).

Com $a > 0$, tem-se a partir de certa ordem (desde que $r_n \geq p_n > 0$),

$$1 \leq (1 + a/r_n^2)^{r_n} \leq (1 + a/p_n^2)^{p_n+1} = (1 + a/p_n^2)^{p_n} . (1 + a/p_n^2) \ ;$$

por ser p_n uma sucessão de inteiros tal que $lim\ p_n = +\infty$ e $lim\ (1 + a/n^2)^n = 1$ (ver exemplo 2), conclui-se que,

$$lim\ (1 + a/p_n^2)^{p_n} . (1 + a/p_n^2) = 1 ,$$

donde, por enquadramento, $lim\ (1 + a/r_n^2)^{r_n} = 1$.

Com $a < 0$, tem-se a partir de certa ordem (desde que $r_n \geq p_n > \sqrt{|a|}$),

$$1 \geq (1 + a/r_n^2)^{r_n} \geq (1 + a/p_n^2)^{p_n+1} = (1 + a/p_n^2)^{p_n} \,.\, (1 + a/p_n^2) \ ,$$

e um argumento semelhante ao utilizado no caso $a > 0$, permite concluir que também no caso em análise, $lim\ (1 + a/r_n^2)^{r_n} = 1$.

Com $a = 0$, vê-se directamente que, $lim\ (1 + a/r_n^2)^{r_n} = 1$.

6. <u>Exponencial de base natural. O número e de Neper</u>

6.1 – <u>Introdução</u>

Vamos mostrar que existe limite finito para a sucessão $x_n = (1+ x/n)^n$, com $x > 0$.

Tem-se,

$$x_n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{x^3}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\ \ldots 1}{n!}\cdot\frac{x^n}{n^n} =$$

$$= 1 + x + (1-\frac{1}{n})\,\frac{x^2}{2!} + (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\,\frac{x^3}{3!} + \cdots +$$

$$+ (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n})\,\frac{x^n}{n!} \ ,$$

e escrevendo estas igualdades para $n+1$, podemos comparar x_n com x_{n+1} e concluir que as parcelas que têm a mesma potência de x são maiores em x_{n+1} e , além disso, x_{n+1} tem ainda uma parcela positiva a mais no final.

Então, $x_n < x_{n+1}$, ou seja , trata-se de uma sucessão estritamente crescente.

Vejamos agora que se trata de uma sucessão majorada. Observando o desenvolvimento final obtido para x_n , conclui-se que,

$$x_n < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ ,$$

mas deverá notar-se que a soma do lado direito da desigualdade não é o majorante pretendido para a sucessão porque o respectivo valor depende da ordem n do termo da sucessão e o que se deseja é um valor real que majore todos os termos da sucessão (na realidade basta obter um número que majore todos os termos da sucessão de certa ordem fixa em diante, porque então, como a sucessão é monótona crescente, esse mesmo número majorará todos os termos da sucessão).

Vejamos então como obter um majorante dos termos x_n de certa ordem fixa em diante. Fixando um inteiro $m \geq x$, tem-se para $n > m$,

$$x_n < 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} =$$

$$= K_m + \frac{x^m}{m!} \cdot \left[1 + \frac{x}{(m+1)} + \frac{x^2}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{x^{n-m}}{(m+1)(m+2)\ldots n}\right] <$$

$$< K_m + \frac{x^m}{m!} \cdot \left[1 + \frac{x}{(m+1)} + \frac{x^2}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{x^{n-m}}{(m+1)^{n-m}}\right] =$$

$$= K_m + \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{x}{m+1}\right)^{n-m+1}}{1 - \frac{x}{m+1}} \quad ,$$

em que,

$$K_m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \; ;$$

atendendo agora a que $m + 1 > x$, tem-se a seguinte majoração para os termos x_n da sucessão :

$$x_n < K_m + \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{m+1}} \quad .$$

<u>Em conclusão</u>: Sendo $x > 0$, a sucessão $x_n = (1+ x/n)^n$ é crescente e majorada, logo existe finito $lim\,(1+ x/n)^n$. E dado que $x > 0 \Rightarrow x_n \geq 1 + x$, conclui-se que $lim\; x_n > 1$.

Podemos agora estudar da existência de $lim\,(1+ x/n)^n$, no caso em que $x < 0$ (no caso de ser $x = 0$ é óbvio que o limite existe e é igual à unidade) . De $x < 0$ resulta $-x > 0$, existindo portanto $lim\,(1- x/n)^n$. E como,

$$(1+ x/n)^n \,.\, (1- x/n)^n = (1- x^2/n^2)^n ,$$

obtém-se,

$$(1+ x/n)^n = \frac{(1 - x^2/n^2)^n}{(1 - x/n)^n} ,$$

donde se conclui pela existência de,

$$lim\,(1+ x/n)^n = \frac{1}{lim\,(1 - x/n)^n} \quad \text{(finito)} ,$$

dado que a sucessão do numerador tende para 1 (conforme exemplo 2 do ponto 3.) e existe significativo o limite do denominador (como vimos é maior que 1).

Portanto, em resumo, existe finito $lim\ (1+ x/n)^n$, qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$. Este limite será retomado mais adiante para futuros desenvolvimentos. Designando-o provisoriamente por $E(x)$, das considerações precedentes resultam de imediato as seguintes propriedades :

1) Para qualquer $x \in \mathbf{R}$, tem-se $E(x) = 1 / E(-x)$. Esta relação foi obtida para $x < 0$, quando se provou a existência de $E(x)$ para valores negativos de x ; para $x = 0$ ela é obviamente válida dado ser $E(0) = 1$; para $x > 0$, tem-se $-x < 0$, donde $E(-x) = 1 / E(x)$ e esta relação é equivalente a $E(x) = 1 / E(-x)$;

2) Para $x > 0$, tem-se como vimos $E(x) > 1$; para $x < 0$, dada a relação referida em 1) , tem-se $E(x) < 1$.

6.2 – O número e de Neper

Retome-se a sucessão $x_n = (1 + x/n)^n$ e considere-se $x = 1$. Obtém-se assim a sucessão $a_n = (1 + 1/n)^n$ que como vimos tem limite finito. Designaremos esse limite pela letra e :

$$e = lim\ (1 + 1/n)^n .$$

Como a sucessão $a_n = (1 + 1/n)^n$ é estritamente crescente, os seus termos darão sempre valores menores que e . Aproveitando a majoração que se fez em 6.1 para a sucessão $x_n = (1 + x/n)^n$ (no caso $x > 0$), podemos enquadrar o número e de forma a calcular o seu valor com a aproximação que se deseje. Ora viu-se que os termos da sucessão x_n (supondo $x > 0$) são majorados por,

$$M_m = K_m + \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{m+1}} \quad ,$$

com,

$$K_m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} ,$$

e em que m designa um qualquer inteiro maior ou igual a x . Como no caso em análise $x = 1$, podemos tomar um qualquer $m \geq 1$ para majorar os termos da sucessão. Assim, para $m = 1 , 2 , 3 , 4 , 5$ obtêm-se os majorantes (deixam-se os cálculos ao cuidado do leitor):

$$M_1 = 3 \ ; \ M_2 = 2{,}75 \ ; \ M_3 = 2{,}7222 \ldots \ ; \ M_4 = 2{,}71875 \ ; \ M_5 = 2{,}718333 \ldots .$$

Tem-se então, tomando por exemplo $m = 5$, $a_n < e \leq 2{,}718333 \ldots$, o que permite, calculando os termos a_n para alguns valores de n, conseguir com facilidade um enquadramento satisfatório para o número e ; por exemplo, tomando $n = 5000$, obtém-se $a_{5000} \approx 2{,}718010$, assim se concluindo que $2{,}718010 < e \leq 2{,}718333 \ldots$.

Prova-se que o número e é irracional, indicando-se a seguir a parte inicial da dízima que o representa : $e = 2{,}71828182845\ ...$.

Para terminar esta apresentação do número e , vamos mostrar que,

$$e = lim\ (1\ +\ 1/r_n)^{r_n}\ ,$$

em que r_n é uma qualquer sucessão de números racionais com limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Vejamos primeiro o caso em que $lim\ r_n = +\infty$. Sendo p_n o maior inteiro que é menor ou igual a r_n , $p_n \leq r_n < p_n + 1$, tem-se $lim\ r_n = +\infty \Rightarrow lim\ p_n = +\infty$ porque $p_n > r_n - 1$. A partir de certa ordem (desde que seja $r_n \geq p_n > 0$), tem-se então,

$$\left(1\ +\ \frac{1}{p_n\ +1}\right)^{p_n} \leq \left(1\ +\ \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} \leq \left(1\ +\ \frac{1}{p_n}\right)^{p_n\ +\ 1} .$$

Dado que,

$$lim\left(1\ +\ \frac{1}{p_n\ +1}\right)^{p_n\ +\ 1} = lim\left(1\ +\ \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = lim\left(1\ +\ \frac{1}{n}\right)^{n} = e\ ,$$

por serem p_n e $p_n + 1$ sucessões de inteiros ambas com limite $+\infty$, obtém--se,

$$lim\left(1\ +\ \frac{1}{p_n\ +1}\right)^{p_n} = lim\ \frac{\left(1+\dfrac{1}{p_n\ +\ 1}\right)^{p_n\ +\ 1}}{1+\dfrac{1}{p_n\ +\ 1}}\ =\ e/1 =\ e$$

$$lim\left(1\ +\ \frac{1}{p_n}\right)^{p_n\ +\ 1} =\ lim\ \left(1\ +\ \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} .\left(1\ +\ \frac{1}{p_n}\right) =\ e\ .\ 1 =\ e\ ,$$

donde se conclui por enquadramento que,

$$lim\ \left(1+\frac{1}{r_n}\right)^{r_n} =\ e\ .$$

Vejamos agora o caso em que $lim\ r_n = -\infty$. Tem-se,

$$\left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} . \left(1 + \frac{1}{-r_n}\right)^{r_n} = \left(1 - \frac{1}{r_n^2}\right)^{r_n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{-r_n}\right)^{-r_n}}{\left(1 - \frac{1}{(-r_n)^2}\right)^{-r_n}} \quad ;$$

de $lim\ r_n = -\infty$ resulta $lim\ (-\ r_n) = +\infty$ e então,

$$lim \left(1 + \frac{1}{r_n}\right)^{r_n} = e/1 = e\ ,$$

pois como se viu no exemplo 3 do ponto 5. a sucessão do denominador tende para a unidade.

O leitor mais atento poderá neste momento perguntar: mas a argumentação precedente não seria aplicável se r_n fosse uma sucessão de irracionais ? Aparentemente sim, mas o problema é que neste momento do nosso estudo não definimos ainda o que significa uma potência de expoente irracional, ou seja, $(1 + 1/r_n)^{r_n}$ carece de sentido quando r_n não for racional. O conhecimento intuitivo que o leitor eventualmente tenha sobre o significado de uma potência de expoente irracional não é suficientemente rigoroso para o nosso estudo. Mais adiante definiremos de forma rigorosa o conceito de potência de expoente irracional e veremos que a definição dada garante que, com r_n a tender para mais ou menos infinito, $lim\ (1 + 1/r_n)^{r_n} = e$, mesmo que os r_n não sejam racionais .

6.3 – Definição e propriedades da exponencial de base *e* (base natural)

Retomamos aqui o $lim\ (1 + x/n)^n$ estudado em 6.1. Viu-se que tal limite existe para todo o $x \in$ **R** , sendo então tal limite representado por $E(x)$ e estudadas duas das suas propriedades. Vamos de seguida estudar de forma mais completa as propriedades de $E(x)$, começando pelas duas já vistas anteriormente.

P1 : *Tem-se* $E(x) = 1/E(-x)$ *, qualquer que seja* $x \in$ **R**

P2 : *Para* $x > 0$ *, tem-se* $E(x) > 1$ *; para* $x = 0$*, tem-se* $E(x) = 1$ *; para* $x < 0$ *, tem-se* $E(x) < 1$

P3 : *Tem-se* $E(x) > 0$ *, qualquer que seja* $x \in$ **R**

Demonstração : Basta provar a desigualdade do enunciado para $x < 0$, já que **P2** a assegura nos outros casos . Ora , de acordo com **P1** , tem-se $E(x) = 1/E(-x)$ e como $x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow E(-x) > 1$, obtém-se $0 < E(x) < 1$ para $x < 0$.

P4 : *Sendo* r_n *uma sucessão de números racionais com limite* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *, tem-se* $E(x) = lim\ (1 + x/r_n)^{r_n}$

Demonstração : Para $x > 0$ a demonstração é tal qual a que foi efectuada em 6.2 para o caso particular $x = 1$ [note-se que, de acordo com a definição dada para o número e , $E(1) = e$] .

Para $x = 0$, o resultado é óbvio.

Resta o caso $x < 0$. Neste caso $-x > 0$ e note-se que se r_n se encontra nas condições do enunciado (sucessão de racionais com limite mais ou menos infinito), o mesmo acontece com $-r_n$; então,

$$E(x) = 1 / E(-x) = lim \;\; \frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{-r_n}\right)^{-r_n}} = lim \;\; (1 + x / r_n)^{r_n} \; ,$$

dado que a propriedade é válida para $-x > 0$ com a sucessão $-r_n$ nas condições do enunciado.

P5 : *Tem-se* $E(x+y) = E(x) \, . \, E(y)$ *, quaisquer que sejam* $x,y \in \mathbf{R}$

Demonstração : Note-se que,

$$(1 + x/n)^n \, . \, (1 + y/n)^n = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{x\,y}{n^2}\right)^n =$$

$$= B_n + \left[n \, B_{n-1} \, \frac{x\,y}{n^2} + \frac{n\,(n-1)}{2!} \, B_{n-2} \, \frac{x^2\,y^2}{n^4} + \cdots + \frac{n\,(n-1)\,\ldots 1}{n!} \, B_0 \, \frac{x^n\,y^n}{n^{2n}} \right] ,$$

em que por comodidade de notação se fez,

$$B_{n-j} = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^{n-j} \; , \text{ para } j = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \ldots , n \, .$$

Uma vez que $lim \; (1 + x/n)^n \, . \, (1 + y/n)^n = E(x) \, . \, E(y)$ e $lim \; B_n = E(x+y)$, a propriedade ficará provada se demonstrar que a sucessão,

$$u_n = \left[n \, B_{n-1} \, \frac{x\,y}{n^2} + \frac{n\,(n-1)}{2!} \, B_{n-2} \, \frac{x^2\,y^2}{n^4} + \cdots + \frac{n\,(n-1)\,\ldots 1}{n!} \, B_0 \, \frac{x^n\,y^n}{n^{2n}} \right] ,$$

tende para zero. Tem-se,

$$0 \leq |\, u_n \,| \leq n |B_{n-1}| \, \frac{|x\,y|}{n^2} + \frac{n(n-1)}{2!} \, |\, B_{n-2} \,| \, \frac{|x\,y|^2}{n^4} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{n!} \, |\, B_0 | \, \frac{|x\,y|^n}{n^{2n}} \; ,$$

e como, para $j = 1 \, , 2 \, , \ldots , n$,

$$| B_{n-j} | = \left| 1 + \frac{x+y}{n} \right|^{n-j} \leq \left(1 + \frac{|x+y|}{n} \right)^{n-j} \leq \left(1 + \frac{|x+y|}{n} \right)^{n} ,$$

podemos escrever,

$$0 \leq | u_n | \leq \left(1 + \frac{|x+y|}{n} \right)^n . [n \, \frac{|x\,y|}{n^2} + \frac{n\,(n-1)}{2!} \, \frac{|x\,y|^2}{n^4} + \cdots + \frac{n\,(n-1) \ldots 1}{n!} \, \frac{|x\,y|^n}{n^{2n}}] =$$

$$= \left(1 + \frac{|x+y|}{n} \right)^n . \left[\left(1 + \frac{|x\,y|}{n^2} \right)^n - 1 \right] ;$$

ora, como se viu no exemplo 2 do ponto 5. , tem-se,

$$lim \left(1 + \frac{|x\,y|}{n^2} \right)^n = 1 ,$$

e, portanto,

$$lim \left(1 + \frac{|x+y|}{n} \right)^n . \left[\left(1 + \frac{|x\,y|}{n^2} \right)^n - 1 \right] = E(\, | \, x + y \, | \,) \, . \, 0 = 0 ,$$

assim se concluindo por enquadramento que $lim \, | \, u_n \, | = 0$, ou seja, que $lim \, u_n = 0$, como se pretendia provar.

P6 : *Sendo* r *um número racional qualquer , tem-se que* $E(r.\, x) = [E(x)]^{\,r}$

<u>Demonstração</u> : Com $r = 0$, a igualdade é óbvia. Com $r \neq 0$, tem-se,

$$E(r.\, x) = lim \left(1 + \frac{r\,x}{n} \right)^n = lim \left[\left(1 + \frac{x}{n\,/\,r} \right)^{n/r} \right]^r = \left[lim \left(1 + \frac{x}{n\,/\,r} \right)^{n/r} \right]^r = [E(x)]^{\,r},$$

dado ser *n/r* uma sucessão de racionais a tender para mais ou menos infinito (consoante o sinal de *r*).

P7 : *Sendo* r *um número racional qualquer, tem-se* $E(r) = e^r$

<u>Demonstração</u> : Trata-se de um corolário imediato da propriedade anterior. Com efeito, fazendo na igualdade da propriedade anterior $x = 1$ e atendendo a que $E(1) = e$, obtém-se $E(r) = E(r.1) = [E(1)]^{\,r} = e^r$.

Estamos agora em condições de dar significado a e^x quando x seja irracional. Faz-se por definição $e^x = E(x)$, qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$. A propriedade **P7** garante que, para x

racional, a igualdade dá a e^x o significado que resulta da definição já conhecida de potência de expoente racional; para $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$, a igualdade amplia a noção de potência de base e ao caso de expoente irracional . Ou seja, para x racional e igualdade $e^x = E(x)$ é um teorema (propriedade P7) ; para x irracional a mesma igualdade é uma definição.

Claro que as propriedades de $E(x)$ são agora, com esta definição, as propriedades de e^x ; assim,

a) $e^x = 1/e^{-x}$, qualquer que seja o real x (**P1**) ;

b) $x > 0 \Rightarrow e^x > 1$; $x = 0 \Rightarrow e^x = 1$; $x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 1$ (**P2** e **P3**) ;

c) $e^x = lim\ (1 + x/r_n)^{r_n}$, com r_n sucessão de racionais com limite mais ou menos infinito (**P4**);

d) $e^{x+y} = e^x \,.\, e^y$, quaisquer que sejam os números reais x e y (**P5**);

e) $e^{rx} = (e^x)^r$, quaisquer que sejam o real x e o racional r (**P6**) .

Vejamos agora algumas propriedades adicionais importantes da exponencial $e^x = E(x)$ abandonando-se e ora em diante o símbolo provisório $E(x)$ que tinhamos adoptando e passando a usar exclusivamente e^x.

P8 : *Dada uma sucessão x_n de números reais tal que $lim\ x_n = 0$, tem-se $lim\ e^{x_n} = 1$*

<u>Demonstração</u> : Admita-se primeiro que $x_n \geq 0$ de certa ordem em diante. Do estudo feito no ponto 6.1 sobre o $lim\ (1 + x/n)^n$ decorre que , com $x > 0$,

$$1 < e^x \leq K_m + \frac{x^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x}{m+1}} \quad ,$$

com,

$$K_m = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \ ,$$

para m inteiro fixo maior ou igual a x ; sendo $x_n \geq 0$ de certa ordem em diante e $lim\ x_n = 0$, tem-se, a partir de certa ordem n_1 , $0 \leq x_n < 1$, e portanto para $m \geq 1$ e $n > n_1$,

$$1 < e^{x_n} \leq K_{m,n} + \frac{x_n^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{x_n}{m+1}} \quad ,$$

com,

$$K_{m,n} = 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \frac{x_n^3}{3!} + \cdots + \frac{x_n^{m-1}}{(m-1)!} \; ;$$

e como ,

$$lim\, x_n = 0 \;\wedge\; m \text{ fixo} \Rightarrow \; lim \;\; [\, K_{m,n} + \frac{x_n^m}{m!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_n}{m+1}} \;] = 1 \, ,$$

obtém-se por enquadramento, $lim\; e^{x_n} = 1$.

Sendo $x_n \leq 0$ de certa ordem em diante e $lim\, x_n = 0$, tem-se,

$$lim\; e^{x_n} = lim \; \frac{1}{e^{-x_n}} = 1 \, ,$$

porque então $- x_n \geq 0$ de certa ordem em diante e $lim\, (- x_n) = 0$.

Sendo $lim\, x_n = 0$ com infinitos $x_n \geq 0$ e infinitos $x_n < 0$, têm-se duas subsucessões x_{α_n} e x_{β_n} (uma para cada caso) ambas com limite nulo. E daí resulta,

$$lim\; e^{x_{\alpha_n}} = lim\; e^{x_{\beta_n}} = 1 \, .$$

P9 : *Dada uma sucessão x_n de números reais tal que lim $e^{x_n} = 1$, tem-se lim $x_n = 0$*

<u>Demonstração</u> : Se $e^{x_n} \geq 1$ de certa ordem em diante , tem-se dessa ordem em diante $x_n \geq 0$ e $e^{x_n} \geq 1 + x_n \geq 1$ donde resulta por enquadramento que $lim\, (1 + x_n) = 1$, ou seja, $lim\, x_n = 0$. Sendo $e^{x_n} \leq 1$, tem-se $e^{-x_n} \geq 1$, logo $lim\, (- x_n) = 0$, ou ainda, $lim\, x_n = 0$. Sendo, para infinitos n , $e^{x_n} \geq 1$ e para infinitos n , $e^{x_n} < 1$, têm-se duas subsucessões x_{α_n} e x_{β_n} (uma para cada caso) ambas com limite nulo; utilizando o mesmo argumento que na parte final da demonstração da propriedade **P8**, conclui-se que também neste caso $lim\, x_n = 0$.

P10 : *Dada uma sucessão x_n de números reais , tem-se lim $e^{x_n} = e^a$ se e só se lim $x_n = a$*

<u>Demonstração</u> : É uma consequência quase imediata de **P8** , **P9** e **P5**. Com efeito,

$$lim\; e^{x_n} = e^a \Leftrightarrow e^{-a} .\; lim\; e^{x_n} = e^{-a} .\; e^a = 1 \Leftrightarrow lim\; e^{x_n - a} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow lim\, (x_n - a) = 0 \;\Leftrightarrow lim\, x_n = a \, .$$

P11 : *Sendo $x < y$, tem-se* $e^x < e^y$

Demonstração : Fazendo $z = y - x > 0$, a propriedade **P5** permite escrever,

$$e^{y} = e^{z+x} = e^{z} \,.\, e^{x} > e^{x} \;,$$

porque $z > 0 \Rightarrow e^{z} > 1$.

P12 : *Dada uma sucessão* x_n *de números reais , tem-se* $lim\ e^{x_n} = +\infty$ *se e só se* $lim\ x_n = +\infty$ *; e tem-se* $lim\ e^{x_n} = 0$ *se e só se* $lim\ x_n = -\infty$

Demonstração : a) Caso do limite $+\infty$. Sendo $lim\ x_n = +\infty$, tem-se $x_n > 0$ de certa ordem em diante e então, dessa mesma ordem em diante, tem-se que $e^{x_n} > 1 + x_n$, desigualdade que permite concluir que $lim\ e^{x_n} = +\infty$. Inversamente, se $lim\ e^{x_n} = +\infty$, dado $\varepsilon > 0$, determine-se a ordem n_ε a partir da qual $e^{x_n} > e^{1/\varepsilon}$; para $n > n_\varepsilon$ tem-se então $x_n > 1/\varepsilon$ (caso se tivesse $x_n \leq 1/\varepsilon$, a propriedade **P11** obrigaria a ser $e^{x_n} \leq e^{1/\varepsilon}$), podendo portanto concluir-se que $lim\ x_n = +\infty$.

b) Caso do limite nulo. Tem-se:

$$lim\ e^{x_n} = 0 \;\Leftrightarrow lim\ e^{-x_n} = +\infty \text{ (porque } e^{x_n} \geq 0 \text{)} \;\Leftrightarrow\; lim\ (-x_n) = +\infty \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow lim\ \ x_n = -\infty \;,$$

como se queria provar.

P13 : *Dado um qualquer* $b \in \mathbf{R}^+$ *, existe um e um só* $\lambda \in \mathbf{R}$ *tal que* $e^{\lambda} = b$

Demonstração : A propriedade **P12** garante a possibilidade de e^{x} assumir valores arbitrariamente grandes (basta para tal tomar valores de x suficientemente grandes) e valores positivos suficientemente próximos de zero (basta para tal tomar valores de x negativos suficientemente grandes em módulo). Então dado $b \in \mathbf{R}^+$, existem valores μ e θ tais que $e^{\mu} < b < e^{\theta}$.

Considere-se o conjunto X dos valores $x \in [\mu \,,\, \theta]$ que fazem $e^{x} < b$: trata-se de um conjunto não vazio (pelo menos μ pertence a X) e majorado (θ é um majorante). Sendo $\lambda = Sup\ X$, tem-se portanto $\mu \leq \lambda \leq \theta$. Vejamos que não pode ter-se $e^{\lambda} < b$, nem $e^{\lambda} > b$, o que permitirá concluir que $e^{\lambda} = b$.

a) Não pode ser $e^{\lambda} < b$. Esta desigualdade implicaria $e^{\lambda} < e^{\theta}$, ou seja $\lambda < \theta$ ($\lambda \geq \theta \Rightarrow e^{\lambda} \geq e^{\theta}$, por **P11**). Existiria então uma sucessão de valores $x_n \in \,]\lambda \,,\, \theta[$ tal que $lim\ x_n = \lambda$, o que implicaria ser $lim\ e^{x_n} = e^{\lambda}$. Mas como estamos a considerar que $e^{\lambda} < b$, os termos da sucessão e^{x_n} verificariam a condição $e^{\lambda} < e^{x_n} < b$ de certa ordem em diante ; os correspondentes x_n pertenceriam então a X (pois $e^{x_n} < b$ e, por outro lado, $x_n \in]\lambda , \theta[\;\Rightarrow\; x_n \in [\mu , \theta]$) ; existiriam assim em X números maiores que o respectivo supremo λ ($x_n \in]\lambda , \theta[\;\Rightarrow \lambda < x_n$) .

b) Não pode ser $e^{\lambda} > b$. Se fosse, ter-se-ia $e^{x} < b < e^{\lambda}$ para todos os $x \in X$; por ser $\lambda = Sup\, X$, existiria para cada n um número $x_n \in X$ tal que $\lambda - 1/n < x_n \leq \lambda$ (caso contrário, $\lambda - 1/n$ seria um majorante do conjunto X menor que o respectivo supremo λ); claro que $lim\; x_n = \lambda$ e de $e^{x_n} < b < e^{\lambda}$ resultaria $lim\; e^{x_n} = e^{\lambda} \leq b < e^{\lambda}$, ou seja, $e^{\lambda} < e^{\lambda}$ o que é absurdo.

Ficou assim provado que $e^{\lambda} = b$. Vamos agora ver que λ é efectivamente o único valor que verifica a igualdade x , $e^{x} = b$. Se um outro valor β também fizesse $e^{\beta} = b = e^{\lambda}$, a propriedade **P11** permitiria concluir que necessariamente $\beta = \lambda$ (porque $\beta < \lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow e^{\beta} < e^{\lambda}$ e , por outro lado, $\beta > \lambda \Rightarrow e^{\beta} > e^{\lambda}$).

7. <u>Logaritmos de base natural</u>

O estudo feito para a exponencial de base e vai agora permitir-nos definir logaritmo natural e demonstrar as suas propriedades.
Dado $b \in \mathbf{R}^+$ viu-se na propriedade **P13** que existe um e um só valor real λ tal que, $e^{\lambda} = b$. A esse número λ chama-se *logaritmo natural* ou de *base* e do número positivo b e escreve-se, $\lambda = log\; b$. Das propriedades da exponencial de base e decorrem como muita facilidade as propriedades dos logaritmos naturais, a maioria das quais já são supostamente do conhecimento do leitor. Assim:

P14 : *Sendo* $b > 1$ *, tem-se* $log\; b > 0$ *; sendo* $b = 1$ *, tem-se* $log\; b = 0$ *; sendo* $b < 1$ *, tem-se* $log\; b < 0$

<u>Demonstração</u> : Basta notar que , por definição de logaritmo natural , $b = e^{log\; b}$ e atender a **P2** . Vejamos só a título de exemplo o caso de ser $b > 1$: neste caso tem-se $b = e^{log\; b} > 1$ donde resulta que $log\; b > 0$ (dado que, $log\; b \leq 0 \Rightarrow e^{log\; b} \leq 1$, pela propriedade **P2**).

P15 : *Com* $b , c > 0$ *, tem-se* $log\,(b.c) = log\; b + log\; c$

<u>Demonstração</u>: Trata-se de uma consequência imediata da propriedade **P5**:

$$e^{log\; b \;+\; log\; c} = e^{log\; b} \,.\, e^{log\; c} = b\,.\,c \Rightarrow log\,(b.c) = log\; b + log\; c\,.$$

P16 : *Com* b , $c > 0$ *, tem-se* $\log(b/c) = \log b - \log c$

<u>Demonstração</u> : Trata-se de uma consequência das propriedades **P1** e **P5** :

$$e^{\log b \,-\, \log c} = e^{\log b} \,.\, e^{-\log c} = \frac{e^{\log b}}{e^{\log c}} = b/c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log(b/c) = \log b - \log c \,.$$

P17 : *Com* $b > 0$ *e* $\underline{r}$ *racional qualquer,* $\log b^r = r \log b$

<u>Demonstração</u> : Basta atender à propriedade **P6**:

$$e^{r \log b} = \left(e^{\log b}\right)^r = b^r \,.$$

P18 : *Dados* x , $y > 0$ *, se* $x < y$ *então* $\log x < \log y$

<u>Demonstração</u> : De $x = e^{\log x} < y = e^{\log y}$, resulta $\log x < \log y$ pois, pela propriedade **P11**, se fosse $\log x \geq \log y$, seria $e^{\log x} \geq e^{\log y}$.

P19 : *Sendo* $x_n > 0$ *, tem-se:*

a) $\lim x_n = a > 0 \Leftrightarrow \lim \log x_n = \log a$ *;*

b) $\lim x_n = +\infty \Leftrightarrow \lim \log x_n = +\infty$*;*

c) $\lim x_n = 0 \Leftrightarrow \lim \log x_n = -\infty$

<u>Demonstração</u> : a) Tem-se, utilizando a propriedade **P10**,

$$\lim x_n = \lim \; e^{\log x_n} = a = e^{\log a} \;\Leftrightarrow\; \lim \log x_n = \log a \,;$$

b) Como em a), utilizando a propriedade **P12** (caso do limite mais infinito);

c) Como em a), utilizando a propriedade **P12** (caso de limite nulo).

8. <u>Definição e limites das potências de expoente irracional</u>

Viu-se na propriedade **P17** que, sendo $b > 0$ e r um número racional qualquer, $\log b^r = r \log b$. Desta igualdade decorre, por definição de logaritmo natural, que,

$$b^r = e^{r\,log\,b}.$$

<u>Quer dizer</u> : a potência de base $b > 0$ e expoente racional r qualquer , cujo significado já conhecemos , é dada pela igualdade precedente.

Vamos precisamente usar essa igualdade, cujo segundo membro tem significado mesmo com r irracional , para definir potência de expoente qualquer (racional ou irracional) e base positiva. Com $r \in \mathbf{R}$, racional ou irracional, e $b > 0$,

$$b^r = e^{r\,log\,b}.$$

Claro que, como vimos, para r racional, esta igualdade dá a b^r o significado usual já anteriormente estudado .

As propriedades das potências de expoente racional e base positiva são conservadas com este alargamento da noção de potência. Assim, por exemplo,

a) Com α e β reais e b real positivo,

$$b^\alpha . b^\beta = e^{\alpha\,log\,b} . e^{\beta\,log\,b} = e^{\alpha\,log\,b\,+\,\beta\,log\,b} =$$

$$= e^{(\alpha\,+\beta\,)\,log\,b} = b^{\alpha+\beta} \;;$$

b) Com α e β reais e b real positivo,

$$(\,b^\alpha)^\beta = \left(e^{\alpha\,log\,b}\right)^\beta = e^{\beta\,\,log\,(e^{\alpha\,log\,b})} = e^{\beta\,\alpha\,log\,b} = b^{\alpha\beta} \;,$$

sendo as duas últimas igualdades justificadas pela definição de logaritmo natural ;

c) Com α real e b real positivo,

$$b^\alpha = e^{\alpha\,log\,b} = \frac{1}{e^{-\alpha\,log\,b}} = \frac{1}{b^{-\alpha}} \;;$$

d) Com α real e b e c reais positivos,

$$1)\; b < c \;\wedge\; \alpha > 0 \;\Rightarrow\; log\,b < \;log\,c \;\;\Rightarrow\;\; \alpha\,log\,b < \;\alpha\,log\,c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; e^{\alpha\,log\,b} < \;e^{\alpha\,log\,c} \;\Rightarrow\; b^\alpha < c^\alpha;$$

$$2)\; b < c \;\wedge\; \alpha < 0 \;\Rightarrow\; log\,b < \;log\,c \;\;\Rightarrow\;\; \alpha\,log\,b > \;\alpha\,log\,c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ e^{\alpha\, log\, b} > e^{\alpha\, log\, c} \Rightarrow b^{\alpha} > c^{\alpha};$$

e) Com α e β reais e b real positivo,

1) $\alpha < \beta \wedge b > 1 \Rightarrow \alpha\, log\, b < \beta\, log\, b \Rightarrow e^{\alpha\, log\, b} < e^{\beta\, log\, b} \Rightarrow$

$\Rightarrow b^{\alpha} < b^{\beta}$;

2) $\alpha < \beta \wedge b < 1 \Rightarrow \alpha\, log\, b > \beta\, log\, b \Rightarrow e^{\alpha\, log\, b} > e^{\beta\, log\, b} \Rightarrow$

$\Rightarrow b^{\alpha} > b^{\beta}$.

As restrições que por vezes tivemos que impor no estudo feito nos pontos 6. e 7. em virtude de não estar ainda definido o conceito de potência de expoente irracional, podem agora ser levantadas. Assim,

A) Quando demonstramos que $e = lim\ (1 + 1/r_n)^{r_n}$, desde que o limite da sucessão r_n seja mais ou menos infinito, condicionamos o resultado ao facto de os r_n serem racionais. A demonstração apresentada serve, sem mais, para o caso em que r_n é uma sucessão de reais quaisquer a tender para mais ou menos infinito : com efeito, todas as propriedades das potências de expoente racional e base positiva que foram usadas na argumentação permanecem válidas para o caso geral de expoentes quaisquer.

B) Também a igualdade igualdade, $e^x = lim\ (1 + x/r_n)^{r_n}$, válida desde que a sucessão r_n tenda para mais ou menos infinito, dispensa a restrição de os r_n terem de ser racionais, pela mesma razão que a exposta em **A)** ; e quanto à igualdade $e^{r\,x} = (e^x)^r$, quaisquer que sejam o real x e o racional r , pode também ser dispensada esta última exigência , pois já se estabeleceu que $(b^{\alpha})^{\beta} = b^{\alpha\beta}$ para o caso geral (α e β reais e b real positivo).

C) Finalmente , quanto à igualdade $log\ b^r = r\ log\ b$, com $b > 0$ e r racional qualquer,
a exigência de ser r racional pode igualmente ser dispensada. Com efeito, com r racional ou irracional tem-se,

$$log\ b^r = log\ e^{r\, log\, b} = r\ log\ b,$$

por definição de logaritmo natural.

Vejamos agora o cálculo de $lim\ (u_n)^{\alpha}$, com $u_n > 0$ e $\alpha \neq 0$ qualquer (racional ou irracional) . No caso particular de α ser racional as conclusões a que vamos chegar deverão coincidir com as anteriormente obtidas (aplicadas ao caso particular de a base ser positiva). Note-se ainda que quando seja $\alpha = 0$, o limite da potência é sempre a unidade.

Tendo em conta que,

$$lim\ (u_n)^{\alpha} = lim\ e^{\alpha\, log\, u_n} ,$$

as propriedades da exponencial e logaritmo de base natural permitem tirar as seguintes conclusões, em que u designa $lim\, u_n$:

$$lim\,(u_n)^{\alpha} = \begin{cases} u^{\alpha} & , se\ u\ for\ finito\ positivo \\ +\infty & , se\ u = +\infty\ e\ \alpha > 0 \\ 0 & , se\ u = +\infty\ e\ \alpha < 0 \\ 0 & , se\ u = 0\ e\ \alpha > 0 \\ +\infty & , se\ u = 0\ e\ \alpha < 0 \end{cases} ;$$

tem-se portanto $lim\,(u_n)^{\alpha} = (\,lim\, u_n\,)^{\alpha}$, com as seguintes convenções:

$$(+\infty)^{\alpha} = +\infty\,,\ \text{se}\ \ \alpha > 0\ ;\ \ (+\infty)^{\alpha} = 0\,,\ \text{se}\ \ \alpha < 0\ ;\ \ 0^{\alpha} = 0\,,\ \text{se}\ \alpha > 0\ \ ;$$

$$0^{\alpha} = +\infty\,,\ \ \text{se}\ \ \alpha < 0\ .$$

9. A exponencial de base $b \neq 1$

Sendo $b > 0$ e $b \neq 1$, tem-se como vimos no ponto 8. que $b^x = e^{x\ log\ b}$ para todo o $x \in \mathbf{R}$. As propriedades da exponencial de base b são as que já foram estudadas no ponto anterior no âmbito do alargamento da noção de potência de base positiva a um expoente qualquer (racional ou irracional).

Tendo em conta que $lim\ b^{u_n} = lim\ e^{u_n\, log\ b}$ e aplicando as propriedades relativas a limites da exponencial e logaritmo de base natural, conclui-se (designando por u o limite da sucessão u_n) : $lim\ b^{u_n} = b^{u}$, desde que se convencione ,

$$b^{+\infty} = +\infty\,,\ \ \text{se}\ \ b > 1\ ;\ \ b^{+\infty} = 0\,,\ \ \text{se}\ \ b < 1\ ;\ \ b^{-\infty} = 0\,,\ \ \text{se}\ \ b > 1\ ;$$
$$b^{-\infty} = +\infty\,,\ \ \text{se}\ \ b < 1\ .$$

Pode igualmente definir-se logaritmo de base positiva $b \neq 1$: dado $x \in \mathbf{R}^+$, existe um e um só θ tal que $b^{\theta} = x$; com efeito, por definição de logaritmo natural e de potência de base positiva, tem-se,

$$x = e^{log\ x} \quad \text{e} \quad b^{\theta} = e^{\theta\ log\ b}\,,$$

e então a condição $b^{\theta} = x$ equivale a ser $log\,x = \theta\, log\,b$, a qual permite obter o θ desejado (único) ; ao valor de θ tal que $b^{\theta} = x$ (cuja existência e unicidade acaba de ser estabelecida) chama-se *logaritmo de x na base b* e representa-se por $log_b\ x$, calculando-se o seu valor pela igualdade,

$$log_b x = \theta = \frac{log\,x}{log\,b}\ ,$$

em que os logaritmos do segundo membro são os logaritmos naturais.

Para terminar o presente ponto considere-se o cálculo de um limite do tipo,

$$lim\ (u_n)^{v_n}\ ,\ \text{com}\ u_n > 0\ \ (\textit{Limite da exponencial potência}).$$

Este limite pode calcular-se usando a igualdade,

$$lim\ (u_n)^{v_n} = lim\ e^{v_n\, log\, u_n}\ .$$

Sendo $u = lim\ u_n$ e $v = lim\ v_n$, tem-se em geral ,

$$lim\ (u_n)^{v_n} = u^v = (lim\ u_n)^{lim\ v_n}\ ,$$

desde que se convencione,

$$0^{\,v} = 0 \quad \text{e} \quad (+\infty)^{\,v} = +\infty\ ,\ \text{se}\ 0 < v \le +\infty\ ;$$

$$0^{\,v} = +\infty \quad \text{e} \quad (+\infty)^{\,v} = 0\ ,\ \text{se}\ -\infty \le v < 0\ ;$$

$$u^{+\infty} = +\infty \quad \text{e} \quad u^{-\infty} = 0\ ,\ \text{se}\ 1 < u \le +\infty\ ;$$

$$u^{+\infty} = 0 \ \ \text{e} \quad u^{-\infty} = +\infty\ ,\ \text{se}\ 0 \le u < 1\ .$$

Há, no entanto, a considerar os seguintes casos de indeterminação, que resultam das indeterminações que podem surgir ao calcular $lim\ v_n\,.\,log\ u_n$ e que são: 0^0 , $(+\infty)^0$, $1^{+\infty}$ e $1^{-\infty}$.

10. <u>Fórmulas de Bernoulli para o cálculo de limites</u>

Vão deduzir-se as fórmulas de Bernoulli que se revelam úteis para levantamento de indeterminações no cálculo de limites envolvendo exponenciais e logaritmos.

Retome-se a igualdade $e^x = lim\ (1 + x/n)^n$, com $x \in \mathbf{R}$. Tem-se,

$$(1+ x/n)^n = 1 + n \cdot \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{x^3}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\,\ldots\,1}{n!} \cdot \frac{x^n}{n^n}\,,$$

e designem-se por $\xi_k^{(n)}$ os coeficientes,

$$\xi_k^{(n)} = \frac{n(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}{n^k} = 1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot \cdots \cdot (1 - \frac{k-1}{n})$$

$$k = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n\ .$$

Para cada k fixo $\xi_k^{(n)}$ é uma sucessão em n e é óbvio que $lim\ \xi_k^{(n)} = 1$.

Fixe-se o natural m e separem-se no desenvolvimento de $(1+ x/n)^n$ as primeiras m parcelas das $n - m + 1$ restantes, obtendo-se então:

$$(1 + x/n)^n = 1 + x \,.\, \xi_1^{(n)} + \frac{x^2}{2!} \cdot \xi_2^{(n)} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \xi_{m-1}^{(n)} +$$

$$+ \frac{x^m}{m!} \cdot \left[\xi_m^{(n)} + \frac{x}{m+1} \cdot \xi_{m+1}^{(n)} + \cdots + \frac{x^{n-m}}{(m+1)(m+2)\ldots n} \cdot \xi_n^{(n)} \right]$$

ou seja,

$$(1 + x/n)^n = 1 + x \,.\, \xi_1^{(n)} + \frac{x^2}{2!} \cdot \xi_2^{(n)} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \xi_{m-1}^{(n)} + \frac{x^m}{m!} \cdot \xi_m^{(n)}(x) \quad ,$$

em que,

$$\xi_m^{(n)}(x) = \xi_m^{(n)} + \frac{x}{m+1} \cdot \xi_{m+1}^{(n)} + \cdots + \frac{x^{n-m}}{(m+1)(m+2)\ldots n} \cdot \xi_n^{(n)} \; .$$

Passando ao limite em n (m é fixo) em ambos os membros, obtém-se no primeiro e^x e, no segundo, o bloco das m primeiras parcelas tende para,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \quad ,$$

porque cada um dos $\xi_k^{(n)}$ ($k = 1 , 2 , \ldots , m$-1) tende com se viu para a unidade. A parcela residual,

$$\frac{x^m}{m!} \cdot \xi_m^{(n)}(x) \; ,$$

do segundo membro tem também de ter limite finito (porque é a diferença de duas sucessões com limite finito) , o que permite concluir que existe também finito o $lim\ \xi_m^{(n)}(x)$; com efeito, com $x \neq 0$,

$$\frac{x^m}{m!} \neq 0 \;\wedge\; lim\ \frac{x^m}{m!} \cdot \xi_m^{(n)}(x) \text{ finito } \Rightarrow lim\ \xi_m^{(n)}(x) \text{ finito };$$

com $x = 0$, $\xi_m^{(n)}(x) = \xi_m^{(n)}$ e claro que $lim\ \xi_m^{(n)}(x) = lim\ \xi_m^{(n)} = 1$.

Fazendo, $\xi_m(x) = lim\ \xi_m^{(n)}(x)$, podemos então escrever, como resultado da passagem ao limite em n ,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!} \cdot \xi_m(x) \; .$$

Note-se agora que, por ser $\xi_k^{(n)} \leq 1$, a expressão que define $\xi_m^{(n)}(x)$ permite obter,

$$|\xi_m^{(n)}(x) - \xi_m^{(n)}| \leq \frac{|x|}{m+1} + \frac{|x|^2}{(m+1)^2} + \cdots + \frac{|x|^{n-m}}{(m+1)^{n-m}} \ ;$$

quando seja $m + 1 > | x |$, tem-se portanto:

$$|\xi_m^{(n)}(x) - \xi_m^{(n)}| \leq \frac{\dfrac{|x|}{m+1} - \dfrac{|x|^{n-m+1}}{(m+1)^{n-m+1}}}{1 - \dfrac{|x|}{m+1}} \leq \frac{\dfrac{|x|}{m+1}}{1 - \dfrac{|x|}{m+1}} = \frac{|x|}{m+1-|x|} \ ,$$

a passando ao limite em n obtém-se,

$$|\xi_m(x) - 1| \leq \frac{|x|}{m+1-|x|} \ , \text{ para } m + 1 > | x | \ .$$

As considerações precedentes permitem-nos demonstrar com facilidade o seguinte,

Teorema 15 : *Tem-se,*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!} \cdot \xi_m(x)$$

e para cada sucessão x_n de valores de x que tenda para zero, tem-se lim $\xi_m(x_n) = 1$

<u>Demonstração</u> : A igualdade do enunciado foi já estabelecida nas considerações que precedem o teorema, faltando apenas provar a segunda parte. Sendo $\lim x_n = 0$, tem-se a partir de certa ordem n_1 , $| x_n | < 2$; então fixando um qualquer $m \in \mathbf{N}$, será sempre $m + 1 \geq 2 > | x_n |$ (a partir da ordem n_1) e, portanto a desigualdade que precede o teorema permite escrever,

$$|\xi_m(x_n) - 1| \leq \frac{|x_n|}{m+1-|x_n|} \ , \text{ para } n > n_1 \ ,$$

daí resultando por enquadramento que $\lim \xi_m(x_n) = 1$.

A igualdade do teorema pode ser escrita com $m = 1 , 2 , 3 , ...$, conforme as conveniências de cálculo. E pode ser usada no cálculo de limites em que intervenha e^{x_n} e seja $\lim x_n = 0$. Assim por exemplo , com $m = 1$, e^{x_n} pode ser substituido por,

$$1 + x_n \cdot \xi_1(x_n) \ , \text{ sendo que } \lim x_n = 0 \Rightarrow \lim \xi_1(x_n) = 1 \ ;$$

com $m = 2$, e^{x_n} pode ser substituido por,

$$1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} \cdot \xi_2(x_n) \ , \text{ sendo que } \lim x_n = 0 \Rightarrow \lim \xi_2(x_n) = 1 \ .$$

Nos exemplos de aplicação em que não haja perigo de confusão sobre qual a sucessão envolvida, escreve-se ξ_1 em vez de $\xi_1(x_n)$, ξ_2 em vez de $\xi_2(x_n)$ e assim por diante, para não sobrecarregar a notação.

Vejamos dois exemplos de aplicação.

1) Cálculo de $lim\ (e^{1/n} - 1).\ n$. Como $lim\ 1/n = 0$, tem-se:

$$lim\ (e^{1/n} - 1)\ =\ lim\ (\ 1 + \frac{1}{n}\ .\ \xi_1 - 1\ ).\ n\ =\ lim\ \ \xi_1 = 1\ .$$

2) Cálculo de $lim\ (2^{1/n} - 1 - 1/n).\ n^2$. Como $lim\ 1/n = 0$, tem-se:

$$lim\ (2^{1/n} - 1 - 1/n).\ n^2 = \ lim\ [e^{(1/n).log\ 2}\ -\ 1\ -\ 1/n]\ .\ n^2\ =$$

$$= lim\left[1 + \frac{log\ 2}{n} + \frac{log^2\ 2}{2!\ n^2}\cdot\xi_2 - 1 - \frac{1}{n}\right]\cdot n^2\ =$$

$$= lim\left[n(log\ 2\ -\ 1)\ +\ \frac{log^2\ 2}{2!}\cdot\xi_2\right] = -\infty\ .$$

Com base no teorema 15 vão obter-se duas fórmulas aplicáveis aos limites dos logaritmos:

Teorema 16 : *Tem-se* $log\ (1 + x\ ) = \ x\ -\ x^2\ .\ \lambda(x)$ *e para cada sucessão* x_n *de valores de* x *que tenda para zero, tem-se* $lim\ \lambda(\ x_n\ ) = 1/2$

<u>Demonstração</u> : Considere-se a função,

$$\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ -\ log\ (1 + x)}{x^2} & ,\ \ x \neq 0 \\ 1/2 & ,\ \ x = 0 \end{cases}\ .$$

Da definição de $\lambda(x)$ resulta que para $x \neq 0$ e para $x = 0$, $log\ (1 + x\ ) = \ x\ -\ x^2\ .\ \lambda(x)$. Considere-se agora uma sucessão x_n de valores de x com limite nulo. Se $x_n\ \neq 0$ de certa ordem em diante, tem-se a partir dessa ordem,

$$\lambda(\ x_n\ ) = \frac{x_n\ -\ log\ (1 + x_n\ )}{x_n^2}\ = \frac{1 + x_n\ -\ 1\ -\ log\ (1 + x_n\ )}{(1 + x_n\ -\ 1)^2} =$$

$$= \frac{e^{log\ (1+x_n)}\ -\ 1\ -\ log\ (1+x_n\ )}{\left[e^{log\ (1+x_n\ )}\ -\ 1\right]^2}\ ;$$

aplicando a fórmula do teorema 15 (no numerador com $m = 2$ e no denominador com $m = 1$), obtém-se:

$$\lambda(\ x_n\ ) = \frac{1\ +\ log\ (1+x_n\ )\ +\ \dfrac{log^2\ (1+x_n\ )}{2!}\cdot\xi_2\ -\ 1\ -\ log\ (1+x_n\ )}{\left[1\ +\ \xi_1\ \cdot log\ (1+x_n\ )\ -\ 1\right]^2}\ = \ \frac{1}{2}\cdot\frac{\xi_2}{\xi_1}\ ,$$

e como,

$$lim\ x_n = 0 \ \Rightarrow \ lim\ log\,(1 + x_n) = 0 \ \Rightarrow lim\ \xi_1 = \ lim\ \xi_2 = 1 \ ,$$

obtém-se, $lim\ \lambda(\,x_n\,) = 1/2$.

Se $x_n = 0$ de certa ordem em diante, tem-se $\lambda(\,x_n\,) = 1/2$ a partir dessa ordem [ver definição de $\lambda(x)$] e então também $lim\ \lambda(\,x_n\,) = 1/2$.

Enfim, se há infinitos $x_n \neq 0$ e infinitos $x_n = 0$, há duas subsucessões x_{α_n} e x_{β_n} e, para cada uma delas, $lim\ \lambda(\,x_{\alpha_n}\,) = 1/2$ e $lim\ \lambda(\,x_{\beta_n}\,) = 1/2$, pelo que também neste caso, $lim\ \lambda(x_n\,) = 1/2$.

Corolário 1 : *Tem-se* $log\,(1+ x) = x\ .\ \eta(x)$ *e para cada sucessão* x_n *de valores de x que tenda para zero, tem-se* $lim\ \eta(\,x_n\,) = 1$

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do teorema 16. Com efeito,

$$log\,(1 + x\,) = \ x \ - \ x^2\ .\ \lambda(x) = \ x\ .\ [\ 1\ -\ x\ .\ \lambda(x)] = \ x\ .\ \eta(x)\ ,$$

com $\eta(x) = 1\ -\ x\ .\ \lambda(x)$. Sendo $lim\ x_n = 0$, conclui-se logo que $lim\ \eta(\,x_n\,) = 1$, como se pretendia provar.

Corolário 2 : *Tem-se* $(1+ x)^{\alpha} = 1+\ \alpha\ .\ x\ .\ \zeta\,(x)$ *e para cada sucessão* x_n *de valores de x que tenda para zero, tem-se* $lim\ \zeta\,(x_n\,) = 1$

<u>Demonstração</u> : Tem-se, pelas fórmulas do teorema 15 e corolário 1 do teorema 16,

$$(1+ x)^{\alpha} = \ e^{\alpha\ log(1+x)} = 1 +\ \xi_1 .\alpha\,.\ log\,(1 + x) = 1 +\ \xi_1 .\alpha\,.\ x\ .\ \eta(x)\ ,$$

em que ξ_1 depende de $\alpha\ .\ log\ (1\ +\ x)$, logo de x . Fazendo, $\zeta\,(x) =\ \xi_1 .\eta(x)$, obtém-se então, $(1+ x)^{\alpha} = 1+\ \alpha\ .\ x\ .\ \zeta\,(x)$.

Sendo agora x_n uma sucessão de valores de x com limite nulo, tem-se que é nulo o $lim\ log\,(1+ x_n\,)$ e portanto $lim\ \xi_1 = 1$; por outro lado, $lim\ \eta(\,x_n) = 1$, assim se concluindo que $lim\ \zeta\,(x_n\,) = 1$.

Tal como se disse a propósito do teorema 15, quando na aplicação do teorema 16 e seus corolários não houver perigo de confusão quanto às sucessões envolvidas nos cálculos, escreve-se λ em vez de $\lambda(x_n)$, η em vez de $\eta(\,x_n)$ e ζ em vez de $\zeta\,(\,x_n)$.

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

1) $lim\ n^2 .\ [\ log\,(1 + 2/n) - 2/n\,] = \ lim\ n^2 .\ (2/n \ - \ \lambda\ .\ 4/n^2 - 2/n) =$

$$= lim\ (-4\lambda) = -2\ .$$

2) $lim\ n.\left[log\,(n + 1) - log\,n\right] = lim\ n\ .\ log\,(1 + 1/n) = lim\ \ (n\ .\eta\ .\ 1/n) = 1$.

3) $lim\ \ n\ .\ (\sqrt{1 + 1/n}\ - 1)\ = lim\ n\ .\ \left[\ (1 + 1/n)^{1/2} - 1\right]\ =$

$$= lim\ n\ .\ \left[\ 1 + (1/2).(1/n).\zeta\ - 1\right]\ =\ lim\ (1/2).\zeta = 1/2\ .$$

4) $lim\ n\ .\ \left[\ \sqrt[3]{1\ +\ log(1 + 1/n)}\ - 1\right]\ = lim\ n\ .\ \left[\ 1+(1/3).log\,(1+1/n).\zeta\ - 1\right]\ =$

$$= lim\ \ n\ .\ \left[\ (1/3).\ (1/n)\ .\ \eta\ .\zeta\ \right]\ = lim\ (1/3).\ \eta\ .\zeta = 1/3\ .$$

11. Alguns infinitésimos e infinitamente grandes notáveis

Estudam-se seguidamente alguns infinitésimos e infinitamente grandes notáveis.

a) Com $0 \leq |\ a\ | < 1$, tem-se $lim\ n.a^n = 0$. No caso de ser $a = 0$, a conclusão é evidente. Sendo $a \neq 0$, tem-se $0 < |\ a\ | < 1$ e considerando um número b tal que,

$$0 < b < \frac{1 - |a|}{|a|}\ ,$$

tem-se, $(1 + b)\ .\ |\ a\ | < 1$, ou seja, $(1 + b)^n\ .\ |\ a\ |^n < 1$; desta última desigualdade tira-se,

$$\left[1\ +\ nb\ +\ \frac{n(n-1)}{2!}\cdot b^2\ +\ \cdots\ +\ \frac{n(n-1)\ \ldots\ 1}{n!}\cdot b^n\right]\cdot|\ a\ |^n\ <\ 1\ .$$

Portanto,

$$\left[\ \frac{n(n-1)}{2!}\cdot b^2\ \right]\cdot|\ a\ |^n\ <\ 1\ ,$$

ou seja,

$$0 < n.|\ a\ |^n < \frac{2}{b^2\,(n-1)}\ ,$$

donde resulta de imediato por enquadramento, $lim\ \ n\ .\ |\ a|^n = 0$, ou seja, $lim\ \ n\ .\ a^n = 0$.

b) A sucessão de termo geral $u_n = a^n/n!$ é um infinitésimo. Supondo que $|a| > 0$ (para $a = 0$, o resultado é evidente), determine-se um $m \in \mathbf{N}$ tal que,

$$\frac{|a|}{m} < b < 1\ \ (\text{com } b \text{ fixado no intervalo } \left]\,0\ ,\ 1\right[\ )\ .$$

Tem-se então,

$$\frac{|\ a\ |^n}{n!}\ <\ \frac{|\ a\ |^n}{n(n\ -\ 1)\ \ldots\ (m+1)}\ =\ |\ a\ |^m\cdot\frac{|\ a\ |^{n-m}}{(m+1)\ \ldots\ (n\ -\ 1)n}\ =\ |\ a\ |^m\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{|a|}{n}\ \ ;$$

como,

$$\frac{|a|}{m} < b < 1 \;\Rightarrow\; \frac{|a|}{m+j} < b < 1 \;\; (j = 1\,,2\,,\dots)\,,$$

tem-se,

$$\frac{|\,a\,|^n}{n!} \;<\; |\,a\,|^m\,.\,(b.b.\dots.b) \;=\; |\,a\,|^m\;.\;b^{n-m} \;=\; \left(\frac{|\,a\,|}{b}\right)^m \cdot b^n \quad .$$

Por ser, $(\,|a|\,/\,b)^m$ constante e $0 < b < 1$, conclui-se por enquadramento que ,

$$lim\;\frac{|\,a\,|^n}{n!} \;=0\text{ , ou seja , } lim\;\frac{a^n}{n!} \;=0\,,$$

como se queria demonstrar.

c) Sendo $lim\;x_n = +\infty$, tem-se $lim\;(\;e^{x_n}\,/\,x_n^{\alpha}\;) = +\infty$ (a exponencial tende mais depressa para $+\infty$ que qualquer potência positiva do respectivo expoente**)** . Sendo $lim\;x_n = +\infty$, tem-se $x_n > 0$ de certa ordem n_1 em diante. Considere-se então a igualdade, com certo $m > \alpha + 1$,

$$e^{x_n} \;=\; 1 + x_n + \frac{x_n^2}{2!} + \cdots + \frac{x_n^{m-1}}{(m-1)!} \;+\; \frac{x_n^m}{m!}\cdot\xi_m(x_n)\;;$$

revendo o significado de $\xi_m(x)$ - ver ponto 10. - , conclui-se que $x_n > 0$ implica que $\xi_m(x_n) > 0$. Então,

$$e^{x_n} > \frac{x_n^{m-1}}{(m-1)!} \quad\text{, para } n > n_1\,,$$

e dividindo ambos os membros desta desigualdade por x_n^{α} (sempre para $n > n_1$), obtém-se,

$$\frac{e^{x_n}}{x_n^{\alpha}} > \frac{x_n^{m-1-\alpha}}{(m-1)!}\;;$$

ora , $m > \alpha + 1$ implica que o limite do segundo membro da desigualdade é igual a $+\infty$ (relembre-se que $lim\;x_n = +\infty$) e, portanto, também, $lim\;(\;e^{x_n}\,/\,x_n^{\alpha}\,) = +\infty$, como se queria provar.

d) Sendo $lim\;x_n = +\infty$, tem-se $lim\;(\,x_n\,/\,log^{\alpha}x_n\,) = +\infty$ (os números tendem mais depressa para $+\infty$ que qualquer potência positiva dos respectivos logaritmos**)**. É uma consequên-cia imediata do resultado anterior : com efeito, se $lim\;x_n = +\infty$, também $lim\;log\,x_n = +\infty$ e então,

$$lim\;\frac{x_n}{log^{\alpha}x_n} \;=\; lim\frac{e^{log\,x_n}}{(log\,x_n)^{\alpha}} \;=\; +\infty\,,$$

pelo resultado obtido em e) .

12. Teoremas subsidiários

O teorema seguinte e seus corolários são de grande utilidade no cálculo prático de limites.

Teorema 17 : *Sendo* y_n *estrictamente crescente com limite* $+\infty$*, então,*

$$lim\ \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = k \Rightarrow lim\ \frac{x_n}{y_n} = k$$

com k *finito,* $k = +\infty$*, ou* $k = -\infty$

Demonstração : **a)** Vejamos primeiro o caso do limite finito. Fixado $\varepsilon > 0$, existe uma ordem $m = n_\varepsilon$ tal que , para $n > m$,

$$k - \varepsilon/2 < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < k + \varepsilon/2\ .$$

Para facilitar a demonstração consideraremos que a ordem $m = n_\varepsilon$ é determinada de forma que $y_n > 0$ para $n > m$, o que sempre se consegue por ser , por hipótese, $lim\ y_n = +\infty$. Escrevendo a desigualdade precedente para os naturais m+1 , m+2 , ... , n-1 (com $n \geq m+2$), obtém-se:

$$k - \varepsilon/2 < \frac{x_{m+2} - x_{m+1}}{y_{m+2} - y_{m+1}} < k + \varepsilon/2$$

$$k - \varepsilon/2 < \frac{x_{m+3} - x_{m+2}}{y_{m+3} - y_{m+2}} < k + \varepsilon/2$$

....

$$k - \varepsilon/2 < \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} < k + \varepsilon/2$$

ou ainda, em virtude de serem positivos os denominadores (y_n é estritamente crescente),

$$(k - \varepsilon/2).(y_{m+2} - y_{m+1}) < x_{m+2} - x_{m+1} < (k + \varepsilon/2)\ .\ (y_{m+2} - y_{m+1})$$

$$(k - \varepsilon/2).(y_{m+3} - y_{m+2}) < x_{m+3} - x_{m+2} < (k + \varepsilon/2)\ .\ (y_{m+3} - y_{m+2})$$

....

$$(k - \varepsilon/2)\ .\ (y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (k + \varepsilon/2)\ .\ (y_n - y_{n-1})\ .$$

Adicionando ordenadamente estas desigualdades e simplificando resulta,

$$(k - \varepsilon/2)\ .\ (y_n - y_{m+1}) < x_n - x_{m+1} < (k + \varepsilon/2)\ .\ (y_n - y_{m+1})\ ,$$

e dividindo por y_n (é positivo),

$$(k - \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) < \frac{x_n - x_{m+1}}{y_n} < (k + \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n})$$

$$(k - \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) + \frac{x_{m+1}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < (k + \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) + \frac{x_{m+1}}{y_n} .$$

Por ser, com m fixo quando se fixa ε,

$$lim\ (k - \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) + \frac{x_{m+1}}{y_n} = k - \varepsilon/2$$

$$lim\ (k + \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) + \frac{x_{m+1}}{y_n} = k + \varepsilon/2 ,$$

tem-se, de certas ordens $p = n_\varepsilon'$ e $q = n_\varepsilon''$ em diante, respectivamente,

$$(k - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 < (k - \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) + \frac{x_{m+1}}{y_n}$$

$$(k + \varepsilon/2) + \varepsilon/2 > (k + \varepsilon/2).(1 - \frac{y_{m+1}}{y_n}) + \frac{x_{m+1}}{y_n} .$$

Então, a partir da maior das três ordens, $m+1 = n_\varepsilon+1$, $p = n_\varepsilon'$ e $q = n_\varepsilon''$, tem-se:

$$(k - \varepsilon/2) - \varepsilon/2 < \frac{x_n}{y_n} < (k + \varepsilon/2) + \varepsilon/2 ,$$

ou seja,

$$k - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < k + \varepsilon ,$$

o que prova ser $lim\ x_n / y_n = k$.

b) O caso $k = +\infty$, é tal qual como em a), mas partindo da desigualdade,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} > 1/\varepsilon ,$$

válida a partir de certa ordem $m = n_\varepsilon$. Fica ao cuidado do leitor.

c) O caso $k = -\infty$, é tal qual como em b), mas partindo da desigualdade,

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < -1/\varepsilon ,$$

válida a partir de certa ordem $m = n_\varepsilon$. Fica ao cuidado do leitor.

O teorema precedente admite os seguintes corolários imediatos:

Corolário 1 : *Quando seja* $\lim\,(x_{n+1} - x_n) = k$ *(finito ou infinito), tem-se que também* $\lim x_n / n = k$

Demonstração : Basta aplicar o teorema 17 com $y_n = n$.

Corolário 2 : *Sendo* $\lim \dfrac{y_{n+1}}{y_n} = k$ *(finito ou infinito) e* $y_n > 0$ *, então também* $\lim \sqrt[n]{y_n} = k$

Demonstração : Dado que,

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = k \Leftrightarrow \lim \log \frac{y_{n+1}}{y_n} = \log k \Leftrightarrow \lim\,(\,\log y_{n+1} - \log y_n\,) = \log k\,,$$

o corolário anterior permite concluir que,

$$\lim \frac{\log y_n}{n} = \log k\,,$$

donde resulta , $\lim \log \sqrt[n]{y_n} = \log k$, ou ainda, $\lim \sqrt[n]{y_n} = k$, como se queria provar.

Note-se que os recíprocos do teorema 6 e seus corolários são falsos. Assim, por exemplo, sendo,

$$y_n = \begin{cases} n+1 & , \; n \;\; par \\ 2n & , \; n \;\; impar \end{cases} ,$$

conclui-se com facilidade que $\lim \sqrt[n]{y_n} = 1$ e, no entanto, não existe,

$$\lim \frac{y_{n+1}}{y_n} \quad \text{(há duas subsucessões com limites distintos).}$$

Vejamos dois exemplos de aplicação.

1) Cálculo de $\lim\,(1 + 1/2 + \ldots + 1/n)\,/\,n$. com a sucessão $x_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$, tem-se,

$$\lim\,(x_{n+1} - x_n) = \lim 1/(n+1) = 0 \;\Rightarrow\; \lim\,(1 + 1/2 + \ldots + 1/n)\,/\,n = 0\,.$$

2) Cálculo de $\lim \sqrt[n]{n!}$. Tem-se,

$$\lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\,(n+1) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty\,.$$

13. Exercícios

1 - Mostre que são limitadas as seguintes sucessões:

a) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n}$; **b)** $u_n = 1 + 1/2 + ... + 1/2^n$; **c)** $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$;

d) $u_1 = 1$, $u_n = 1 + 1/u_{n-1}$.

2 - Mostre que a sucessão de termo geral $u_n = n^{(-1)^n}$ é minorada mas não majorada.

3 - Mostre que a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n . n$ não é majorada nem minorada.

4 - Considere a sucessão cujo termo geral é dado por,

$$u_1 = 1 \ , \quad u_2 = -1/2 \ , \quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2} \ .$$

a) Determine β de forma que o termo geral da sucessão possa ser dado pelas igualdades, $u_1 = 1$, $u_n = \beta . u_{n-1}$;

b) Determine uma expressão que permita o cálculo de u_n sem ter que calcular os termos anteriores .

5 - Considere sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{2n}{n+1}$.

a) Mostre que é limitada;

b) Mostre que o conjunto $K = \{ k. : \dfrac{2n}{n+1} < k \ , \ \forall \, n \in \mathbf{N}\}$ tem ínfimo e determine o respectivo valor.

6 - Considere sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

a) Utilizando a definição de limite, mostre que, $\lim u_n = 1$;

b) Calcule a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão verificam a condição, $| u_n - 1 | < 0{,}001$.

7 - Considere sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{5n^2}{n^2 + 1}$.

a) Utilizando a definição de limite, mostre que, $\lim u_n = 5$;

b) Calcule a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão verificam a condição, $| u_n - 5 | < 0{,}0001$.

8 - Utilizando a definição de limite, mostre que:

a) $lim\ \dfrac{2n-1}{2n+2} = 1$; **b)** $lim\ \dfrac{n^2+1}{2n} = +\infty$; **c)** $lim\ \dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n} = 1$;

d) $lim\ \dfrac{1-n}{\sqrt{n}} = -\infty$; **e)** $lim\ \left[(-1)^n + 1/n\right]^2 = 1$; **f)** $lim\ \dfrac{n}{n+1} = 1$;

g) $lim\ \dfrac{n+\sqrt{n}}{2n} = 1/2$; **h)** $lim\ (n + 1/n) = +\infty$; **i)** $lim\ log\, n = +\infty$.

9 - Dadas as sucessões,

$$u_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n+2} \quad \text{e} \quad u_n = \frac{\left[(-1)^n + (-1)^{n+p}\right] . n - 1}{2n-1} \ (p \in \mathbf{N}),$$

mostre que a primeira não tem limite e que a segunda só tem limite quando p seja ímpar.

10 - Determine os sublimites (reais ou impróprios) das sucessões com os seguintes, termos gerais, indicando os respectivos limites máximo e mínimo:

a) $u_n = \begin{cases} 1/n & , n = 2k \\ n & , n = 2k+1 \end{cases}$; **b)** $u_n = (-1)^n . \dfrac{2n+1}{n}$;

c) $u_n = (-1)^{n+1} . cos\,(n\pi) + sen\,[(n+1)\pi]$; **d)** $u_n = (1/n) + sen\,(2n\pi/3)$;

e) $u_n = sen\,(n\pi/2) + (1/2) . cos\,(n\pi/2)$; **f)** $u_n = \dfrac{(-1)^n + (-1)^{n+1} . 2}{2 + (-1)^n}$;

g) $u_n = cos\,(2n\pi/3) + (-1)^n . sen\,(2n\pi/3)$; **h)** $u_n = sen\,(2n\pi/4)$;

i) $u_n = log\,|\,cos\,\dfrac{(n+1)\pi}{3}\,| + log\,[\,2 + (-1)^n]$.

11 - Estude a existência de limite para as sucessões:

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n + x^2 . (-1)^{n+1}}{1 + x^2}$; **b)** $u_n = \dfrac{\left[(-1)^n + (-1)^{n+p}\right] . n - 1}{2n-1}$;

c) $u_n = x^2 . sen\,(n\pi/2) + (1 - 2x) . cos\,(n\pi/2)$.

12 - Dê exemplos de uma sucessão cujo conjunto dos sublimites seja o conjunto:

a) $\{ 3 , 4 \}$; **b)** $\mathbf{Z}^-$ (conjunto dos inteiros negativos) ; **c)** $[0 , 1]$; **d)** $\mathbf{R}$.

13 - Sendo u_n e v_n sucessões limitadas, prove que:

a) $lim\ máx\ (- u_n) = - lim\ mín\ u_n$;

b) $lim\ mín\ u_n + lim\ mín\ v_n \leq lim\ mín\ (u_n + v_n) \leq lim\ máx\ (u_n + v_n) \leq$

$$\leq lim\ máx\ u_n + lim\ máx\ v_n ;$$

c) Sendo u_n convergente (e v_n limitada), então,

$$lim\ máx\ (u_n + v_n) = lim\ u_n + lim\ máx\ v_n ;$$

$$lim\ mín\ (u_n + v_n) = lim\ u_n + lim\ mín\ v_n .$$

14 - Utilize a condição de Cauchy para provar a convergência ou divergência das seguintes sucessões:

a) $u_n = 1/n$; **b)** $u_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n$;

c) $u_n = 1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + (-1)^{n+1} . 1/n$.

15 - Determine os limites das sucessões cujos termos gerais são:

a) $u_n = \dfrac{2n + 3}{2n - 1}$; **b)** $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^4 + 3}$; **c)** $u_n = \dfrac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1}$; **d)** $u_n = \dfrac{1 + n^3}{n^2 + 2n + 1}$;

e) $u_n = \dfrac{(-1)^n . n^3 + 1}{n^2 + 2}$; **f)** $u_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$;

g) $u_n = \dfrac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-p)}{(n+1)(n+2) \ldots (n+q)}$ $(p, q \in \mathbf{N})$; **h)** $u_n = \dfrac{a^n b^n}{a^n + b^n}$ $(a,b \in \mathbf{R}^+)$;

i) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; **j)** $u_n = \dfrac{x_n^4 - 1}{x_n - 1}$ $(x_n \to 1)$; **k)** $u_n = \sqrt{n} \cdot \dfrac{\sqrt{n} + 3}{(\sqrt{n} + 1)^2}$.

16 - Calcule por enquadramento:

a) $lim\ \dfrac{n^p}{n!}$ $(p \in \mathbf{N})$; **b)** $lim \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \right)$;

c) $lim\ [\ 1.(1/2).(1/3).\ ...\ .(1/n)]$; **d)** $lim\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)$;

e) $lim\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^4+2n+1}}\right)$;

f) $lim\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

g) $lim\left(\dfrac{n}{\sqrt{n(n+1)}}+\dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{(2n-1)\,2n}}\right)$.

17 - Com argumento geométrico, demonstre que $0 \le x \le \pi/2 \Rightarrow 0 \le sen\,x \le x$. A partir deste resultado mostre que, sendo $lim\ x_n = 0$, com $x_n \ge 0$ de certa ordem em diante, então $lim\ sen\ x_n = 0$. A partir daqui prove sucessivamente que:

a) Sendo $lim\ x_n = 0$, com $x_n \le 0$ de certa ordem em diante , então $lim\ sen\ x_n = 0$;

b) Em geral, sendo $lim\ x_n = 0$, então $lim\ sen\ x_n = 0$;

c) Sendo $lim\ x_n = a$, então $lim\ sen\ x_n = sen\ a$;

d) Sendo $lim\ x_n = a$, então $lim\ cos\ x_n = cos\ a$;

e) Sendo $lim\ x_n = a$, com $a \ne (2k{+}1)\pi/2$ $(k \in \mathbf{Z})$, então $lim\ tg\ x_n = tg\ a$.

18 - Com base num argumento geométrico apropriado , demonstre que

$$0 < x < \pi/2 \;\Rightarrow\; 0 < cos\,x < \frac{sen\,x}{x} < 1\ .$$

A partir deste resultado mostre que, sendo $lim\ x_n = 0$, com $x_n > 0$ de certa ordem em diante, então

$$lim\ \frac{sen\ x_n}{x_n} = 1\ .$$

A partir daqui prove sucessivamente que:

a) Sendo $lim\ x_n = 0$, com $x_n < 0$ de certa ordem em diante, então

$$lim\ \frac{sen\ x_n}{x_n} = 1\ ;$$

b) Em geral, sendo $lim\ x_n = 0$, com $x_n \ne 0$,então,

$$lim\ \frac{sen\ x_n}{x_n} = 1\ .$$

19 - Estude do ponto de vista da monotonia e existência de limite a sucessão,

$$u_1 = 1 \ , \ u_n = \frac{u_{n-1}^2}{1 + u_{n-1}^2} \ .$$

20 - Sendo $A \subset \mathbf{R}$ um conjunto majorado e $s = Sup\ A$, mostre que existe uma sucessão x_n de termos em A tal que $lim\ x_n = s$. Prove ainda que se $s \notin A$, então a sucessão x_n pode ser escolhida de forma a ser estritamente crescente.

21 - Sendo x_n o termo geral de certa sucessão monótona, y_n o termo geral de certa sucessão limitada e admitindo que $\forall\ n \in \mathbf{N}\ ,\ |\ x_n - y_n\ | < 1/n$, prove em primeiro lugar que x_n é limitada e depois que ambas as sucessões têm o mesmo limite.

22 - Duas sucessões, uma crescente u_n e outra decrescente v_n, dizem-se contíguas se e só se $lim\ (u_n - v_n) = 0$. Prove que duas sucessões contíguas são convergentes e têm limite comum.

23 - Calcule os seguintes limites:

a) $lim\ \sqrt[n]{3(1+1/n)^{n^2}}$; **b)** $lim\ \left(\frac{5n+1}{5n-1}\right)^{3n+1}$; **c)** $lim\ \left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^{n}$;

d) $lim\ \left(\frac{n+2}{n}\right)^{2n}$; **e)** $lim\ \left(1+1/n^2\right)^{n^3}$; **f)** $lim\ \left(1+1/n^3\right)^{n^2}$; *g) lim* $log_n\ a$;

h) $lim\ \left(n+1\right)^{1/log\ n}$; **i)** $lim\ \left(1/n\right)^{1/n^2}$; **j)** $lim\left(n\right)^{1/n^2}$; **k)** $lim\ \left(1+\frac{1}{log\ n}\right)^{log\ (n+1)}$;

l) $lim\ \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}\cdot tang\,\frac{1}{n}\cdot log\,\frac{n+1}{n}}$; **m)** $lim\ \left(1+1/n\right)^{log\ n}$; **n)** $lim\ (1/n)^{1/n}$;

o) $lim\ \left(sen\ 1/n\right)^{1/log\ n}$; **p)** $lim\ \left(1/n\right)^{sen\ 1/n}$.

24 - Calcule os seguintes limites:

a) $lim\ n.(\sqrt[n]{a}-1)\ \ (a>0)$; **b)** $lim\ \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n}$ $(a\ ,\ b>0)$;

c) $lim\ \frac{n+1}{n}\cdot\frac{log\ (n+1)}{log\ n}$; **d)** $lim\ \frac{2n^2+3}{3n}\cdot log\,\frac{n^2+1}{n^2-1}$;

e) $lim \dfrac{log\, \dfrac{n^2 + n + 1}{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{\dfrac{n-3}{n+3}} - 1}$; **f)** $lim\ n \,.\left[1 - \sqrt{(1 - a/n)(1 - b/n)}\,\right]$;

g) $lim\ (1 + u_n)^{v_n}$, com $lim\, u_n = 0$ e $lim\ u_n\, v_n = k$; **h)** $lim \dfrac{n^{2\alpha} - (n^2 - 1)^{\alpha}}{n^{2(\alpha - 1)}}$;

i) $lim\ n^2 \,.\, (\sqrt[n]{e} - 1 - 1/n)$; **j)** $lim \left(1 + \dfrac{1}{log\, n}\right)^n$;

k) $lim \left[(-1)^n \cdot \dfrac{2n+1}{3n+1} - (-1)^n \,.\, n \,.\, log\,(1 + 2/3n)\right]$;

l) $lim \left[n^3 - n^5 \,.\, log\,(1 + 1/n^2)\right]$; **m)** $lim \dfrac{e^{\frac{3}{n^2 - 1}} - 1}{log\,(1 + 1/n^2)}$;

n) $lim\left[n \,.\, log\,(1 + 1/n^2) + (n+1) \,.\, log\,(1 + 1/n^2) + \ldots + 2n \,.\, log\,(1 + 1/n^2)\right]$;

o) $lim\ n \,.\left[log\,(n+3) - log\, n - 1/n\right]$; **p)** $lim\ n^{n^2} .\, (1 + n^2)^{-n^2/2}$;

q) $lim \dfrac{(n+1)log\, n - n log\,(n+1)}{log\, n}$; **r)** $lim\ \sqrt{(n+2)(n+3)} - n$;

s) $lim \dfrac{n \,.\, e^{log \frac{\alpha}{n+3}}}{\sqrt[n]{1 + \alpha\, log\, n}}$ $(\alpha > 0)$; **t)** $lim \left[(1 + 1/n)^{1/3} - 1\right] .\, log\,(1 + 1/n) \,.\, n^2$;

u) $lim \left(1 + \dfrac{2\, cos\,(1/n)}{n}\right)^{n+1}$; **v)** $lim \left(sen\ log\, \dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{log\,(n+1) - log\, n}}$.

25 - Sendo $lim\, u_n = +\infty$ e $u_n\, v_n$ limitada , mostre que $lim\ u_n^{v_n} = 1$. Aproveite este resultado para calcular, $lim\ (\sqrt[3]{n}\,)^{log\,(1 - 2/n)}$. Confirme em seguida o resultado, calculando o limite em causa por um processo alternativo.

26 - Calcule os seguintes limites:

a) $lim \dfrac{n + \sqrt{n}}{n - log^2 n}$; **b)** $lim \dfrac{(log\, log\, n)^3}{log\, n}$; **c)** $lim \dfrac{e^{\sqrt{n}}}{n}$.

27 - Utilizando os teoremas subsidiários calcule os seguintes limites:

a) $lim \dfrac{sen\, \alpha + sen\,(\alpha/2) + sen\,(\alpha/3) + ... + sen\,(\alpha/n)}{1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n}$;

b) $lim \dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\,...\,(2n)}}{n}$; **c)** $lim \dfrac{log\ n!}{1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k}$;

d) $lim \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$; **e)** $lim \dfrac{n\,.\,log\, n}{log\, n!}$; **f)** $lim \dfrac{e + e^2 + e^3 + ... + e^n}{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2}$;

g) $lim \sqrt[n]{\dfrac{n!}{log\,(n+1)!}}$; **h)** $lim\ \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n!}$; **i)** $lim \sqrt[n]{\dfrac{1.2.\,...\,.\,n}{3.5.\,...\,.\,(2n+1)}}$;

j) $lim \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + ... + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$ ($\alpha > -1$) ; **k)** $lim \dfrac{log\, n}{n}$; **l)** $lim \dfrac{e^n}{n}$;

m) $lim \dfrac{1}{n^2} \cdot \left[sen\, \alpha + 2^2 sen\,(\alpha/2) + 3^2 sen\,(\alpha/3) + ... + n^2 sen\,(\alpha/n)\right]$.

28 - Mostre que em **R** , se X e Y são conjuntos limitados e fechados, então também é limitado e fechado o conjunto $Z = \{\, x + y \ : \ x \in X \ \text{ e } \ y \in Y \,\}$.

<u>RESPOSTAS</u>:

4 - a) -1/2 ; **b)** $u_n = (-1/2)^{n-1}$.

5 - b) 2 .

6 - b) 999 .

7 - b) 223 .

10 -

	lim máx	*lim mín*	*outros sublimites*
a)	$+\infty$	0	Não há
b)	2	-2	Não há
c)	-1	-1	Não há
d)	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0
e)	1	-1	-1/2 e 1/2
f)	1	-1/3	Não há
g)	1	$-1/2 - \sqrt{3}/2$	$-1/2 + \sqrt{3}/2$
h)	1	-1	Não há
i)	*log* 3	-*log* 2	*log* (3/2) e 0 .

11 - a) Existe limite apenas para $x = \pm 1$, sendo 0 o respectivo valor ; **b)** Com p par não existe limite, com p ímpar o limite é 0 ; **c)** O limite não existe qualquer que seja x .

12 - a) $u_n = \dfrac{7+(-1)^n}{2}$; **b)** -1 , -2 , -1 , -2 , -3 , -1 , -2 , -3 , -4 , ... ; **c)** Qualquer sucessão cujo conjunto dos termos seja $[\ 0\ ,\ 1]\ \cap \mathbf{Q}$ (note-se que este conjunto é numerável) ; **d)** Qualquer sucessão cujo conjunto dos termos seja $\mathbf{Q}$.

14 - a) Convergente ; **b)** Divergente ; **c)** Convergente.

15 - a) 1 ; **b)** 0 ; **c)** 1/2 ; **d)** $+\infty$; **e)** Não existe ; **f)** $+\infty$; **g)** 0 (se $q > p + 1$) , 1 (se $q = p + 1$) , $+\infty$ (se $q < p + 1$) ; **h)** 0 (se $0 < a < 1$ ou $0 < b < 1$) , $+\infty$ (se $a > 1$ e $b > 1$) , 1 (se $a = 1$ e $b > 1$ ou $a > 1$ e $b = 1$) , 1/2 (se $a = b = 1$) ; **i)** 0 ; **j)** 4 ; **k)** 1.

16 - a) 0 ; **b)** 2 ; **c)** 0 ; **d)** 0 ; **e)** 2 ; **f)** $+\infty$; **g)** $+\infty$.

19 - Sucessão monótona decrescente com limite nulo.

23 - a) e ; **b)** $e^{6/5}$; **c)** e^{-3} ; **d)** e^{4} ; **e)** $+\infty$; **f)** 1 ; **g)** 0 ; **h)** e ; **i)** 1 ; **j)** 1 ; **k)** e ; **l)** 1 ; **m)** 1 ; **n)** 1 ; **o)** e^{-1} ; **p)** 1 .

24 - a) $\log a$; **b)** $\sqrt{a\,b}$; **c)** 1 ; **d)** 0 ; **e)** -1/2 ; **f)** $(a+b)/2$; **g)** e^{k} ; **h)** α ; **i)** 1/2 ; **j)** $+\infty$; **k)** 0 ; **l)** $+\infty$; **m)** 3 ; **n)** 3/2 ; **o)** 2 ; **p)** $e^{-1/2}$; **q)** 1 ; **r)** 5/2 ; **s)** α ; **t)** 1/3 ; **u)** e^{2} ; **v)** 0 .

25 - 1 .

26 - a) 1 ; **b)** 0 ; **c)** $+\infty$.

27 - a) α ; **b)** $4/e$; **c)** $+\infty$ (se $k \le 0$) , 0 (se $k > 0$) ; **d)** $+\infty$; **e)** 1 ; **f)** $+\infty$; **g)** $+\infty$; **h)** $1/e$; **i)** 1/2 ; **j)** $1/(\alpha+1)$; **k)** 0 ; **l)** $+\infty$; **m)** $\alpha/2$.

CAPÍTULO IV

SÉRIES DE TERMOS REAIS

1. Introdução

A operação de adição de números reais é uma operação binária supostamente bem conhecida do leitor: a cada par de números reais $(a\ ,\ b)$, a operação de adição associa a respectiva soma $a + b$, verificando-se diversas propriedades com as quais o leitor está familiarizado. A partir do conceito de soma de dois números reais facilmente se define soma de k números reais : dados os reais $a_1 , a_2 , \ldots , a_k$, fazendo,

$$A_1 = a_1 \ , \ A_2 = A_1 + a_2 \ , \ A_3 = A_2 + a_3 \ , \ \ldots \ , \ A_k = A_{k-1} + a_k \ ,$$

o número A_k obtido no final é a soma dos k números dados, representando-se por qualquer dos símbolos:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \ .$$

Propomo-nos generalizar o conceito de soma ao caso em que, em vez de se partir de um número finito de reais, se parte dos infinitos termos de uma sucessão, $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$. Tal generalização faz-se do seguinte modo:

a) Forma-se a sucessão das somas parciais,

$$S_1 = u_1 \ , \ S_2 = u_1 + u_2 \ , \ S_3 = u_1 + u_2 + u_3 \ , \ \ldots \ , \ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ , \ \ldots \ ;$$

b) Calcula-se em seguida $lim\ S_n$ (limite da sucessão das somas parciais).

Antes de prosseguir convém notar que este procedimento ou algoritmo pode não conduzir a um resultado real ($lim\ S_n$ pode ser $+\infty$ ou $-\infty$) ou pode mesmo não conduzir a nenhum resultado, como acontece quando não existe $lim\ S_n$.

Independentemente de conduzir ou não a um resultado, o algoritmo descrito designa-se por *série* e representa-se por qualquer dos símbolos,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ ;$$

os termos u_n da sucessão de que se partiu designam-se, neste contexto, por *termos da série* .

Qualquer dos dois símbolos usados para representação da série pretende sugerir o procedimento ou algoritmo a que são sujeitos os termos u_n : cálculo das somas parciais,

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \ ,$$

seguido do cálculo de,

$$lim\ S_n = lim\ (u_1 + u_2 + \ ...\ +\ u_n)\ =\ lim\ \sum_{i=1}^{n} u_i\ .$$

Quando o algoritmo descrito (a série) conduz a um resultado, os símbolos,

$$u_1\ +\ u_2\ +\ ...\ +\ u_n\ +\ ...\quad \text{ou}\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ ,$$

são também usados para representar o próprio resultado, designando-se este por *soma da série*. Quando o resultado (a soma da série) seja finito, a série diz-se *convergente* ; quando seja infinito ou não exista , a série diz-se *divergente* (*divergente infinita* se $lim\ S_n$ for $+\infty$ ou $-\infty$, *divergente oscilante* quando não exista $lim\ S_n$).

Esta ambiguidade resultante do duplo significado atribuído aos símbolos,

$$u_1\ +\ u_2\ +\ ...\ +\ u_n\ +\ ...\quad \text{ou}\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ ,$$

está consagrado e não tem grandes inconvenientes práticos: o contexto permite normalmente saber qual dos significados está em causa. Assim, por exemplo, quando se fala na convergência da série,

$$1 + 1/2\ +\ 1/2^2\ +\ ...\ +\ 1/2^{n-1} + \ ...\quad \text{ou}\quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n-1}\ ,$$

é na série que se pensa; mas quando se escreve,

$$1 + 1/2\ +\ 1/2^2\ +\ ...\ +\ 1/2^{n-1} + \ ...\ =\ 2\quad \text{ou}\quad \sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{n-1}\ =\ 2\ ,$$

os símbolos dos primeiros membros das igualdades pretendem já significar a soma da série.

Em muitas situações, são apresentados como representando séries símbolos como,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n\ ,\quad \sum_{n=2}^{\infty} u_n\ ,\quad \sum_{n=3}^{\infty} u_n\ ,\ \text{etc.}\ ,$$

em que o índice n toma valores no conjunto $\mathbf{N} \cup \{0\}$ ou num certo subconjunto $\mathbf{N_p} = \{\ p\ ,\ p+1\ ,\ p+2\ ,\ ...\ \}$ de $\mathbf{N}$. É óbvio que tais símbolos podem representar o algoritmo descrito anteriormente (ou indistintamente o resultado a que ele conduz) aplicado, respectivamente, às sucessões,

$$u_0\ , u_1\ , ...\ , u_n\ ,\ ...\ ;\quad u_2\ , u_3\ , ...\ , u_n\ ,\ ...\ ;\quad u_3\ , u_4\ , ...\ , u_n\ ,\ ...\ ;\ \text{etc.}\ .$$

Aliás, os símbolos referidos podem facilmente ser reconvertidos à situação standard apresentada inicialmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}\ \text{ em vez de }\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}\ \text{ em vez de }\ \sum_{n=2}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}\ \text{ em vez de }\ \sum_{n=3}^{\infty} u_n$$

etc.

Por exemplo, qualquer dos símbolos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1) \quad , \quad \sum_{n=4}^{\infty} 1/(n-3) \quad ,$$

representa a série $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n + \ldots$.

No desenvolvimento da teoria, usaremos sempre a símbolo standard, com o índice de sumação n a tomar valores em **N** , sendo os resultados obtidos evidentemente aplicáveis aos restantes casos.

2. Exemplos notáveis de séries

2.1 - Série geométrica

A série,

$$a + a\,r + a\,r^2 + \ldots + a\,r^{n-1} + \ldots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \ ,$$

em que cada termo se obtém do precedente multiplicando-o por uma constante (a *razão*) designa-se por *série geométrica*.

Dado que a sucessão das somas parciais tem termo geral,

$$S_n = \begin{cases} a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} = \dfrac{a - a\,r^n}{1 - r} & , \quad se \quad r \neq 1 \\ n\,a & , \quad se \quad r = 1 \end{cases} \quad ,$$

e como $lim\ r^n$ é finito (e nesse caso nulo) se e só se $|\, r \,| < 1$, conclui-se que $lim\ S_n$ existe finito se e só se $|\, r \,| < 1$ e, nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = lim\ S_n = \frac{a}{1 - r} \ .$$

Em qualquer outra situação, $lim\ S_n$ ou não existe ou é infinito e a série é divergente.

2.2 - Série $a + 2\,a\,r + 3\,a\,r^2 + \ldots + n\,a\,r^{n-1} + \ldots$

Esta série estuda-se do ponto de vista da convergência de forma semelhante à série geométrica. A sucessão das somas parciais tem por termo geral,

$$S_n = a + 2\,a\,r + 3\,a\,r^2 + \ldots + n\,a\,r^{n-1} \ ;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por r e subtraindo em seguida ordenadamente, obtém-se,

$$S_n = a + 2\,a\,r + 3\,a\,r^2 + \ldots + n\,a\,r^{n-1}$$

$$\begin{array}{rl} r\,S_n = & ar + 2ar^2 + 3ar^3 + \ldots + (n\text{-}1)\,a\,r^{n-1} + n\,a\,r^n \\ \hline (1-r)\,S_n = & a + ar + ar^2 + \ldots + a\,r^{n-1} - n\,a\,r^n \end{array}$$

ou ainda, para $r \neq 1$,

$$(1-r)\,S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r} - n\,a\,r^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{(1-r)^2} - \frac{nar^n}{1-r} = \frac{a - a.\left[1 + (1-r).n\right].r^n}{(1-r)^2} \quad .$$

Para $r = 1$, tem-se,

$$S_n = a + 2a + 3a + \ldots + n\,a = \frac{n(n+1)a}{2} \quad .$$

As expressões obtidas para S_n permitem concluir, tal como no caso da série geométrica, que $lim\ S_n$ existe finito se e só se $|\ r\ | < 1$ e, nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nar^{n-1} = lim\ S_n = \frac{a}{(1-r)^2} \quad .$$

Relembre-se, para maior facilidade de compreensão do resultado obtido, que $|\ r\ | < 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow lim\ \ nr^n = 0$.

Em qualquer outra situação quanto ao valor de r , $lim\ S_n$ ou não existe ou é infinito e a série é divergente.

2.3 - Séries redutíveis ou de Mengoli

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e admita-se que o respectivo termo geral se pode exprimir como a diferença entre os termos a_n e a_{n+1} de uma certa sucessão $a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots$, ou seja, $u_n = a_n - a_{n+1}$. Nesse caso, a expressão que dá o termo geral da sucessão das somas parciais da série admite uma simplificação notável:

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_n =$$

$$= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \ ,$$

pelo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será convergente se e só se $lim\ a_{n+1}$ for finito , sendo então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 - lim\ a_{n+1} \ .$$

Com vista a generalizar o resultado precedente, considere-se agora a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e admita-se que o respectivo termo geral se pode exprimir como a diferença entre os termos a_n e a_{n+2} de uma certa sucessão $a_1 , a_2 , \dots , a_n , \dots$: $u_n = a_n - a_{n+2}$. Nesse caso, a expressão que dá o termo geral da sucessão das somas parciais da série admite igualmente uma simplificação notável:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n =$$

$$= (a_1 - a_3) + (a_2 - a_4) + (a_3 - a_5) + (a_4 - a_6) + \dots +$$

$$+ (a_{n-2} - a_n) + (a_{n-1} - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+2}) = (a_1 + a_2) - (a_{n+1} + a_{n+2}) ,$$

pelo que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será neste caso convergente se e só se $lim\ (a_{n+1} + a_{n+2})$ for finito , sendo então, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (a_1 + a_2) - lim\ (a_{n+1} + a_{n+2})$.

Em geral, para a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ com $u_n = a_n - a_{n+p}$ ($p \in \mathbf{N}$ fixo), a expressão que dá o termo geral da sucessão das somas parciais será,

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n =$$

$$= (a_1 + a_2 + \dots + a_p) - (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) ,$$

e a série será convergente se e só se $lim\ (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p})$ for finito, sendo então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) - lim\ (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) .$$

Em particular, se $lim\ a_n = k$ (finito), tem-se também $lim\ a_{n+j} = k$ para $j = 1 , 2 , \dots , p$ e então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) - p.\ k .$$

Ainda mais em particular, se $lim\ a_n = 0$, será então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_p) .$$

Vejamos alguns exemplos de séries redutíveis.

1) Na série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, tem-se ,

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

tratando-se portanto de uma série redutível com $p = 1$. Como $lim\ 1/n = 0$, a série em causa é convergente e tem-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 1 \times 0 = 1 \,.$$

2) Na série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$, tem-se ,

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1/2}{n+1} - \frac{1/2}{n+3} \,,$$

tratando-se portanto de uma série redutível com $p = 2$. Dado que $lim\ 1/(n+1) = 0$, a série em causa é convergente e tem-se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \left(\frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{3} \right) - 2 \times 0 = 5/12 \,.$$

3) No caso da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, tem-se,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$$

$$= (-\sqrt{n}) - (-\sqrt{n+1}) \,,$$

sendo portanto de uma série redutível com $p = 1$. Dado que $lim\ (-\sqrt{n+1}) = +\infty$, a série em causa é divergente.

2.4 - <u>Série exponencial</u>

Trata-se da série,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \,.$$

O termo geral da sucessão das somas parciais desta série é dado por,

$$S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \;;$$

tendo em conta a igualdade do enunciado do teorema 15 do capítulo sobre sucessões reais, tem-se,

$$| e^x - S_n(x) | = \frac{| x |^n}{n!} \cdot |\xi_n(x)| \; ;$$

considerando agora a majoração obtida nas considerações que precedem o mencionado teorema, ou seja,

$$|\xi_n(x) - 1| \leq \frac{|x|}{n+1-|x|} \quad , \ \text{para} \ \ n+1 > |x| \, ,$$

conclui-se que , para cada $x \in \mathbf{R}$, $lim\, \xi_n(x) = 1$; e tendo ainda em conta que $lim\, |x|^n / n! = 0$, resulta , $lim\, | e^x - S_n(x) | = 1$, o que implica ser $lim\, S_n(x) = e^x$. <u>Em conclusão</u>: a série exponencial é convergente para todo o $x \in \mathbf{R}$ e tem-se,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad .$$

3. <u>Propriedades elementares das séries</u>

Estudam-se seguidamente algumas propiedades elementares das séries, cujo conhecimento é importante:

P1 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série convergente, então lim* $u_n = 0$

<u>Demonstração</u> : Convergindo a série , a sucessão das somas parciais S_1 , S_2 , ... , S_n , ... , com $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ tem limite finito: $s = lim\, S_n$. A sucessão $A_1 = 0$, $A_2 = S_1$, $A_3 = S_2$, ... , $A_n = S_{n-1}$, ... tem também limite igual a s (se os termos S_n verificam a condição $| S_n - s | < \varepsilon$ a partir de certa ordem n_ε , o mesmo acontece com os termos A_n a partir da ordem $n_\varepsilon + 1$). Então a sucessão de termo geral, $S_n - A_n = S_n - S_{n-1} = u_n$ terá de ter limite nulo, $lim\, u_n = lim\, (S_n - A_n) = s - s = 0$, como se queria provar.

Corolário 1 : *Sendo não nulo ou não existindo o limite do termo geral* u_n *da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *, então a série é divergente*

<u>Demonstração</u> : É uma consequência imediata da propriedade **P1** .

Note-se que do facto de ser nulo o limite do termo geral de uma série não pode inferir-se a convergência da série. Por exemplo é divergente a série $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$ (série redutível, com $p = 1$ e $lim \sqrt{n+1} = +\infty$) e, no entanto, $lim\, (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = 0$.

P2 : *A natureza de uma série (convergência ou divergência) não depende do valor dos seus* m *primeiros termos , ou seja, sendo* $m \in \mathbf{N}$ *, são da mesma natureza as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tais que* $a_n = b_n$ *para* $n > m$

Demonstração : Designando por A_n e B_n , respectivamente, os termos gerais das sucessões das somas parciais das séries do enunciado, tem-se, para $n > m$,

$A_n = a_1 + a_2 + ... + a_m + a_{m+1} + ... + a_n$

$B_n = b_1 + b_2 + ... + b_m + b_{m+1} + ... + b_n = b_1 + b_2 + ... + b_m + a_{m+1} + ... + a_n$,

donde resulta, para $n > m$,

$$A_n - B_n = (a_1 + a_2 + ... + a_m) - (b_1 + b_2 + ... + b_m) = k \text{ (constante)},$$

ou ainda, $A_n = B_n + k$ (com k constante) ; esta última igualdade permite concluir que $lim\ A_n$ é finito se e só se o mesmo acontecer com $lim\ B_n$. Em conclusão, a convergência de uma das séries implica a da outra e o mesmo se pode dizer quanto à divergência.

P3 : *As séries* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p}$ *(* $p \in \mathbf{N}$ *) são da mesma natureza (ambas convergentes ou ambas divergentes)*

Demonstração : Representando por S_n e $S_{n,p}$, respectivamente, os termos gerais das sucessões das somas parciais das séries do enunciado, tem-se,

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \quad \text{e} \quad S_{n,p} = u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{p+n} ,$$

e é óbvio que $S_{p+n} = (u_1 + u_2 + ... + u_p) + S_{n,p}$. Como p é fixo, a soma dentro do parentisis no segundo membro da igualdade é uma constante, o que permite concluir,

$$lim\ S_n = lim\ S_{p+n} \text{ finito} \Leftrightarrow lim\ S_{n,p} \text{ finito} ,$$

donde se tira a conclusão do enunciado.

Como comentário ao resultado estabelecido na propriedade anterior, convém referir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p}$ é usualmente designada por *série resto de ordem p* da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$: a primeira série pode considerar-se que foi obtida a partir da segunda por supressão dos p termos iniciais desta . A propriedade afirma que uma série e a correspondente série resto de ordem p (com $p \in \mathbf{N}$) são da mesma natureza (ambas convergentes ou ambas divergentes). No caso de convergência, a igualdade estabelecida no decorrer da demonstração da propriedade, ou seja, $S_{p+n} = (u_1 + u_2 + ... + u_p) + S_{n,p}$, permite concluir que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = lim\ S_n = lim\ S_{p+n} = (u_1 + u_2 + ... + u_p) + lim\ S_{n,p} =$$

$$= (u_1 + u_2 + ... + u_p) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p} .$$

Podemos assim enunciar,

P4 : *A soma de uma série, quando convergente, é igual à soma dos seus p primeiros termos mais a soma da respectiva série resto de ordem p*

Ainda no caso de convergência, a partir da igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p} \, ,$$

pode concluir-se, passando ao limite em p, que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = lim \, (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + lim \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p} \, ,$$

e como $lim \, (u_1 + u_2 + \ldots + u_p) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, resulta que $lim \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+p} = 0$. Ou seja,

P5 : *A soma da série resto de ordem p de uma série convergente tende para zero quando p tende para infinito*

P6 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergentes, então também converge a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ *e tem-se quanto às respectivas somas a igualdade:* $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

<u>Demonstração</u>: Representando por U_n , V_n e W_n os termos gerais das sucessões das somas parciais, respectivamente, das séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, tem-se:

$$W_n = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) = U_n + V_n \, .$$

E então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ convergentes } \Rightarrow lim \, U_n \text{ e } lim \, V_n \text{ finitos } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow lim \, W_n = lim \, U_n + lim \, V_n \text{ finito } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) \text{ convergente e } \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \, .$$

A propósito da propriedade que acaba de ser apresentada convém notar que a soma termo a termo de séries divergentes pode originar uma série convergente. Por exemplo , somando termo a termo as séries divergentes $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ obtém-se uma série com todos os termos nulos que é obviamente convergente (tem soma igual a zero).

P7 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série convergente e k um qualquer real, tem-se que* $\sum_{n=1}^{\infty} (k\, u_n)$ *é igualmente convergente e* $\sum_{n=1}^{\infty} (k\, u_n) = k \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

<u>Demonstração</u> : Representando por U_n e W_n os termos gerais das sucessões das somas parciais, respectivamente, das séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (k\, u_n)$, tem-se :

$$W_n = k\, u_1 + k\, u_2 + \ldots + k\, u_n = k \,.U_n \ .$$

E então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ convergente } \Rightarrow \lim U_n \text{ finito } \Rightarrow \lim W_n = k \,.\, \lim U_n \text{ finito } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (k\, u_n) \text{ convergente e } \sum_{n=1}^{\infty} (k\, u_n) = k \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ .$$

Como consequência imediata das propriedades **P6** e **P7**, tem-se:

P8 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *convergentes e* λ *e* μ *números reais, então também converge a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n)$ *e tem-se a seguinte igualdade:* $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \mu \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

A propriedade seguinte fundamenta a possibilidade de associação de termos consecutivos nas séries convergentes:

P9 : *Associando-se termos consecutivos em série convergente, mantém-se a convergência e a soma*

<u>Demonstração</u> : Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e associem-se nela os α_1 primeiros termos, os α_2 - α_1 seguintes, os α_3 - α_2 seguintes e assim sucessivamente. Obtém-se assim uma nova série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ com termos,

$$v_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{\alpha_1}$$

$$v_2 = u_{\alpha_1+1} + u_{\alpha_1+2} + \cdots + u_{\alpha_2}$$
$$v_3 = u_{\alpha_2+1} + u_{\alpha_2+2} + \cdots + u_{\alpha_3}$$
$$\ldots$$
$$v_n = u_{\alpha_{n-1}+1} + u_{\alpha_{n-1}+2} + \cdots + u_{\alpha_n}$$

...

Tem-se então, representando por U_n e V_n , respectivamente, os termos gerais das sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$:

$$V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = U_{\alpha_n} .$$

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ for convergente, tem-se $lim\ U_n$ finito ; como U_{α_n} é uma subsucessão de U_n será também finito $lim\ V_n = lim\ U_{\alpha_n} = lim\ U_n$, igualdades que ao mesmo tempo provam a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ e que a soma desta é igual à soma da série inicial $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Convém referir, a propósito da propriedade que acaba de ser demonstrada, que a associação de termos consecutivos em série divergente pode originar uma série convergente. Assim, por exemplo, associando cada um dos termos da série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ com o termo seguinte (o primeiro com o segundo, o terceiro com o quarto, etc.) obtém-se uma série com termos todos nulos que é obviamente convergente.

4. <u>Condição necessária e suficiente de convergência de uma série</u>

Com base na condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão, conclui-se imediatamente que:

Teorema 1 : *A condição necessária e suficiente para a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *é que,* $\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_\varepsilon :\ n > m > n_\varepsilon \Rightarrow |\ u_{m+1} + u_{m+2} + \ \ldots\ + u_n\ | < \varepsilon$

<u>Demonstração</u> : A série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ será convergente se e só se for convergente a sucessão das somas parciais, $S_n = u_1 + u_2 + \ \ldots\ + u_n$. E esta sucessão será convergente se e só se verificar a condição de Cauchy, ou seja, se e só se,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ n_\varepsilon :\ n > m > n_\varepsilon \Rightarrow |\ S_n - S_m\ | < \varepsilon\ ;$$

mas como $S_n - S_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \ \ldots\ + u_n$ resulta logo de imediato a condição do enunciado.

Vejamos, como exemplo de aplicação deste teorema, que é divergente a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Atendendo a que, com $n > m$,

$$\left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right| \geq \frac{n-m}{n} ,$$

tem-se, tomando em particular $n = 2\,m > m \geq 1$,

$$\left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \geq \frac{m}{2\,m} = 1/2 \;;$$

então, fixando por exemplo $\varepsilon = 1/3$, não existe uma ordem n_1 tal que ,

$$n > m > n_1 \Rightarrow \left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \right| < 1/3 ,$$

porque, para todo o m , tomando em particular $n = 2\,m > m$, tem-se como se viu,

$$\left| \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m} \right| \geq 1/2 \;.$$

5. Critérios de convergência para séries de termos não negativos

5.1 - Introdução

O estudo da convergência de uma série e cálculo da respectiva soma directamente a partir da definição é tarefa normalmente impraticável. A obtenção de uma expressão para o termo geral da sucessão das somas parciais que permita o cálculo prático do respectivo limite (para assim se achar a soma ou inferir a divergência), só muito excepcionalmente é possível.

Os casos estudados no ponto 2. , em que foi possível estudar a convergência das séries dadas e calcular a respectiva soma pela definição, não são a regra.

Por norma, o estudo da convergência de uma série faz-se por métodos indirectos (critérios de convergência) e no cálculo da soma o melhor que se consegue é o seu cálculo aproximado com um grau de precisão fixado previamente.

Vamos estudar seguidamente alguns critérios de convergência aplicáveis às séries de termos não negativos, deixando a questão do cálculo aproximado da soma de uma série para tratamento posterior.

Embora os critérios de convergência que vamos estudar sejam deduzidos na hipótese de os termos das séries envolvidas serem todos não negativos, eles são também aplicáveis quando:

a) A série em questão tenha termos não negativos de certa ordem p em diante pois, neste caso, os critérios são aplicáveis à série resto de ordem p (que terá então apenas termos não negativos) e as conclusões que se tirem sobre a convergência ou divergência desta são aplicáveis à série inicial;

b) A série em questão tenha termos não positivos de certa ordem p em diante pois, neste caso, multiplicando os termos da série por -1 , obtém-se uma série da mesma natureza (convergente ou divergente como a inicial) cujos termos são não negativos da ordem p em diante e à qual se aplicam, portanto, como se disse em **a)**, os critérios de convergência que vamos estudar.

Face ao que acaba de ser dito, pode concluir-se que os critérios que vamos estudar só não são aplicáveis quando a série em questão tenha uma infinidade de termos positivos e uma infinidade de termos negativos. Ainda assim, os critérios que estamos referindo são aplicáveis como veremos na detecção de uma modalidade especial de convergência (a chamada convergência absoluta que adiante definiremos).

5.2 - Critérios gerais de comparação

Considere-se uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de termos todos não negativos. Representando por A_n o termo geral da sucessão das somas parciais, tem-se,

$$A_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_n \leq a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_n + a_{n+1} = A_{n+1} \,,$$

por ser $a_{n+1} \geq 0$ (por hipótese a série tem termos todos não negativos). Mas sendo crescente, a sucessão A_n terá limite finito (se for majorada) ou $+\infty$ (se não for majorada); ou seja, série de termos todos não negativos, ou é convergente ou é divergente infinita (soma igual a $+\infty$), não podendo ser divergente oscilante. Esta conclusão é importante para o que vai seguir-se.

Teorema 2 : *Sendo* $0 \leq a_n \leq b_n$ *para todo o* n *, tem-se :*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergente ;*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergente*

Demonstração : **a)** Representando por A_n e B_n , respectivamente, os termos gerais das sucessões das somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tem-se $A_n \leq B_n$ (porque por hipótese $a_n \leq b_n$ para todo o n); mas então, pelas considerações que precedem o enunciado do teorema, tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textit{ convergente} \,,\ b_n \geq 0 \ \text{ e } \ a_n \geq 0 \ \Rightarrow\ B_n \ \textit{ sucessão majorada e } \ a_n \geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_n \ \textit{ sucessão majorada e } \ a_n \geq 0 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{ convergente} \,.$$

b) Decorre de **a)**. Com efeito, se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for convergente , então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ não poderá ser divergente (conforme se provou na alínea anterior) ; portanto, a divergência desta implica a divergência daquela.

Corolário 1 : *O enunciado do teorema é válido, mesmo que o enquadramento* $0 \leq a_n \leq b_n$ *se verifique apenas de certa ordem em diante*

Demonstração : Sendo p a ordem a partir da qual se verifica o enquadramento $0 \leq a_n \leq b_n$, as implicações do enunciado do teorema são válidas para as séries resto de ordem p das séries envolvidas. E como uma série e a respectiva série resto de ordem p são da mesma natureza, as implicações são evidentemente válidas para as séries originais.

Corolário 2 : *Sendo* $a_n \geq 0$ *,* $b_n > 0$ *e* $a_n / b_n \leq k$ *(com* $k > 0$*) de certa ordem em diante, tem-se:*

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergente ;*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergente*

<u>Demonstração</u> : As condições do enunciado garantem que $0 \le a_n \le k \,.\, b_n$ de certa ordem em diante e então:

a) Pela propriedade **P7**, a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} (k\, b_n)$ e a desta implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (corolário 1);

b) Pelo corolário 1, a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} (k\, b_n)$ e a desta implica a de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (pois se esta última série fosse convergente , também o seria $\sum_{n=1}^{\infty} (k\, b_n)$, pela proprieda-de **P7**).

Corolário 3 : *Existindo números positivos <u>c</u> e <u>d</u> tais que* $0 < c \le a_n / b_n \le d$ *, de certa ordem em diante, as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *são da mesma natureza (ambas convergentes ou divergentes)*

<u>Demonstração</u> : Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente, o corolário 2 assegura a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, como $b_n / a_n \le 1/c$, de novo o corolário 2 assegura a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Então, supondo verificadas as condições do enunciado, tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ convergente } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ convergente ;}$$

e portanto as séries são da mesma natureza.

Corolário 4 : *Sendo* $a_n \ge 0$ *,* $b_n > 0$ *e* $k = \lim a_n / b_n$ *, então:*

a) *Com* $k = 0$ *,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergente ;*

b) *Com* $k = +\infty$*,* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergente ;*

c) *Com* $k \ne 0 \,,\, +\infty$*, as séries são da mesma natureza (ambas convergentes ou divergentes)*

<u>Demonstração</u> : **a)** Com $k = 0$, tem-se $a_n / b_n < \varepsilon$ de certa ordem em diante e então o corolário 2 assegura a conclusão.
b) Com $k = +\infty$, tem-se $a_n / b_n > 1/\varepsilon$, ou seja , $b_n / a_n < \varepsilon$ de certa ordem em diante e então o corolário 2 assegura de novo a conclusão.
c) Com $k \neq 0 , +\infty$, tem-se, fixando $\varepsilon > 0$ tal que $k - \varepsilon > 0$, $0 < k - \varepsilon < a_n / b_n < k + \varepsilon$,
de certa ordem em diante e então o corolário 3 assegura a conclusão.

Corolário 5 : *Sendo* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *e ainda, de certa ordem em diante,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} ,$$

então :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *convergente ;*

b) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergente* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergente*

<u>Demonstração</u> : Da desigualdade do enunciado decorre que,

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} ,$$

para $n > m$ (com certo m) , ou seja, a_n / b_n é uma sucessão decrescente de certa ordem m em diante. Então,

$$n > m \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{m+1}}{b_{m+1}} = k ,$$

sendo as implicações a provar asseguradas pelo corolário 2.

Vejamos alguns exemplos de aplicação do teorema 2 e seus corolários.

A) <u>Exemplos de aplicação directa do teorema 2</u> :

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente, porque $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ e diverge a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ é convergente, porque,

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ,$$

e converge a série redutível $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

B) <u>Exemplos de aplicação do corolário 4</u> :

3) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, porque,

$$lim \; \frac{1/n^2}{1/(n+1)^2} \; = \; lim \; \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1 \; ,$$

e, como se viu no exemplo **2)**, converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

4) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,.\,log(n+1)}$ é divergente. Com efeito, a série redutível, $\sum_{n=1}^{\infty} \left[log\,log(n+1) \,-\, log\,log(n+2)\right]$ é divergente e portanto também diverge a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left[log\,log(n+2) \,-\, log\,log(n+1)\right]$, uma vez que esta se obtém da precedente multiplicando os seus termos por -1 . Ora,

$$lim \quad \frac{log\,log(n+2) - log\,log(n+1)}{\dfrac{1}{(n+1).log(n+1)}} \; =$$

$$= lim \quad (n+1).log(n+1).\left[log \frac{log(n+2)}{log(n+1)}\right] = \; 1 \; ,$$

como o leitor pode concluir (o cálculo do limite indicado constitui um bom exercício de revisão). O corolário 4 assegura portanto a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,.\,log(n+1)}$.

C) <u>Exemplo de aplicação do corolário 5</u> :

5) A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$ é convergente, pois com $a_n = \frac{n^2}{5^n}$ e $b_n = (4/5)^{n-1}$, tem-se,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \; = \; \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n^2} \; = \; \frac{1}{5} \cdot (1 + 1/n)^2 \;\; \leq \;\; \frac{4}{5} \; = \; \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad ,$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} (4/5)^{n-1}$ é convergente (série geométrica de razão 4/5).

5.3 - <u>Critério de Dirichlet</u>

Trata-se de um critério especial de comparação com a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ cuja natureza tem portanto de ser estabelecida previamente . Já antes vimos, a título de exemplo, alguns
casos particulares desta série: com $\alpha = 1$, a série diverge, o mesmo acontecendo com α = = 1/2 ; com $\alpha = 2$, vimos que a série é convergente. Vamos seguidamente fazer o estudo completo desta série:

a) Com $\alpha \leq 1$, tem-se $1/n^{\alpha} \geq 1/n$ e como $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverge, o teorema 2 assegura a divergência de $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$;

b) Com $\alpha > 1$, a série redutível,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \right] ,$$

é convergente e dado que,

$$lim \; \frac{\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\dfrac{1}{n^{\alpha}}} = lim \;\; n \, . \left[1 - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\alpha - 1} \right] =$$

$$= lim \;\; n \, . \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{\alpha - 1} \right] = lim \;\; n \, . \left[1 - 1 + \frac{1}{n+1} \cdot (\alpha - 1) \, . \, \zeta \right] = \alpha - 1 > 0 \, ,$$

o corolário 4 do teorema 2 permite concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ $(\alpha > 1)$ é igualmente convergente.

Podemos então enunciar:

Teorema 3 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n \geq 0$ *, calcule-se (caso exista),*

$$\lambda = lim \; \frac{a_n}{1/n^{\alpha}} = lim \; n^{\alpha} . \, a_n \; .$$

Então:

***a)** Se for* $\lambda = 0$ *, com* $\alpha > 1$*, a série converge ;*

***b)** Se for* $\lambda = +\infty$*, com* $\alpha \leq 1$*, a série diverge ;*

***c)** Se for* $\lambda \neq 0 \, , +\infty$ *:* ***c1)** Com* $\alpha > 1$ *, a série converge ;* ***c2)** Com* $\alpha \leq 1$*, a série diverge*
(Critério de Dirichlet)

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do corolário 4 do teorema 2 , considerando $b_n = 1/n^{\alpha}$ e notando que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ converge ou diverge consoante seja $\alpha > 1$ ou $\alpha \leq 1$.

Note-se que o critério do teorema 3 permite as duas seguintes situações inconclusivas: $\lambda = 0$ e $\alpha \leq 1$; $\lambda = +\infty$ e $\alpha > 1$.

5.4 - Critério da razão. Critério de D'Alembert

O corolário 5 do teorema 2 e o facto de as séries convergentes terem termos gerais que tendem para zero, permitem demonstrar o seguinte:

Teorema 4 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n > 0$ *,*

a) *Se existe um número positivo* $r < 1$ *tal que, a partir de certa ordem, se tenha,* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ *, então a série converge;*

b) *Se, a partir de certa ordem se tem,* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$*, então a série diverge*

(Critério da razão)

Demonstração : **a)** Como $0 < r < 1$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ é convergente e dado que, por hipótese, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r = \frac{r^n}{r^{n-1}}$, o corolário 5 do teorema 2 permite concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) A desigualdade do enunciado implica que, a partir de certa ordem, a sucessão a_n é crescente o que implica não poder ser nulo o *lim* a_n (porque por hipótese $a_n > 0$). Em consequência, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tem de ser divergente (em série convergente o termo geral tende necessariamente para zero).

Este teorema admite o seguinte corolário de frequente aplicação prática:

Corolário : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n > 0$ *, se existir* $\lambda = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$*, tem-se:*

a) *Se* $\lambda < 1$ *, a série converge;*

b) *Se* $\lambda > 1$ *, a série diverge* (Critério de D'Alembert)

Demonstração : **a)** Sendo $\lambda < 1$, escolha-se $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < 1$. Por definição de limite ter-se-á, a partir de certa ordem,

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon < 1 ,$$

e a alínea a) do teorema 4 garante a conclusão.

b) Sendo $\lambda > 1$, escolha-se $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda - \varepsilon > 1$. Por definição de limite ter-se-á, a partir de certa ordem,

$$1 < \lambda - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda + \varepsilon < 1 \, ,$$

e a alínea b) do teorema 4 garante a conclusão.

Note-se que o critério do corolário precedente (critério de D'Alembert) é inconclusivo quando seja, $\lambda = \; lim \; \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. No entanto, neste caso, se se verificar $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (convergência para 1 por valores à direita), a aplicação directa do teorema 4 garante a divergência da série.

Vejamos um exemplo de aplicação. Para a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$, com c > 0, tem-se:

$$lim \; \frac{\dfrac{c^{n+1} \, . \, (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{c^n \, n!}{n^n}} = lim \;\; c(n+1) \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = lim \;\; c \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = c/e \, .$$

Então, se for $c < e$, a série converge ; se for $c > e$, a série diverge ; no caso $c = e$, embora o limite seja unitário, dado que,

$$e \, . \, \frac{n^n}{(n+1)^n} = e \, . \, \frac{1}{(1 + 1/n)^n} > 1 \, ,$$

a aplicação directa do teorema 4 permite concluir divergência.

5.5 - Critério da raiz. Critério de Cauchy

O teorema 2 permite ainda deduzir um outro critério de convergência de larga aplicação prática. Trata-se de critério da raiz e do seu corolário (critério de Cauchy).

Teorema 5 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n \geq 0$ *,*

a) *Se existe um número positivo* $r < 1$ *tal que , a partir de certa ordem, se tenha,* $\sqrt[n]{a_n} \leq r < 1$ *, então a série converge;*

b) *Se, para infinitos valores de* $\underline{n}$ *se tem,* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$*, então a série diverge*
(Critério da raiz)

Demonstração : **a)** Tem-se a partir de certa ordem $a_n \leq r^n$ e como, com $0 < r < 1$, a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ é convergente, o teorema 2 garante a conclusão.

b) Se para infinitos valores de n se tem $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, ou seja, $a_n \geq 1$, não pode ter-se $lim\ a_n = 0$ e então a série diverge.

<u>**NOTA IMPORTANTE**</u> **:** Contrariamente ao critério da razão, em que a condição suficiente de divergência era a verificação da desigualdade $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a partir de certa ordem , no critério da raiz basta que a desigualdade $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ seja verificada para infinitos valores de n para se poder inferir divergência.

O teorema precedente admite o seguinte corolário de frequente aplicação prática:

Corolário : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n \geq 0$ *, sendo* $\lambda = lim\ máx\ \sqrt[n]{a_n}$ *,*

a) *Se* $\lambda < 1$ *, a série converge;*

b) *Se* $\lambda > 1$ *, a série diverge* (Critério de Cauchy)

<u>Demonstração</u> : **a)** Sendo $\lambda < 1$, escolha-se $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < 1$. Apenas um número finito de termos da sucessão $u_n = \sqrt[n]{a_n}$ podem exceder $\lambda + \varepsilon$; caso contrário existiria uma subsucessão de u_n com todos os termos a exceder $\lambda + \varepsilon$ e claro que tal subsucessão admitiria um sublimite $u \geq \lambda + \varepsilon$; u seria também sublimite da sucessão $u_n = \sqrt[n]{a_n}$ que teria assim um sublimite superior ao respectivo limite máximo, o que é imposível. Tem-se então, a partir de certa ordem,

$$\sqrt[n]{a_n} < \lambda + \varepsilon < 1 ,$$

e a alínea a) do teorema 5 garante a conclusão.

b) Sendo $\lambda > 1$, escolha-se $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda - \varepsilon > 1$. Por definição de limite máximo, existe uma subsucessão de $u_n = \sqrt[n]{a_n}$ com limite λ e portanto tem-se, para infinitos valores e n ,

$$\sqrt[n]{a_n} > \lambda - \varepsilon > 1 ,$$

e a alínea b) do teorema 5 garante a conclusão.

Note-se que o critério do corolário precedente (critério de Cauchy) é inconclusivo quando seja, $\lambda = lim\ máx\ \sqrt[n]{a_n} = 1$. No entanto, neste caso, se se verificar $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ para infinitos valores de n, a aplicação directa do teorema 5 garante a divergência da série.

Nota importante: Nos casos mais correntes existe $lim\ \sqrt[n]{a_n}$ e portanto o critério aplica-se com $lim\ \sqrt[n]{a_n} = lim\ máx\ \sqrt[n]{a_n}$.

Vejamos dois exemplos de aplicação.

1) Para a série, $\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} . e^n$, com $c > 0$, tem-se,

$$lim \sqrt[n]{c^{n^2} . e^n} = lim\, c^n . e = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < c < 1 \\ e & , \quad c = 1 \\ +\infty & , \quad c > 1 \end{cases} .$$

Logo a série converge se $0 < c < 1$ e diverge se $c \geq 1$.

2). Para a série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left[3 + (-1)^n\right]^n} ,$$

não existe,

$$lim \sqrt[n]{\frac{1}{\left[3 + (-1)^n\right]^n}} = lim \frac{1}{3 + (-1)^n} ,$$

No entanto, como,

$$lim\ máx \frac{1}{3 + (-1)^n} = 1/2 < 1,$$

fica garantida a convergência da série.

5.6 - <u>Teorema de Kummer</u>

O teorema seguinte constitui um resultado de notável simplicidade e generalidade que nos irá permitir deduzir posteriormente novos critérios de convergência, a utilizar quando os critérios já estudados sejam inconclusivos.

Teorema 6 : *Existindo números positivos* ω , k_1 , k_2 , ... , k_n , ... *que façam,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{k_n}{k_{n+1} + \omega} ,$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge . Se, por outro lado,*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{k_n}{k_{n+1}} ,$$

e diverge $\sum_{n=1}^{\infty} 1 / k_n$ *, então também diverge* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (Kummer)

<u>Demonstração</u> : **a)** Vejamos a parte em que o teorema afirma a convergência. Tem-se,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{k_n}{k_{n+1} + \omega} \Leftrightarrow \omega\, a_{n+1} \leq k_n\, a_n \ - \ k_{n+1}\, a_{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq \frac{1}{\omega} \cdot (k_n a_n - k_{n+1} a_{n+1}) \quad .$$

Ora a série redutível $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega} \cdot (k_n a_n - k_{n+1} a_{n+1})$ é convergente. Com efeito,

$$\omega a_{n+1} + k_{n+1} a_{n+1} \leq k_n a_n \Rightarrow k_{n+1} a_{n+1} \leq k_n a_n \text{ (por ser } \omega a_{n+1} \geq 0) ;$$

conclui-se assim que $k_n a_n$ é uma sucessão decrescente de termos não negativos (logo minorada), existindo portanto finito o $\lim k_{n+1} a_{n+1}$. O teorema 2 permite então concluir que é convergente a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ e portanto também a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de que aquela é a série resto de ordem 1 .

b) A segunda parte do teorema também se demonstra com facilidade. Da segunda desigualdade do enunciado, tira-se,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/k_{n+1}}{1/k_n},$$

e como por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} 1/k_n$ diverge , também diverge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (corolário 5 do teorema 2).

Como habitualmente, as conclusões do enunciado do teorema precedente não exigem que as desigualdades sejam verificadas para todo o n , bastando que o sejam a partir de certa ordem p . Com efeito, o teorema pode ser aplicado à série resto de ordem p da série a estudar, a qual tem a mesma natureza desta.

É interessante notar que , com $k_n = 1$, o teorema de Kummer dá o critério da razão do teorema 4.

O teorema de Kummer admite ainda como corolários dois critérios práticos muito usados e que permitem em grande número de casos estudar a convergência quando sejam inconclusivos outros critérios. Trata-se dos critérios de Raabe e de Gauss que vamos estudar nos pontos seguintes.

5.7 - Critério de Raabe

Trata-se de um critério que resulta do teorema 6 (teorema de Kummer) fazendo nele $k_n = n$. Assim,

Teorema 7 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n > 0$ *,*

a) *Se existe* $\omega > 0$ *tal que, de certa ordem em diante,*

$$n \,.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ \geq\ 1+\omega\,,$$

a série converge;

***b)** Se, de certa ordem em diante,*

$$n \,.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \ \leq\ 1\,,$$

a série diverge (Critério de Raabe)

<u>Demonstração</u> : **a)** A primeira desigualdade do enunciado implica, após algumas manipulações algébricas, que,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n}{n+1+\ \omega}\ ,$$

e aplicando o teorema 6 com $k_n = n$ conclui-se que a série converge.

b) A segunda desigualdade do enunciado implica que,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}\ ,$$

e aplicando o teorema 6 com $k_n = n$ conclui-se que a série diverge.

Na prática o critério de Raabe do teorema anterior é normalmente aplicado calculando,

$$\lambda = lim\ n\,.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\ .$$

Se for $\lambda > 1$, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que λ - $\varepsilon > 1$, tem-se, de certa ordem em diante,

$$n\,.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \lambda - \varepsilon > 1\ ,\ \text{ ou seja, }\ n\,.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1+\omega > 1\ \ ,$$

com $\omega = \lambda - \varepsilon - 1 > 0$; então, o teorema 7 assegura a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Se for $\lambda < 1$, escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda + \varepsilon < 1$, tem-se, de certa ordem em diante,

$$n\,.\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < \lambda + \varepsilon < 1,$$

e então, o teorema 7 assegura a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Podemos portanto enunciar:

Corolário : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n > 0$ *, sendo,*

$$\lambda = lim\ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$$

a) *Sendo* $\lambda > 1$ *, a série converge;*

b) *Sendo* $\lambda < 1$ *, a série diverge*

Note-se que quando seja $\lambda = 1$, nada se pode concluir, a menos que,

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \le 1 \ ,$$

caso em que a aplicação directa do teorema 7 dá a divergência da série.

Vejamos um exemplo de aplicação. Para estudar a natureza da série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\alpha\,(\alpha+1)\,...\,(\alpha+n-1)} \ \text{, com } \alpha > 0 \ ,$$

vamos começar por aplicar o critério de D'Alembert : tem-se,

$$lim\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = lim\ \frac{\dfrac{(n+1)!}{\alpha\,(\alpha+1)\,...\,(\alpha+n-1)(\alpha+n)}}{\dfrac{n!}{\alpha\,(\alpha+1)\,...\,(\alpha+n-1)}} = lim\ \frac{n+1}{n+\alpha} = 1\ ,$$

não podendo portanto em princípio tirar-se qualquer conclusão ; no entanto , para $0 < \alpha \le 1$, tem-se,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+\alpha} \ge 1\ ,$$

e a aplicação directa do teorema 4 (critério da razão) permite concluir que a série diverge. Para $\alpha > 1$, o critério da razão e seu corolário revelam-se inconclusivos e vamos ver que a aplicação do critério de Raabe esclarece completamente a questão. Tem-se ,

$$\lambda = lim\ n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = lim\ n \left(\frac{n+\alpha}{n+1} - 1 \right) = \alpha - 1\ ,$$

donde resulta (ver corolário 1 do teorema 7) : se α - 1 > 1 , ou seja, $\alpha > 2$, a série converge; se α - 1 < 1 , ou seja, $\alpha < 2$, a série diverge ; para $\alpha = 2$, o limite obtido seria inconclusivo (= 1) , mas notando que, neste caso,

$$n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{n+1} \leq 1 ,$$

a aplicação directa do teorema 7 leva à conclusão de que a série diverge.

5.8 - Critério de Gauss

Estuda-se a seguir um novo critério que se obtém em parte do critério de Raabe e em parte pela aplicação directa do teorema 6 (teorema de Kummer). Trata-se do critério de Gauss, por vezes útil para esclarecer situações em que o critério de Raabe é inconclusivo.

Teorema 8 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n > 0$ *, sendo,*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{l_n}{n^{1+\alpha}} ,$$

com l_n *sucessão limitada e* $\alpha > 0$ *,*

a) *Sendo* $k > 1$ *, a série converge;*

b) *Sendo* $k \leq 1$ *, a série diverge* (Critério de Gauss)

Demonstração : As conclusões correspondentes ao casos $k > 1$ e $k < 1$, obtêm-se imediatamente pela aplicação do critério de Raabe . Falta portanto justificar a conclusão referente ao caso $k = 1$. Para tal recordemos aqui a exemplo 4) do ponto 5.2 em que se viu ser divergente a série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot log\,(n+1)} ;$$

aplicando o teorema de Kummer com $k_n = (n+1)\, log\,(n+1)$, bastará provar que,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{(n+1)\, log\,(n+1)}{(n+2)\, log\,(n+2)} ,$$

ou seja, que ,

$$(n+1)\, log\,(n+1) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+2)\, log\,(n+2) \leq 0 ,$$

de certa ordem em diante, para provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Ora,

$$lim \left[(n+1)\, log\,(n+1) \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+2)\, log\,(n+2) \right] =$$

$$= lim \left[(n+1)\, log\,(n+1)\,.\,(1 + \frac{k}{n} + \frac{l_n}{n^{1+\alpha}}) - (n+2)\, log\,(n+2) \right] = -1 < 0 \,,$$

como se pode verificar após alguns cálculos que se deixam ao cuidado do leitor (atender a que l_n é sucessão limitada e $\alpha > 0$), o que justifica a verificação da desigualdade pretendida de certa ordem em diante.

Como para os critérios anteriores, apresenta-se um exemplo de aplicação do critério de Gauss. Para a série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{[1+(0\times 1)].[1+(1\times 2)].[1+(2\times 3)]. \ldots .[1+(n-1)\,n]} \,,$$

o critério de Gauss dá divergência , pois,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1+n+n^2}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{1+1}} \,.$$

O leitor pode verificar que a aplicação dos critérios da razão e de Raabe à série dada não permitiria esclarecer a sua natureza.

6. Convergência absoluta e convergência simples

Dada uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de termos quaisquer , considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ dos módulos dos termos da primeira (abreviadamente, a série dos módulos). No teorema seguinte prova-se que a convergência da série dos módulos implica a da série inicial e estabelece--se uma desigualdade entre as respectivas somas.

Teorema 9 : *Sendo convergente a série* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *, também converge a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *e tem-se a seguinte desigualdade entre as respectivas somas:*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

Demonstração : A série $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ será convergente se e só se for verificada a seguinte condição:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,,\, \exists\, n_\varepsilon :\; n > m > n_\varepsilon \Rightarrow |\, |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots + |u_n|\, | < \varepsilon \,,$$

como se viu no teorema 1; mas como,

$$|u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_n| \leq |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots + |u_n| =$$

$$= |\, |u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots + |u_n|\, | \,,$$

a referida condição verifica-se também para os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, o que garante a convergência desta última.

A desigualdade entre as somas prova-se sem dificuldade. Tem-se, designando por S_n* a soma dos n primeiros termos de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ e por S_n idêntica soma relativa a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

$$S_n* = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| \geq |u_1 + u_2 + \ldots + u_n| = |S_n| ,$$

e então, em caso de convergência, resulta imediatamente,

$$|\sum_{n=1}^{\infty} u_n| = |\lim S_n| = \lim |S_n| \leq \lim S_n* = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| .$$

Nos termos do teorema precedente, a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ é sempre acompanhada da de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, dizendo-se então que esta última é *absolutamente convergente* .

Note-se, no entanto, que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ pode ser convergente sem que o seja $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, dizendo-se nesse caso que a primeira é *simplesmente convergente* . Um exemplo de série simplesmente convergente é a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . 1/n$. Com efeito, a série dos módulos é $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ que sabemos ser divergente; no entanto, como adiante se verá, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . 1/n$ é convergente.

Como observações óbvias sobre o conceito de convergência simples, convém notar que (a justificação fica ao cuidado do leitor):

a) As séries de termos todos não negativos não podem ser simplesmente convergentes (ou são absolutamente convergentes ou divergentes), o mesmo acontecendo às séries de termos todos não positivos;

b) A conclusão da alínea anterior subsiste se a não negatividade (ou a não positividade) dos termos da série se verificar ininterruptamente de certa ordem em diante;

c) Para poder haver convergência simples é pois necessário que a série tenha infinitos termos negativos e infinitos termos positivos .

O estudo da convergência absoluta de uma série faz-se estudando a natureza da série dos módulos à qual, por se tratar de série com termos não negativos, são aplicáveis os critérios estudados no ponto 5.

Vejamos um exemplo. Considere-se a série,

$$1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 2)}{(n-1)!} + \cdots$$

com $\alpha \notin \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (note-se que para $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$, os termos da série são nulos de certa ordem em diante e claro que então a série será sempre absolutamente convergente). A série dos módulos será,

$$1 + |\alpha| + \frac{|\alpha||\alpha - 1|}{2!} + \cdots + \frac{|\alpha||\alpha - 1|\ldots|\alpha - n + 2|}{(n-1)!} + \cdots ,$$

e então,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|\alpha - n + 1|}{n} = \frac{n - \alpha - 1}{n} ,$$

de certa ordem em diante (para $n > \alpha + 1$) ; como,

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n - \alpha - 1}{n} = 1 ,$$

o critério de D'Alembert é inconclusivo; no entanto, para $\alpha + 1 \leq 0$, ou seja, $\alpha \leq -1$, tem-se a partir de certa ordem,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - \alpha - 1}{n} \geq 1 ,$$

concluindo-se ser divergente a série dos módulos para tais valores de α (critério da razão do teorema 4). Para $\alpha > -1$ o estudo da natureza da série dos módulos pode fazer-se pelo critério de Raabe : tem-se,

$$\lambda = \lim n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim n \cdot \left(\frac{n}{n - \alpha - 1} - 1 \right) = \alpha + 1 ,$$

concluindo-se portanto que a série dos módulos converge para $\alpha > 0$ e diverge para $\alpha < 0$. <u>Em conclusão</u> : A série dada é absolutamente convergente para $\alpha > 0$ e não o é para $\alpha < 0$.

Reportando-nos ainda ao exemplo precedente, convém referir que a série em causa poderá ainda eventualmente ser simplesmente convergente para certos valores $\alpha < 0$. Para $\alpha \leq -1$, a possibilidade de convergência simples pode desde logo ser eliminada dado que, como vimos, nesse caso, de certa ordem em diante,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - \alpha - 1}{n} \geq 1 ,$$

e dai resulta que não pode ter-se $\lim a_n = 0$ (por ser a_n crescente de certa ordem em diante e $a_n > 0$) ; e não convergindo para zero a sucessão dos módulos dos termos da série, o mesmo acontece com a sucessão dos termos da mesma série a qual não pode, portanto, ser convergente. Subsiste então a possibilidade de convergência simples para $-1 < \alpha < 0$, caso que será estudado no ponto seguinte.

7. <u>Estudo da convergência de séries não absolutamente convergentes</u>

7.1 - <u>Séries alternadas decrescentes</u>

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.a_n$, com $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots \geq 0$. Os termos desta série são alternadamente positivos e negativos e os respectivos módulos $| (-1)^{n-1}. a_n| = a_n$ formam uma sucessão decrescente. Uma série deste tipo designa-se por série *alternada decrescente*.

Sabemos já que em qualquer série convergente o respectivo termo geral tende para zero e claro que, em particular, o mesmo se verifica para as séries alternadas decrescentes. No entanto, para estas séries, a convergência para zero do respectivo termo geral é, além de condição necessária, também condição suficiente para a convergência da série, nos termos do teorema seguinte:

Teorema 10 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.a_n$ *, com* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *, a condição necessária e suficiente para que seja convergente é que* $\lim a_n = 0$

<u>Demonstração</u>: Basta evidentemente provar que a condição do enunciado é condição suficiente para a convergência da série alternada decrescente. Para tal:

a) Notemos em primeiro lugar que a soma finita,

$$A_{k,p} = a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} - a_{k+4} + \ldots + (-1)^{p-1}. a_{k+p} \ ,$$

é sempre um número não negativo, quaisquer que sejam $k , p \in \mathbf{N}$. Com efeito, por ser $a_{k+j} \geq a_{k+j+1}$, associando cada parcela não negativa com a seguinte obtém-se um número não negativo e então se p for par (número par de parcelas) da associação referida resultam $p/2$ parcelas não negativas que, somadas, dão um número não negativo; se p for ímpar, da associação referida resultam $(p-1)/2$ parcelas não negativas e sobra uma no final que é não negativa [p ímpar $\Rightarrow p-1$ par $\Rightarrow (-1)^{p-1} > 0$] .

b) Por ser $A_{k,p} \geq 0$ para quaisquer $k , p \in \mathbf{N}$, resulta,

$$A_{k+1\,,\,p-1} = a_{k+2} - a_{k+3} + \ \ldots \ + (-1)^{p-2}. a_{k+p} \geq 0 \ ,$$

e $A_{k,p} = a_{k+1} - A_{k+1\,,\,p-1}$; conclui-se então que, $0 \leq A_{k,p} \leq a_{k+1}$, ou seja, $| A_{k,p} | \leq a_{k+1}$.

c) Podemos agora ver com facilidade que a condição $\lim a_n = 0$ implica a convergência da série do enunciado, utilizando para tal a condição necessária e suficiente de convergência de uma série. Com efeito, para $n > m$, tem-se, usando o resultado estabelecido em b),

$$| (-1)^m . a_{m+1} + (-1)^{m+1} . a_{m+2} + \ ... \ + (-1)^{n-1} . a_n \ | \ =$$

$$= \ | \ a_{m+1} \ - \ a_{m+2} + \ ... \ + (-1)^{n-m-1} . a_{m+(n-m)} \ | \ = | \ A_{m,n-m} \ | \ \leq \ a_{m+1} \ ;$$

e de $lim \ a_n = 0$ decorre que , sendo $\varepsilon > 0$, existe uma ordem n_ε tal que , $n > n_\varepsilon \Rightarrow 0 \leq a_n < \varepsilon$ e então,

$$n > m > n_\varepsilon \Rightarrow n > m \ \wedge \ m+1 > n_\varepsilon \Rightarrow | \ A_{m,n-m} \ | \ \leq \ a_{m+1} < \varepsilon \ ,$$

ou seja, tem-se para $n > m > n_\varepsilon$,

$$| (-1)^m . a_{m+1} + (-1)^{m+1} . a_{m+2} + \ ... \ + (-1)^{n-1} . a_n \ | \ < \varepsilon \ ,$$

que é a condição necessária e suficiente de convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . a_n$.

São corolários imediatos do teorema precedente os seguintes:

Corolário 1 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . a_n$ *, com* $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *, a condição necessária e suficiente para que seja convergente é que* $lim \ a_n = 0$

<u>Demonstração</u> : As séries $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . a_n$ são da mesma natureza porque uma se obtém da outra multiplicando os respectivos termos por -1. Então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . a_n \text{ converge} \Leftrightarrow lim \ a_n = 0 \ .$$

Corolário 2 : *Considere-se uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *cujos termos verifiquem as seguintes condições, a partir de certa ordem:*

a) *Sejam alternadamente positivos e negativos (ou negativos e positivos);*

b) $| \ b_n \ | \geq | \ b_{n+1} \ |$.

A condição necessária e suficiente para que uma tal série seja convergente é que $lim \ | \ b_n \ | = 0$

<u>Demonstração</u> : Seja p a ordem a partir da qual se verificam as condições do enunciado: para $n > p$, os termos alternam de sinal e decrescem em valor absoluto. A série resto de

ordem p, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n+p}$, enquadra-se então numa das situações descritas no teorema 10 ou corolário 1. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+p} \text{ converge} \Leftrightarrow lim\ |\ b_{n+p}| = 0 \Leftrightarrow lim\ |\ b_n\ | = 0\ .$$

Corolário 3 : *Considere-se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *com termos alternadamente positivos e negativos (ou negativos e positivos) a partir de certa ordem e suponha-se que*

$$\frac{|\ b_n\ |}{|\ b_{n+1}\ |} = 1 + \frac{k}{n} + \frac{l_n}{n^{1+\beta}}\ \text{, com } l_n \text{ sucessão limitada e } \beta > 0\ .$$

Nestas condições a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *é convergente se e só se* $k > 0$.

<u>Demonstração</u> : Basta provar que só com $k > 0$ é que a sucessão b_n tem limite nulo, que neste caso $|\ b_n\ | \geq |\ b_{n+1}\ |$ de certa ordem em diante e aplicar o corolário 2 . Da igualdade do enunciado resulta,

$$log\ |\ b_n\ | - log\ |\ b_{n+1}\ | = log\ (1 + \frac{k}{n} + \frac{l_n}{n^{1+\beta}})\ ;$$

escrevendo esta igualdade para os naturais $n-1$, $n-2$, … , 2 , 1 , somando membro a membro as $n-1$ igualdade obtidas e simplificando obtém-se,

$$log\ |\ b_1| - log\ |\ b_n\ | = \sum_{i=1}^{n-1} log\ (1 + \frac{k}{i} + \frac{l_i}{i^{1+\beta}})\ .$$

Ora a série $\sum_{n=1}^{\infty} log\ (1 + \frac{k}{n} + \frac{l_n}{n^{1+\beta}})$: a) Tem os termos positivos de certa ordem em diante e é divergente se $k > 0$; b) Tem os termos negativos de certa ordem em diante e é divergente se $k < 0$; c) É absolutamente convergente se $k = 0$. No caso a) conclui-se que $lim\ log\ |\ b_n\ | = -\infty$, ou seja, $lim\ |\ b_n\ | = 0$, ou ainda $lim\ b_n = 0$; nos casos b) e c) conclui-se que $lim\ b_n$ não pode ser nulo. No caso de ser $k > 0$, da igualdade do enunciado resulta logo que $|\ b_n\ | \geq |\ b_{n+1}\ |$ de certa ordem em diante, assim se provando o que se pretendia.

Vejamos dois exemplos de aplicação destes resultados.

1) A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.\ 1/n$, que anteriormente já referimos não ser absolutamente convergente, é convergente (simplesmente convergente), porque se encontra nas condições do teorema 10.

2) A série,

$$1 + \alpha + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} + \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{3!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 2)}{(n-1)!} + \cdots$$

com $\alpha \notin \{ 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots \}$, em relação à qual tinha ficado em aberto a possibilidade de ser simplesmente convergente para $-1 < \alpha < 0$ (ver final do ponto 6.), é efectivamente convergente para tais valores de α . Para qualquer destes valores do parâmetro α , os termos da série alternam de sinal e vamos que se verificam as condições do enunciado do corolário 3. Designando por a_n o valor absoluto do termo de ordem n da série, tem-se,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n}{|\alpha - n + 1|} = \frac{n}{n-\alpha-1} = 1 + \frac{\alpha+1}{n} + \frac{l_n}{n^2} \quad , \text{com } \; l_n = \frac{(\alpha+1)^2 \,.\, n^2}{n^2 - n\alpha - n}$$

assim se concluindo que é convergente para $-1 < \alpha < 0$ (pois neste caso $\alpha + 1 > 0$).

7.2 - Critérios de Abel e Dirichlet

Vamos provar dois critérios de convergência, ambos baseados na identidade que se apresenta de seguida . Dados os números , $a_1 , a_2 , \ldots , a_n , \ldots$ e $b_1 , b_2 , \ldots , b_n , \ldots$, defina-se $A_m = \sum_{k=1}^{m} a_k$ (para $m = 1 , 2 , 3 , \ldots$) e $A_0 = 0$. Então , $a_k = A_k - A_{k-1}$, para $k = 1 , 2 , 3 , \ldots$, sendo portanto,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=2}^{n} A_{k-1} b_{k-1+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} ,$$

ou seja, $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_{n+1}$.

Podemos agora enunciar e provar o,

Teorema 11 : *Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série cuja sucessão das somas parciais seja limitada. Seja b_n uma sucessão decrescente com limite nulo. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge*

(Critério de Dirichlet)

Demonstração : Fazendo $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, tem-se que A_n é por hipótese uma sucessão limitada , ou seja , existe uma constante M tal que, $| A_n | < M$ para $n = 1 , 2 , 3 , \dots$. Como por hipótese , $\lim b_{n+1} = \lim b_n = 0$, tem-se que $\lim A_n b_{n+1} = 0$. Vejamos agora que converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$: tem-se, por ser b_n sucessão decrescente,

$$| A_n (b_n - b_{n+1}) | \leq M.(b_n - b_{n+1}),$$

e como $\sum_{n=1}^{\infty} M (b_n - b_{n+1})$ converge (por ser série redutível, com $p = 1$ e $\lim b_{n+1} = 0$) , também converge $\sum_{n=1}^{\infty} | A_n (b_n - b_{n+1})|$ e portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$ é absolutamente convergente. Então, por ser como vimos $\lim A_n b_{n+1} = 0$ e utilizando a identidade demonstrada nas considerações que precedem o teorema, conclui-se que,

$$\lim \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) + \lim A_n b_{n+1} = \lim \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) \ ,$$

existe finito e então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente como se queria provar.

Teorema 12 : *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série convergente e* b_n *uma sucessão monótona convergente. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *converge* (Critério de Abel)

Demonstração : Fazendo $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, tem-se que A_n é por hipótese uma sucessão convergente. Como por hipótese $\lim b_{n+1} = \lim b_n$ existe finito, tem-se que também existe finito $\lim A_n b_{n+1}$. Vejamos agora que converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$. Por ser convergente, a sucessão A_n é limitada , ou seja , existe uma constante M tal que , $| A_n | < M$ para $n = 1 , 2 , 3 , \dots$; tem--se então,

$$| A_n (b_n - b_{n+1}) | \leq M.(b_n - b_{n+1}),$$

se b_n for decrescente e,

$$| A_n (b_n - b_{n+1}) | \leq M.(b_{n+1} - b_n),$$

se b_n for crescente ; em qualquer dos dois casos os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} | A_n (b_n - b_{n+1})|$ são majorados pelos termos de uma série redutível convergente, o que implica a convergência absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$.

Então, por existir finito $lim\ A_n\ b_{n+1}$ e utilizando a identidade demonstrada nas considerações que precedem o teorema, conclui-se que,

$$lim \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k = lim \sum_{k=1}^{n} A_k\,(b_k - b_{k+1}) + lim\ A_n\, b_{n+1}$$

existe finito e então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ é convergente como se queria provar.

Exemplo de aplicação: A série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . (1/n) . (1 + 1/n)^n$, que facilmente se prova não ser absolutamente convergente, é convergente pelo critério de Abel, dado que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . (1/n)$ é convergente e $b_n = (1 + 1/n)^n$ é uma sucessão monótona convergente.

8. <u>Propriedades especiais das séries absolutamente convergentes</u>

8.1 - <u>Comutatividade</u>

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série absolutamente convergente e, por reordenação dos respectivos termos, construa-se uma nova série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. O teorema seguinte assegura que a série reordenada é também absolutamente convergente e tem a mesma soma que a série original.

Teorema 13 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série absolutamente convergente, qualquer série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *obtida daquela por reordenação dos respectivos termos é também absolutamente convergente e tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

<u>Demonstração</u> : Vamos provar primeiro que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é absolutamente convergente, ou seja, que $\sum_{n=1}^{\infty} |\, b_n|$ é convergente. Fazendo $B_n^* = \sum_{i=1}^{n} |\, b_i\,|$, tem-se que B_n^* é uma sucessão crescente e vejamos que é limitada, o que provará a desejada convergência para $\sum_{n=1}^{\infty} |\, b_n|$.

Como os termos $b_1 , b_2 , \dots b_n$, se encontram todos na série original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, existirá uma ordem $m(n)$ suficientemente grande por forma que entre os termos $a_1 , a_2 , \dots , a_{m(n)}$ se encontrem os termos $b_1 , b_2 , \dots , b_n$ da série reordenada e então,

$$B_n^* = \sum_{i=1}^{n} | b_i | \leq \sum_{i=1}^{m(n)} | a_i | \leq \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | ,$$

com $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ finito (soma de uma série convergente).

Falta então provar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Como ambas as séries são absolutamente convergentes, as sucessões das somas parciais,

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \ , \ B_n^* = \sum_{i=1}^{n} | b_i | \ , \ A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{e} \quad A_n^* = \sum_{i=1}^{n} | a_i | \ ,$$

têm todas limites finitos:

$$B = lim\ B_n \ , \ B^* = lim\ B_n^* \ , \ A = lim\ A_n \ \text{ e } \ A^* = lim\ A_n^* \ .$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe uma ordem m tal que,

$$| A_m - A | < \varepsilon /2 \quad \text{e} \quad | A_m^* - A^* | < \varepsilon /2 \ .$$

Como todos os termos de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se encontram em $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, a partir da ordem m referida pode achar-se k tal que, entre os termos $b_1 , b_2 , ... b_k$ se encontrem os termos $a_1 , a_2 , ... , a_m$ da série inicial; para $n \geq k$, a diferença,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{m} a_i \ ,$$

reduzir-se-á (após eliminação dos termos $a_1 , a_2 , ... , a_m$) a termos que na série original têm ordens superiores a m , ou seja, ter-se-á:

$$| \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{m} a_i | \leq | a_{m+1} | + | a_{m+2} | + ... = | A_m^* - A^* | < \varepsilon /2 \ .$$

Tem-se então, para $n > k - 1$ (a ordem $k - 1$ depende do ε fixado no início porque k é fixado a partir de m e este a partir de ε) ,

$$| B_n - A | \leq | B_n - A_m + A_m - A | \leq | B_n - A_m | + | A_m - A | =$$

$$= | \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{m} a_i | + | A_m - A | < \varepsilon /2 + \varepsilon /2 = \varepsilon \ ,$$

ou seja, $lim\ B_n = A$, o que prova ser,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = lim\ B_n = A = lim\ A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ ,$$

que é a igualdade pretendida.

Note-se que o resultado do teorema precedente não subsiste se a série original for apenas simplesmente convergente. A este respeito vamos estudar no ponto seguinte um teorema devido a Riemann que afirma ser possível, por reordenação dos termos de uma série simplesmente convergente, obter uma série com a soma que se deseje ou ainda divergente.

8.2 - Teorema de Riemann

Considerem-se duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, a primeira com termos $a_n \geq 0$ e a segunda com termos $b_n < 0$, ambas divergentes infinitas (a primeira com soma $+\infty$ e a segunda com soma $-\infty$) e tais que, $lim\ a_n = lim\ b_n = 0$. Nestas condições, vamos ver que é possível formar uma série contendo todos os a_n e todos b_n, convenientemente dispostos, que seja convergente e cuja soma seja um número real λ previamente fixado.

Na demonstração vamos utilizar as duas propriedades seguintes:

a) Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, tem-se $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = +\infty$ e é sempre possível, com qualquer p inteiro positivo, tomar termos a_n $(n \geq p)$ em número finito, suficientes para que a sua soma exceda qualquer número real pré-fixado. Do mesmo modo, como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -\infty$, tem-se $\sum_{n=p}^{\infty} b_n = -\infty$ e é sempre possível, com qualquer p inteiro positivo, tomar termos b_n $(n \geq p)$ em número finito, suficientes para que a sua soma seja inferior a qualquer número real pré-fixado.

b) Sendo $\theta < \lambda$ e $\theta + \mu > \lambda$, então, $|\ \theta + \mu - \lambda\ | < |\ \mu\ |$; do mesmo modo, sendo $\theta > \lambda$ e $\theta + \mu < \lambda$, então, $|\ \theta + \mu - \lambda\ | < |\ \mu\ |$.

Teorema 14 : *Dadas as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *, a primeira com termos* $a_n \geq 0$ *e a segunda com termos* $b_n < 0$ *, ambas divergentes infinitas (a primeira com soma* $+\infty$ *e a segunda com soma* $-\infty$*) e tais que,* $lim\ a_n = lim\ b_n = 0$ *, então é possível formar uma série contendo todos os* a_n *e todos* b_n*, convenientemente dispostos, que seja convergente e cuja soma seja um número real* λ *previamente fixado*

Demonstração : A partir das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nas condições do enunciado, construa--se uma nova série contendo todos os a_n e todos b_n procedendo do seguinte modo, cuja exequibilidade é garantida pela propriedade **a)** vista nas considerações que precedem o enunciado do teorema:

- Tomem-se os termos $a_1 , a_2 , \dots , a_{r_1}$ estritamente necessários para se ter a desigualdade, $a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} > \lambda$ e em seguida os termos $b_1 , b_2 , \dots , b_{r_2}$ estritamente necessários para se ter $a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{r_2} < \lambda$;

- Depois tomem-se os termos $a_{r_1+1} , a_{r_1+2} , \dots , a_{r_1+r_3}$ estritamente necessários para se ter,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{r_2} + a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \dots + a_{r_1+r_3} > \lambda \ ,$$

e em seguida os termos $b_{r_2+1} , b_{r_2+2} , \dots , b_{r_2+r_4}$ também estritamente necessários para se ter,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{r_2} + a_{r_1+1} + \dots + a_{r_1+r_3} + b_{r_2+1} + \dots + b_{r_2+r_4} < \lambda \ ;$$

- Proceda-se sucessivamente como se indicou, escolhendo alternadamente um certo número de termos a_i (sempre apenas os estritamente necessários) que façam a soma exceder λ e de termos b_i (também apenas os estritamente necessários) que façam a soma voltar a ser inferior a λ .

Assim se obtém a série,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \dots + b_{r_2} + a_{r_1+1} + \dots + a_{r_1+r_3} + b_{r_2+1} + \dots + b_{r_2+r_4} +$$

$$+ \dots + a_{r_1+r_3+ \cdots + r_{2k-1}+1} + \dots + a_{r_1+r_3+ \cdots + r_{2k-1}+ r_{2k+1}} +$$

$$+ b_{r_2+r_4+ \cdots + r_{2k}+1} + \dots + b_{r_2+r_4+ \cdots + r_{2k}+ r_{2k+2}} + \dots \ .$$

Sendo S_n o termo geral da sucessão das somas parciais da série construída como se indicou, as condições que presidiram a tal construção bem como a propriedade **b)** das considerações que precedem o teorema, permitem concluir que:

- Se $r_1 + r_2 + \dots \ r_{2k+1} \le n < r_1 + r_2 + \dots \ r_{2k+2}$, então,

$$| S_n - \lambda | < | a_{r_1+r_3+ \cdots +r_{2k+1}} | \quad (k = 0 , 1 , 2 , \dots) ;$$

- Se $r_1 + r_2 + \dots \ r_{2k+2} \le n < r_1 + r_2 + \dots \ r_{2k+3}$, então,

$$| S_n - \lambda | < | b_{r_2+r_4+ \cdots +r_{2k+2}} | \quad (k = 0 , 1 , 2 , \dots) .$$

E como por hipótese, $lim \ a_n = lim \ b_n = 0$, tem-se,

$$| a_{r_1+r_3+ \cdots +r_{2k+1}} | < \varepsilon \quad \text{e} \quad | b_{r_2+r_4+ \cdots +r_{2k+2}} | < \varepsilon \ ,$$

para $k > m_\varepsilon$, ou seja , para $k \geq p = p_\varepsilon = m_\varepsilon + 1$. E então , considerando a ordem $n_\varepsilon = r_1 + r_2 + \dots\ r_{2p+1} - 1$, com $p = p_\varepsilon$, tem-se,

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow n \geq r_1 + r_2 + \dots\ r_{2p+1} \Rightarrow | S_n - \lambda | < \varepsilon \ ,$$

ou seja, $lim\ S_n = \lambda$, como se pretendia demonstrar . É portanto possível construir, a partir das duas séries nas condições do enunciado, uma nova série contendo todos os termos das anteriores e cuja soma é um número qualquer que se fixe previamente.

E agora, em complemento do teorema anterior,

Teorema 15 : *Dadas as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *, a primeira com termos* $a_n \geq 0$ *e a segunda com termos* $b_n < 0$ *, ambas divergentes infinitas* (*a primeira com soma* $+\infty$ *e a segunda com soma* $-\infty$) *e tais que,* $lim\ a_n = lim\ b_n = 0$ *, então é possível formar uma série contendo todos os* a_n *e todos* b_n *, convenientemente dispostos, que seja divergente infinita* (*com soma* $+\infty$ *ou* $-\infty$ *à escolha*) *ou ainda divergente oscilante*

<u>Demonstração</u> : **a)** Para construir uma série contendo todos os a_n e todos os b_n que seja divergente e tenha soma $+\infty$, tomem-se primeiro termos $a_1 , a_2 , \dots , a_{r_1}$ por forma que $a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} > 1$ e a seguir o primeiro termo b_1 (negativo) ; depois de novo termos não negativos $a_{r_1+1} , a_{r_1+2} , \dots , a_{r_1+r_2}$ tais que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} + b_1 + a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \dots + a_{r_1+r_2} > 2$$

e em seguida o segundo termo negativo b_2 ; e assim sucessivamente, obtendo-se deste modo a série,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1} + b_1 + a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \dots + a_{r_1+r_2} + b_2 + \dots +$$
$$+ b_{k-1} + a_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}} + \dots + a_{r_1+r_2+\dots+r_{k-1}+r_k} + b_k + \dots \ .$$

Sendo S_n o termo geral da sucessão das somas parciais da série construída como se indicou, tem-se,

$$r_1 + r_2 + \dots\ r_{k-1} + (k\text{-}2) \leq n < r_1 + r_2 + \dots\ r_k + (k\text{-}1) \Rightarrow S_n > k - 1 - b_{k-1} \ ,$$

com $k = 2 , 3 , \dots$. E como a sucessão em k , $u_k = k - 1 - b_{k-1}$ tende para $+\infty$ (por ser $lim\ b_{k-1} = 0$) , tem-se, para $k \geq p = p_\varepsilon$, $k - 1 - b_{k-1} > 1/\varepsilon$; fazendo então,

$$n_\varepsilon = r_1 + r_2 + \dots\ r_{p-1} + (p\text{-}2)\text{-}\ 1 \ , \text{com } p = p_\varepsilon \ ,$$

tem-se, $n > n_\varepsilon \Rightarrow n \geq r_1 + r_2 + \dots\ r_{p-1} + (p\text{-}2) \Rightarrow S_n > 1/\varepsilon$,

assim se provando que $lim\ S_n = +\infty$.

b) Se se pretender construir a partir das séries do enunciado, uma série divergente com soma $-\infty$, bastará proceder como em **a)**, mas tomando primeiro termos negativos $b_1, b_2, \ldots, b_{r_1}$ por forma que $b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_1} < -1$ e a seguir o primeiro termo a_1 (não negativo) ; depois de novo termos negativos $b_{r_1+1}, b_{r_1+2}, \ldots, b_{r_1+r_2}$ tais que,

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_1} + a_1 + b_{r_1+1} + b_{r_1+2} + \ldots + b_{r_1+r_2} < -2 ,$$

e em seguida o segundo termo não negativo a_2 ; e assim sucessivamente, obtendo-se deste modo uma série que se vê ser divergente com soma $-\infty$.

c) Para obter uma série oscilante, a construção poderá fazer-se como segue: primeiro tomam-se termos $a_1, a_2, \ldots, a_{r_1}$ por forma que, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1} > 1$ seguidos de termos $b_1, b_2, \ldots, b_{r_2}$ tais que,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_2} < -1 \ ;$$

depois de novo termos $a_{r_1+1}, a_{r_1+2}, \ldots, a_{r_1+r_3}$ por forma que,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_2} + a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \ldots + a_{r_1+r_3} > 1 \ ,$$

seguidos de termos $b_{r_2+1}, b_{r_2+2}, \ldots, b_{r_2+r_4}$ tais que,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{r_1} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{r_2} + a_{r_1+1} + \ldots + a_{r_1+r_3} + b_{r_2+1} + \ldots + b_{r_2+r_4} < -1 \ ;$$

Procedendo deste modo sucessivamente, obtém-se uma série cuja sucessão das somas parciais não tem limite (há infinitas somas parciais que excedem 1 e infinitos somaas parciais inferiores a -1) .

Podemos agora enunciar e provar o teorema de Riemann, sobre a possibilidade de obter, a partir de uma série simplesmente convergente, por reordenação dos respectivos termos, uma nova série com a soma que se deseja ou ainda divergente (infinita ou oscilante).

Teorema 16 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *uma série simplesmente convergente , é possível, por reordenação dos respectivos termos, obter uma série convergente com a soma que se deseje ou ainda divergente (infinita ou oscilante)* (Riemann)

<u>Demonstração</u> : Face ao estabelecido nos teorema 14 e 15, o presente teorema ficará demonstrado se se provar que a partir de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nas condições do enunciado se

podem obter duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, contendo todos os termos daquela e que se encontrem nas condições dos enunciados daqueles dois teoremas.

Sabemos já que, sendo $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ simplesmente convergente, há nela infinitos termos positivos e infinitos termos negativos. Sendo $u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}, \ldots, u_{\alpha_n}, \ldots$ os infinitos termos ≥ 0 e $u_{\beta_1}, u_{\beta_2}, \ldots, u_{\beta_n}, \ldots$ os infinitos termos < 0 da série, tem-se evidentemente $lim\ u_{\alpha_n} = lim\ u_{\beta_n} = 0$ (porque $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ convergente implica ser $lim\ u_n = 0$), faltando apenas provar que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\beta_n}$ são divergentes, para ficar demonstrado que estas duas séries se encontram nas condições exigidas nos teoremas 14 e 15.

Vejamos então que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n}$ diverge (o argumento vale igualmente para a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\beta_n}$) . Fazendo,

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \quad , \quad U_n^* = \sum_{i=1}^{n} |u_i| \quad , \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha_i} \quad \text{e} \quad B_n = \sum_{i=1}^{n} u_{\beta_i} \quad ,$$

determinem-se , para cada n , os inteiros $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_{k(n)}$ que verifiquem a condição $\alpha_i \leq n$ e os inteiros $\beta_1 , \beta_2 , \ldots , \beta_{p(n)}$ que verifiquem a condição $\beta_i \leq n$; claro que, como há infinitos α_i e β_i ,

$$lim\ n = +\infty \Rightarrow lim\ k(n) = lim\ p(n) = +\infty .$$

Dado que,

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{k(n)} u_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{p(n)} u_{\beta_i} = A_{k(n)} + B_{p(n)}$$

$$U_n^* = \sum_{i=1}^{n} |u_i| = \sum_{i=1}^{k(n)} u_{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{p(n)} u_{\beta_i} = A_{k(n)} - B_{p(n)} \quad ,$$

obtém-se, $U_n^* = 2\, A_{k(n)} - U_n$. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n}$ fosse convergente, seria $lim\ A_n = A$ (finito) e então também $lim\ A_{k(n)} = A$ [porque $lim\ k(n) = +\infty$] ; e como $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge por hipótese, seria $U = lim\ U_n$ (finito), donde,

$$lim\ U_n^* = 2\ lim\ A_{k(n)} - lim\ U_n = 2\,A - U \text{ (finito) },$$

ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\,u_n|$ seria convergente, contrariando assim a hipótese de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ser simplesmente convergente.

8.3 - Associatividade generalizada

Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, seja K um subconjunto de **N** e vejamos qual o significado a atribuir ao símbolo $\sum_{n\,\in K} a_n$:

a) Se for $K = \varnothing$, faremos por definição, $\sum_{n\,\in K} a_n = 0$;

b) Se for K finito, $\sum_{n\,\in K} a_n$ significa a soma ordinária do número finito de termos a_n de ordens pertencentes a K ;

c) Se K for infinito, os seus elementos dispostos na ordem natural constituem uma subsucessão α_1 , α_2 , ... , α_n , ... , da sucessão dos números naturais e então faz-se : $\sum_{n\,\in K} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha_n}$.

Note-se que a definição dada em **c)** pode não ter significado porque, mesmo com $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha_n}$ pode ser divergente. No entanto,

Teorema 17 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutamente convergente e* α_1 , α_2 , ... , α_n , ... *uma subsucessão da sucessão dos números naturais, a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha_n}$ *é também absolutamente convergente*

Demonstração : Tem de provar-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\,a_{\alpha_n}|$ é convergente. Fazendo,

$$A_n^* = \sum_{i=1}^{n} |\,a_{\alpha_i}\,| \quad \text{e} \quad S_n^* = \sum_{i=1}^{n} |\,a_i\,| \ ,$$

tem-se evidentemente, $A_n^* \le S_{\alpha_n}^*$. Como por hipótese $\sum_{n=1}^{\infty} |\,a_n|$ converge , tem-se que é finito o $lim\ S_n^*$ e portanto é também finito $lim\ S_{\alpha_n}^*$ (= $lim\ S_n^*$). A sucessão $S_{\alpha_n}^*$ é assim majorada , o mesmo acontecendo com A_n^* ($\le S_{\alpha_n}^*$) ; como A_n^* é monótona crescente , existe portanto finito $lim\ A_n^*$, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\, a_{\alpha_n} |$ é convergente, como se queria provar.

Considere-se a série absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e seja,

$$\mathbf{N} = K_1 \cup K_2 \cup\ \ldots\ \cup K_p \cup\ \ldots\ ,\ \text{com}\ K_p \cap K_m = \varnothing\ \ (p \neq m)\ .$$

Sendo $b_p = \sum_{n \in K_p} a_n$, vamos provar que a série $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ é também absolutamente convergente e que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{p=1}^{\infty} b_p$. Note-se que para cada p, $b_p = \sum_{n \in K_p} a_n$ pode ser uma soma ordinária de um número finito de termos a_n (se K_p for finito) ou a soma de uma série (se K_p for infinito) garantindo neste caso o teorema 17 a convergência absoluta dessa série e a existência portanto da respectiva soma b_p . Em tudo o que se vai seguir nada há que impeça os K_p de serem vazios de certa ordem em diante (os respectivos b_p serão então nulos), correspondendo essa situação ao caso em que os termos da série são associados num número finito de blocos.

Começamos por estudar o caso das séries de termos não negativos, para logo de seguida alargar o resultado ao caso mais geral das séries absolutamente convergentes.

Teorema 18 : *Dada a série convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *, com* $a_n \geq 0$ *e supondo que* $\mathbf{N} = K_1 \cup K_2 \cup\ \ldots\ \cup K_p \cup\ \ldots$ *, com* $K_p \cap K_m = \varnothing$ $(\, p \neq m\,)$ *, fazendo* $b_p = \sum_{n \in K_p} a_n$ *, a série* $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ *é convergente e tem soma igual à da série original*

<u>Demonstração</u> : Sejam $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $A = lim\ A_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $B_p = \sum_{i=1}^{p} b_i$. Dado $\varepsilon > 0$, determine-se uma ordem $m = m_\varepsilon$ para a qual seja $|\, A - A_m \,| < \varepsilon /3$, o que sempre é possível por ser $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente com soma A . A partir do m encontrado, determine-se p_ε (esta ordem depende do m e portanto, em última análise de ε) de modo que para cada $p > p_\varepsilon$ todos os termos $a_1 , a_2 , \ldots , a_m$ cuja soma dá A_m se encontrem entre os termos das séries ou somas,

$$\sum_{n \in K_1} a_n \quad , \quad \sum_{n \in K_2} a_n \quad , \quad \ldots \quad , \quad \sum_{n \in K_p} a_n \quad ,$$

cuja soma dá $B_p = b_1 + b_2 +\ \ldots\ + b_p$. Para cada particular $p > p_\varepsilon$ é possível determinar subconjuntos finitos $K_i^* \subseteq K_i$ de tal modo que :

a) As somas ordinárias,

$$\sum_{n\in K_1^*} a_n \ , \ \sum_{n\in K_2^*} a_n \ , \ \dots \ , \ \sum_{n\in K_p^*} a_n \ ,$$

continuem a ter entre as suas parcelas todos os termos $a_1 , a_2 , \dots , a_m$ cuja soma dá A_m ; e ainda,

b) Se tenha,

$$| b_i - \sum_{n\in K_i^*} a_n | < \varepsilon/3p \quad (i = 1, 2 , \dots , p) \ .$$

A partir da condição **b)** obtém-se, por soma ordenada e utilizando a propriedade modular da soma,

$$| B_p - \sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n) | < \varepsilon/3 \ .$$

Então,

$$| B_p - A | \leq | B_p - \sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n) | + | \sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n) - A_m | + | A - A_m | <$$

$$< 2\varepsilon/3 + | \sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n) - A_m | \ .$$

Ora a soma ordinária $\sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n)$ tem entre as suas parcelas (em número finito) todos os termos $a_1 , a_2 , \dots , a_m$ cuja soma dá A_m e então a diferença $\sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n) - A_m$ reduz--se à soma de um número finito de termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+m}$ (série resto de ordem m da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$), ou seja, tem-se:

$$| B_p - A | < 2\varepsilon/3 + | \sum_{i=1}^{p} (\sum_{n\in K_i^*} a_n) - A_m | <$$

$$< 2\varepsilon/3 + | \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+m} | = 2\varepsilon/3 + | A - A_m | < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \ .$$

Conclui-se portanto que , fixado $\varepsilon > 0$ existe uma ordem p_ε tal que, para $p > p_\varepsilon$, $| B_p - A | < \varepsilon$. Tem-se, portanto, $\lim B_p = A$, ou seja, a série $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ é convergente e tem por soma A que é também a soma da série original, como se pretendia provar.

Podemos agora demonstrar, para as séries absolutamente convergentes, o seguinte,

Teorema 19 : *Dada a série absolutamente convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e supondo que* $\mathbf{N} = K_1 \cup K_2 \cup \ \dots\ \cup K_p \cup\ \dots$ *, com* $K_p \cap K_m = \varnothing \ (p \neq m)$ *, fazendo* $b_p = \sum_{n \in K_p} a_n$ *, a série* $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ *é absolutamente convergente e tem soma igual à da série original*

Demonstração : Vamos primeiro provar que $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ é absolutamente convergente, ou seja, que $\sum_{p=1}^{\infty} |b_p|$ é convergente. Fazendo, $B_p^* = \sum_{i=1}^{p} |b_i|$, tem-se,

$$B_p^* = \sum_{i=1}^{p} |b_i| = \sum_{i=1}^{p} \Big| \sum_{n \in K_i} a_n \Big| ,$$

e, quer $\sum_{n \in K_i} a_n$ seja uma soma ordinária quer uma série (neste caso com base no teorema 17 e na desigualdade do teorema 9), resulta, $B_p^* \leq \sum_{i=1}^{p} \big(\sum_{n \in K_i} |a_n| \big)$. Pelo teorema 18, a série $\sum_{p=1}^{\infty} \big(\sum_{n \in K_p} |a_n| \big)$ é convergente , por ser convergente a série de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, sendo então,

$$B_p^* \leq \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{n \in K_i} |a_n| \Big) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{n \in K_p} |a_n| \Big) \ \text{(finito)},$$

ou seja, B_p^* é uma sucessão crescente e majorada, logo existe finito o respectivo limite, o que prova a convergência da série $\sum_{p=1}^{\infty} |b_p|$, que era o que se pretendia.

Para demonstrar que $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ tem soma igual à da soma original, basta repetir, passo por passo, toda a argumentação usada na demonstração do teorema 18, apenas com as seguintes adaptações:

a) Logo no início , a ordem $m = m_\varepsilon$ deve ser determinada pela condição $|A - A_m| \leq \ \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \dots < \varepsilon/3$;

b) A última desigualdade que precede a conclusão passa a ser a seguinte,

$$|B_p - A| < 2\varepsilon/3 + \Big| \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{n \in K_i^*} a_n \Big) - A_m \Big| <$$

$$< 2\varepsilon/3 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+m}| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon .$$

8.4 - Multiplicação de séries absolutamente convergentes. Série produto de Cauchy

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries absolutamente convergentes e formem-se todos os possíveis produtos $a_i\, b_j$ (são em número infinito). Tais produtos $a_i\, b_j$ podem dispor-se em série de uma infinidade de modos: por exemplo, uma possibilidade é,

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + \ \dots\ ,$$

ou seja, ordenar os $a_i\, b_j$ na série segundo o valor crescente da soma $i + j$ e, em caso de soma igual, fazer aparecer primeiro os produtos cujos factores a_i tenham menores ordens.

O teorema seguinte mostra contudo que, seja qual for a ordenação dos produtos $a_i\, b_j$, a série por eles formada é absolutamente convergente e tem por soma o produto das somas de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Teorema 20 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *séries absolutamente convergentes e* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ *uma qualquer série que tenha como termos todos os produtos* $a_i\, b_j$ *(ordenados de qualquer modo) é também absolutamente convergente e quanto às somas tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Demonstração : Prova-se em primeiro lugar a convergência absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, ou seja, a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$. Façamos,

$$T_n^{\,*} = \sum_{i=1}^{n} |t_i| \quad , \quad A_n^{\,*} = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \quad \text{e} \quad B_n^{\,*} = \sum_{i=1}^{n} |b_i| \ ,$$

e representemos por $\theta(n)$ a maior das ordens dos $|a_n|$ que aparecem como factores nos $|t_i|$ que são parcelas de $T_n^{\,*}$ e por $\mu(n)$ a maior das ordens dos $|b_n|$ que igualmente aparecem como factores nos mesmos $|t_i|$. Então, em

$$A^*_{\theta(n)} \ .\ B^*_{\mu(n)} = (\,|a_1| + |a_2| + \ \dots + |a_{\theta(n)}|\,) \,.\, (\,|b_1| + |b_2| + \ \dots + |b_{\mu(n)}|\,) \ ,$$

figuram todas as parcelas de $T_n^{\,*}$, ou seja, $T_n^{\,*} \leq A^*_{\theta(n)} \ .\ B^*_{\mu(n)} \leq A^* . B^*$, em que $A^* = lim\, A_n^{\,*}$ e $B^* = lim\, B_n^{\,*}$ são as somas (finitas) das séries $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Então a sucessão crescente $T_n^{\,*}$ é majorada , logo tem limite finito, ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$ é convergente, como se queria provar.

Vejamos agora a parte do teorema que se refere ao valor da soma da série produto . Os termos da série absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ podem ser reordenados sem alteração de soma (teorema 13). Vamos então proceder a uma reordenação conveniente da série em causa, considerando os produtos $a_i\, b_j$ ordenados na série de tal modo que,

$$\begin{aligned}
&a_1\, b_1 = r_1 \\
&(a_1 + a_2)(\, b_1 + b_2) = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \\
&\ldots \\
&(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = r_1 + r_2 + \ldots + r_{n.n} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

e vamos representar por $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ a série produto depois de reordenada do modo indicado. Tem-se, $R_{n.n} = \sum_{i=1}^{n^2} r_i = A_n \,.\, B_n$; ora as sucessões A_n e B_n têm limite finito graças à convergência absoluta das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ e como existe finito o limite de $R_n = \sum_{i=1}^{n} r_i$ (a série dos $a_i\, b_j$ converge absolutamente para qualquer ordenação destes) , será também (por ser $R_{n.n}$ subsucessão de R_n),

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n = lim\, R_n = lim\, R_{n.n} = lim\;\; A_n \,.\, B_n = (\, lim\, A_n\,).(lim\, B_n\,) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n \;,$$

como se queria provar.

Em matéria de multiplicação de séries tem particular importância a chamada *série produto de Cauchy* que se obtém do seguinte modo:

1º) Ordenam-se na série produto os factores $a_i\, b_j$ segundo o valor crescente da soma $i + j$ e, em caso de soma igual, fazem-se aparecer antes os produtos cujos factores a_i tenham menores ordens ;

2º) Subsequentemente faz-se a associação num só termo de todos os factores $a_i\, b_j$ com igual soma $i + j$.

Ou seja, trata-se da série,

$$a_1\, b_1 + (a_1\, b_2 + a_2\, b_1\,) + (a_1\, b_3 + a_2\, b_2 + a_3\, b_1\,) + \;\ldots\; +$$

$$+ (a_1\, b_n + a_2\, b_{n-1} + \;\ldots\; + \; a_n\, b_1\,) + \;\ldots\; ,$$

cuja soma é evidentemente, por tudo quanto antes ficou dito, igual ao produto das somas das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Como aplicação, vamos determinar a série produto de Cauchy das séries,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \,,$$

que sabemos serem absolutamente convergentes . A série produto de Cauchy será então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^0}{0!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y^0}{0!} \right),$$

e vamos simplificar o termo geral desta série de modo a chegarmos a um resultado final já conhecido:

$$\frac{x^0}{0!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{y^0}{0!} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{(n-1)!}{0!\,(n-1)!}\, x^0\, y^{n-1} + \frac{(n-1)!}{1!\,(n-2)!}\, x^1\, y^{n-2} + \cdots + \frac{(n-1)!}{(n-1)!\,0!}\, x^{n-1}\, y^0 \right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left[C_0^{n-1}\, x^0\, y^{n-1} + C_1^{n-2}\, x^1\, y^{n-2} + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\, x^{n-1}\, y^0 \right] = \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} \quad ,$$

ou seja, a série produto de Cauchy será $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!}$. Este resultado confirma a igualdade $e^x \,.\, e^y = e^{x+y}$: com efeito,

$$e^x \,.\, e^y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \,\cdot\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+y)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{x+y} \quad .$$

9. <u>Cálculo aproximado da soma de uma série</u>

9.1 - <u>Introdução</u>

Como ficou dito anteriormente o cálculo da soma de uma série directamente a partir da definição é tarefa normalmente impraticável.

Por norma, o melhor que se consegue é o cálculo aproximado da soma da série, tomando um valor S_p (soma dos p primeiros termos da série) que difira em valor absoluto da soma S da série por menos que um número positivo ε previamente escolhido. A diferença $| S - S_p |$ constitui o *erro sistemático* cometido na aproximação, devendo notar-se que a este erro acrescem frequentemente na prática ainda *erros de cálculo* resultantes de aproximações ou arredondamentos efectuados na obtenção da soma S_p.

Não é objectivo deste texto fazer um tratamento completo desta questão, pelo que nos limitaremos nos pontos seguintes a uma abordagem elementar da questão do controlo do erro sistemático, no cálculo aproximado da soma de uma série.

9.2 - Majoração do resto de ordem *p* para séries absolutamente convergentes

Dada uma série absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a diferença $S - S_p$ é a soma do resto de ordem p da série dada, ou seja, tem-se,

$$| S - S_p | = | a_{p+1} + a_{p+2} + a_{p+3} + \dots | \leq | a_{p+1} | + | a_{p+2} | + | a_{p+3} | + \dots .$$

Caso seja possível majorar os termos $| a_{p+n} |$ ($n = 1 , 2 , 3 \dots$) por termos c_{p+n} de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{p+n}$ convergente, podemos usar tal majoração para determinar quantos termos (p) se devem tomar no cálculo de S_p de modo a ter-se uma aproximação à soma S da série com erro não superior a um número $\varepsilon > 0$ fixado previamente.

Assim, por exemplo, no caso da série absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$, tem-se,

$$| S - S_p | = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(p+3)^2} + \cdots <$$

$$< \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+2)(p+3)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n-1)(p+n)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p+n-1} - \frac{1}{p+n}\right) = \frac{1}{p} \quad \text{(série redutível)} .$$

A desigualdade $| S - S_p | < 1/p$ permite calcular quantos termos (p) devem ser tomados para se conseguir que S_p difira da soma da série, em valor absoluto, por não mais que ε; por exemplo, com $\varepsilon = 0{,}0015$, tem-se,

$$1/p \leq 0{,}0015 \Rightarrow p \geq 667 ,$$

ou seja, $S_{667} = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \dots + 1/667^2$ difere em valor absoluto do verdadeiro valor da série por não mais que $\varepsilon = 0{,}0015$ (no presente caso, dado que a série em causa tem termos todos positivos, o erro cometido é por defeito).

Voltando ao problema geral da majoração do resto nas séries absolutamente convergentes, há dois casos em que é relativamente simples conseguir essa majoração:

<u>1º Caso</u> : Quando a convergência absoluta da série é detectada pelo critério da razão, tem-se para $n > m$ (com certo m fixo) ,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq h < 1 \,,$$

e representando por k_{p+1} um majorante menor que 1 (na prática convém tomar o menor majorante possível) de todas as razões,

$$\frac{|a_{p+2}|}{|a_{p+1}|} \,,\; \frac{|a_{p+3}|}{|a_{p+2}|} \,,\; \frac{|a_{p+4}|}{|a_{p+3}|} \,,\; \cdots \,,$$

tem-se a seguinte majoração para $|S - S_p|$, válida para $p \geq m$:

$$|S - S_p| \leq |a_{p+1}| + |a_{p+2}| + |a_{p+3}| + \ldots =$$

$$= |a_{p+1}| \,.\, \left[1 + \frac{|a_{p+2}|}{|a_{p+1}|} + \frac{|a_{p+3}|}{|a_{p+2}|} \cdot \frac{|a_{p+2}|}{|a_{p+1}|} + \cdots \right] \leq$$

$$\leq |a_{p+1}| \,.\, \left(1 + k_{p+1} + k_{p+1}^2 + \cdots\right) = |a_{p+1}| \,.\, \frac{1}{1 - k_{p+1}} \,.$$

Vejamos um exemplo. No caso da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n-1)!$, tem-se, para $n > 1$,

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1/n!}{1/(n-1)!} = 1/n \leq 1/2 < 1 \,.$$

Para $p \geq 1$, poderá tomar-se $k_{p+1} = 1/(p+1)$ como majorante de todas as razões,

$$\frac{|a_{p+2}|}{|a_{p+1}|} = \frac{1}{p+1} \,,\; \frac{|a_{p+3}|}{|a_{p+2}|} = \frac{1}{p+2} \,,\; \frac{|a_{p+4}|}{|a_{p+3}|} = \frac{1}{p+3} \,,\; \cdots \,,$$

e portanto será,

$$|e - \sum_{i=1}^{p} 1/(i-1)! \,| \leq |a_{p+1}| \,.\, \frac{1}{1 - k_{p+1}} = \frac{1}{p!} \cdot \frac{1}{1 - 1/(p+1)} = \frac{p+1}{p!\,.\,p} \,.$$

A partir desta majoração podemos determinar o número de termos iniciais a somar para obter o valor da soma da série (o número e) com um erro não superior por exemplo a 0,00025 . Bastará determinar por tentativas o menor valor de p que garante ser,

$$\frac{p+1}{p!\,.\,p} \leq 0{,}00025\ ,$$

facilmente se chegando a $p = 7$. Com este número de termos obtém-se portanto,

$$e \approx 1 + 1 + 1/2 + 1/3! + 1/4! + 1/5! + 1/6! = 1957 / 720\ ,$$

com erro não superior a 0,00025 .

<u>2º Caso</u> : Quando a convergência absoluta da série é detectada pelo critério da raiz, tem-se para $n > m$ (com certo m fixo) ,

$$\sqrt[n]{|\,a_n\,|} \leq h < 1\ ,$$

e representando por k_{p+1} um majorante menor que 1 (na prática convém tomar o menor majorante possível) de todas as raizes,

$$\sqrt[p+1]{|\,a_{p+1}\,|}\ ,\ \sqrt[p+2]{|\,a_{p+2}\,|}\ ,\ \sqrt[p+3]{|\,a_{p+3}\,|}\ ,\ \dots\ ,$$

tem-se a seguinte majoração para $|\,S - S_p\,|$, válida para $p \geq m$:

$$|\,S - S_p\,| \leq |\,a_{p+1}\,| + |\,a_{p+2}\,| + |\,a_{p+3}\,| + \ \dots \leq k_{p+1}^{p+1} + k_{p+1}^{p+2} + k_{p+1}^{p+3} + \cdots =$$

$$= \frac{k_{p+1}^{p+1}}{1 - k_{p+1}}\ .$$

Vejamos um exemplo. No caso da série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^n$, tem-se, para $n > 1$,

$$\sqrt[n]{1/n^n} = 1/n \leq 1/2 < 1\ .$$

Para $p \geq 1$, poderá tomar-se $k_{p+1} = 1/(p+1)$ como majorante de todas as raizes,

$$\sqrt[p+1]{|\,a_{p+1}\,|} = \frac{1}{p+1}\ ,\ \sqrt[p+2]{|\,a_{p+2}\,|} = \frac{1}{p+2}\ ,\ \sqrt[p+3]{|\,a_{p+3}\,|} = \frac{1}{p+3}\ ,\ \dots\ ,$$

e portanto será, representando por S a soma (desconhecida) da série,

$$|\,S - \sum_{i=1}^{p} 1/i^i\,| \leq \frac{k_{p+1}^{p+1}}{1 - k_{p+1}} = \frac{1/(p+1)^{p+1}}{1 - 1/(p+1)} = \frac{1}{p\,.\,(p+1)^p}\ .$$

A partir desta majoração podemos determinar o número de termos iniciais a somar para obter o valor da soma da série com um erro não superior por exemplo a 0,0005 . Bastará determinar por tentativas o menor valor de p que garante ser,

$$\frac{1}{p\,.\,(p+1)^p} \leq 0{,}0005\ ,$$

facilmente se chegando a $p = 4$. Com este número de termos obtém-se portanto,

$$S \approx 1 + 1/2^2 + 1/3^3 + 1/4^4 = 8923\,/\,6912\ ,$$

com erro não superior a 0,0005 .

9.3 - Majoração do resto de ordem *p* para as séries alternadas decrescentes

Considere-se a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \, a_n$, com $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ e $\lim a_n = 0$. Na demonstração do teorema 10, que dá a condição necessária e suficiente de convergência deste tipo de séries, viu-se já que,

$$|\ (-1)^p .\ a_{p+1} + (-1)^{p+1} .\ a_{p+2} + \ \ldots + (-1)^n .\ a_n\ | \leq\ a_{p+1}\ ,$$

donde se tira, passando ao limite em n (com p fixo),

$$|\ (-1)^p .\ a_{p+1} + (-1)^{p+1} .\ a_{p+2} + \ \ldots\ | \leq\ a_{p+1}\ ;$$

a expressão que figura no primeiro membro da desigualdade precedente é precisamente o módulo do resto de ordem p da série, ou seja,

$$|\ S - S_p\ | = |\ (-1)^p .\ a_{p+1} + (-1)^{p+1} .\ a_{p+2} + \ \ldots\ | \leq\ a_{p+1}\ .$$

Esta majoração permite determinar o número de termos iniciais a somar para obter a soma da série com um erro não superior a um $\varepsilon > 0$ fixado previamente.

Por exemplo, para a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} .\, 1/n^2$, tem-se,

$$|\ S - S_p\ | \leq \frac{1}{(p+1)^2}\ ,$$

e basta tomar $p = 31$ termos para se ter $S \approx S_{31}$ com um erro não superior a 0,001 .

É possível porém, no caso das séries alternadas decrescentes, obter a mesma precisão envolvendo nos cálculos um menor número de termos que os normalmente exigidos pela majoração $| S - S_p | \leq a_{p+1}$. Com efeito, representando por R_p a soma da série resto da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . a_n$, (com $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ e $lim\ a_n = 0$), ou seja,

$$R_p = (-1)^p . a_{p+1} + (-1)^{p+1} . a_{p+2} + (-1)^{p+2} . a_{p+3} + \ldots ,$$

tem-se sucessivamente,

$$R_p = (-1)^p . a_{p+1} + R_{p+1}$$

$$(R_p - R_{p+1}) . (-1)^p = a_{p+1}$$

$$(-1)^p . R_p + (-1)^{p+1} . R_{p+1} = a_{p+1} .$$

E dado que,

$$(-1)^p . R_p = a_{p+1} - a_{p+2} + a_{p+3} - \ldots \geq 0$$

$$(-1)^{p+1} . R_{p+1} = a_{p+2} - a_{p+3} + a_{p+4} - \ldots \geq 0 ,$$

tem-se, $| R_p | = (-1)^p . R_p$ e $| R_{p+1} | = (-1)^{p+1} . R_{p+1}$, ou seja,

$$| R_p | + | R_{p+1} | = (-1)^p . R_p + (-1)^{p+1} . R_{p+1} = a_{p+1} .$$

A partir daqui obtém-se,

$$| 2S - (S_p + S_{p+1}) | \leq | S - S_p | + | S - S_{p+1} | = | R_p | + | R_{p+1} | = a_{p+1} ,$$

ou seja,

$$| S - \frac{S_p + S_{p+1}}{2} | \leq \frac{1}{2} \cdot a_{p+1} .$$

Podemos pois concluir que,

$$S \approx \frac{S_p + S_{p+1}}{2} ,$$

com um erro não superior a $\frac{1}{2} \cdot a_{p+1}$, permitindo este resultado, para uma dada precisão desejada, calcular o valor aproximado da soma da série envolvendo nos cálculos um menor número de termos que o exigido pela majoração $| S - S_p | \leq a_{p+1}$.

Retomando o exemplo da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . 1/n^2$, para se ter,

$$\frac{1}{2} \cdot a_{p+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} \leq 0{,}001,$$

basta tomar $p = 23$; então tem-se,

$$S \approx \frac{S_{23} + S_{24}}{2} ,$$

com erro não superior a 0,001 .

10. Exercícios

1 - Determine as somas das seguintes séries :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{2^{3n-2}} + \frac{3b}{2^{3n}} \right)$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\,(2n+3)}$; **e)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+8n+7}$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n}{(n^2-2n+3)\,(n^2+2n+3)}$; **h)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-5n+2}{n!}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n\,(n+1)\,(n+2)}$; *j)* $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-(5n+2)}$; **k)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+3)\,(n+6)}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+k)}$ $(k \in \mathbf{N})$; **m)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\cdots(n+k)}$ $(k \in \mathbf{N})$.

2 - Seja a um real positivo e admita-se que tem a seguinte representação decimal $a = a_0 , a_1 a_2 \dots a_n \dots$. Sabe-se que a_0 é o maior inteiro que é menor ou igual ao real a ; a_1 $(0 \leq a_1 \leq 9)$ é o maior inteiro que verifica a condição $a_0 + a_1/10 \leq a$; a_2 $(0 \leq a_2 \leq 9)$ é o maior inteiro que verifica a condição $a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 \leq a$; e assim sucessivamente. É também sabido que o real a é o supremo do conjunto S_a de todos os racionais,

$$r_n = a_0 + a_1/10 + a_2/10^2 + \dots + a_n/10^n \quad (n = 0 , 1 , 2 , \dots)$$

a) Justifique que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ é convergente e tem por soma a ;

b) Utilize o resultado da alínea anterior para achar a representação fraccionária dos seguintes racionais : $x = 0 , 11111 \dots$; $y = 0 , 010101 \dots$; $z = 0 , 2212121 \dots$.

3 - Sendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ (finito) , mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = 2\,a - a_1$.

4 - Admita que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$ e que $u_n = (k/n) \,.\, u_{n-1}$, para $n = 1 , 2 , 3 , \dots$. Calcule u_0 e em seguida a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} n.u_n$.

5 - Estude a convergência e calcule a soma das séries :

a) $\sum_{n=0}^{\infty} log \frac{n+1}{n+2}$; **b*)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(u_n+1)\,(u_n+2)}$, com $u_1 = 1$ e $u_n = u_{n-1} + (n+1)$.

6 - Sabendo que $log\, 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \,.\, 1/n$, mostre que,

a) $2\, log\, 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(2n-1)}$; **b)** $1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n+1}{n\,(n+1)}$.

7 - Utilize a condição necessária e suficiente de uma série (Condição de Cauchy) para estabelecer a convergência ou divergência das séries:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n}$.

8 - Determine, por comparação com séries de natureza conhecida, a convergência ou divergência das seguintes séries:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n! + n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} sen\,(1/n^2)$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[sen\,(\alpha + \alpha/n)\right]^n$, com $0 < \alpha < \pi/2$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos\, n}{n^2}$.

9 - Demonstre as seguintes proposições :

a) Convergindo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(a_n , b_n \geq 0)$, também converge a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$;

b) Convergindo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$, $lim\ n\, a_n$ não pode ser positivo ;

c) Convergindo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0)$, diverge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/a_n$;

d) Convergindo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$, também converge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

10 - Determine a natureza das seguintes séries :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 + n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,)$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,.\,2^n}{e^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^2 + 2^n}$; **f)** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$; **g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{1 + 3^n}$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{1000}}{1{,}0001^n}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{e^n}$; **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt[3]{n+1}\,.\,\sqrt[4]{n+2}}$; **l)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,\ldots\,.\,(2n+1)}{3\,.\,6\,.\,9\,.\,\ldots\,.(3n+3)}$;

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{[(2n)!]^2}{n!\,.\,(3n)!}$; **n)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,)^3$; **o)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,.\,sen\,(1/n)}{\sqrt{n^3 + 1}}$; **p)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\beta}{n!}$;

q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha\,(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}{n^n}$; **r)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n + 1/n^2)^{2n}$;

s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^{n^2}\,.\,e^{nx}$, com $0 < c < 1$; **t)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, com u_1=1 e $u_n = \dfrac{n+7}{n+2} \cdot u_{n-1}$;

u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{2} \cdot sen\,\dfrac{1}{n+1}\right)^{4n}$; **v)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$; **x)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^c}{(3n)!}$;

y) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^3}{(an)!}$, com $a \in \mathbf{N}$; **z)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3 . \left[\sqrt{2} + (-1)^n\right]^n}{3^n}$.

11 - Determine a natureza das seguintes séries :

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^x \cdot \left(1 - \dfrac{n}{n+1}\right)^{y+x}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + \dfrac{2}{2n+1}\right)^{n^{3/2}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} log\,(1 + 1/n)$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(n \,.\, log\, \dfrac{3n+2}{3n-2} - 1\right)$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[log\,(1 + 1/n)\right]^n$; **g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r^n . |sen\,(n\alpha)|$, com $r > 0$; **j)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+1/n}}{(n + 1/n)^n}$.

12 - Estude quanto à natureza a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n . (1 + b^n)^{-1}$ nos seguintes casos:

a) $0 < a < b$; **b)** $0 < b \leq a < 1$; **c)** $1 \leq b \leq a$.

13 - Estude a convergência das seguintes séries :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, \ldots \,.\, (2n)}\right]^k$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(1 + 1.4)(1 + 2.5) \cdots \left[1 + n(n+3)\right]}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)! \,.\, n!}{(1 + 1^2)(1 + 2^2) \cdots (1 + n^2)}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left[(n-1)!\right]^2}{\alpha \left[\alpha + 1 \,.\, (\alpha + 1)\right]\left[\alpha + 2 \,.\, (\alpha + 2)\right] \cdots \left[\alpha + (n-1)(\alpha + n - 1)\right]}$.

14 - Sejam $a_n , b_n > 0$ para $n \geq m$ e defina-se, também para $n \geq m$,

$$c_n = b_n - \frac{b_{n+1}\, a_{n+1}}{a_n}$$

Relativamente à série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ prove que :

a) Se existe $r > 0$ tal que $c_n \geq r$ para $n \geq m$, então a série é convergente;

b) Se $c_n \leq 0$ para $n \geq m$ e $\sum\limits_{n=m}^{\infty} 1/b_n$ diverge, então a série é divergente ;

c) Se existe $r > 0$ tal que para $n \geq m$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}$$

então a série converge ;

d) Se existe $r > 0$ tal que para $n \geq m$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \ ,$$

então a série diverge .

Sugestão : 1) Para resolver a) mostre que $\sum_{\alpha=m}^{n} a_\alpha \leq a_m\, b_m / r$ e tire daí a conclusão

2) Para resolver c) e d) faça $b_{n+1} = n$ em a) e b) respectivamente

15 - Estude a convergência absoluta ou simples das seguintes séries :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; **d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . \left[1 - cos\,(1/n)\right]$; **f)** $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n) . \left[\,cos\,(n\pi) + sen\,(n\pi/2)\right]$;

g) 1 + 1/2 − 1/3 − 1/4 + 1/5 + 1/6 − 1/7 − 1/8 + … .

16* - Considere a série convergente $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} . 1/n$ e seja T a respectiva soma.

a) Construa a série que dela se obtém associando consecutivamente dois a dois os seus termos e verifique assim que,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) ;$$

b) Construa por outro lado a série que resulta da inicial associando consecutivamente quatro a quatro os seus termos e verifique assim que,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right) ;$$

c) Mostre em seguida que,

$$1 + 1/3 - 1/2 + 1/5 + 1/7 - 1/4 + 1/9 + 1/11 - 1/6 + \ldots = 3T/2 ;$$

d) Dado que os termos da série da alínea c) são os da série original dispostos por ordem diferente, a respectiva soma não deveria ser T em vez de $3T/2$? Justifique.

17* - Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, com $a_n \geq 0$, admita que para uma partição,

$$\mathbf{N} = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_p \cup \ldots \ , \text{ com } K_p \cap K_m = \varnothing \text{ para } p \neq m \ ,$$

Existem finitos os valores $b_p = \sum_{n \in K_p} a_n$. Prove que então se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, também, diverge $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ e conclua daí que se esta última converge também converge a primeira. Aproveite este resultado para mostrar que a série cujos termos são todos os números $1/m^n$, com m , $n = 2 , 3 , 4 , \ldots$, dispostos por qualquer ordem é convergente e tem por soma a unidade.

18 - Admitindo as igualdades ,

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

e utilizando a série produto de Cauchy prove que :

a) $sen\, x \,.\, cos\, x = \dfrac{sen\,(2x)}{2}$; **b)** $sen^2 x + cos^2 x = 1$; **c)** $sen^2 x - cos^2 x = cos\,(2\,x)$.

19 - Sendo ,

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \quad , \quad K(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \text{e} \quad M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \quad ,$$

prove que :

a) $M(x) + K(x) = E(x)$; **b)** $M^2(x) - K^2(x) = 1$;

c) $M(x+y) = M(x) \,.\, M(y) + K(x) \,.\, K(y)$.

20 - Determine quantos termos iniciais devem ser considerados para calcular com erro não superior a 0,01 a soma das séries :

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$; **b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{n/2}}$; **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\left[4 + (-1)^n\right]^{2n}}$; **d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n^2}$.

RESPOSTAS

1 - a) $\dfrac{4a + 3b}{7}$; **b)** 3 ; **c)** 3/4 ; **d)** 1/2 ; **e)** 49/120 ; **f)** 1/4 ; **g)** 5/6 ; **h)** - e ; **i)** 5/2 ;

j) 27/242 ; **k)** 73/1080 ; **l)** $(1/k).\sum\limits_{i=1}^{k} 1/i$; **m)** $\dfrac{1}{k!\,.\,k}$.

2 - a) $x = 1/9$, $y = 1/99$ e $z = 73/330$.

4 - $u_0 = e^{-k}$ e a soma da série é k .

5 - a) Divergente ; **b)** 7/9 .

7 - a) Convergente ; **b)** Divergente ; **c)** Convergente .

8 - a) Convergente ; **b)** Convergente ; **c)** Convergente ; **d)** Divergente ; **a)** Convergente .

10 - **a)** Convergente ; **b)** Convergente ; **c)** Divergente ; **d)** Convergente ; **e)** Divergente ; **f)** Divergente ; **g)** Convergente ; **h)** Convergente ; **i)** Convergente ; **j)** Divergente ; **k)** Convergente ; **l)** Convergente ; **m)** Convergente ; **n)** Convergente ; **o)** Convergente ; **p)** Convergente ; **q)** Convergente ; **r)** Divergente ; **s)** Convergente ; **t)** Divergente ; **u)** Convergente ; **v)** Divergente ; **x)** Convergente se $c \leq 3$, divergente se $c > 3$; **y)** Convergente se $a \geq 3$, divergente se $a < 3$; **z)** Convergente ;

11 - **a)** Convergente se $x + y > 1$, divergente se $x + y \leq 1$; **b)** Divergente ; **c)** Divergente ; **d)** Convergente ; **e)** Divergente ; **f)** Convergente ; **g)** Convergente ; **h)** Divergente ; **i)** Convergente se $0 < r < 1$ ou $\alpha = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$, divergente se $r \geq 1$ e $\alpha \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$; **j)** Divergente .

12 - **a)** Convergente ; **b)** Convergente ; **c)** Divergente .

13 - **a)** Convergente se $k > 2$, divergente se $k \leq 2$; **b)** Convergente ; **c)** Divergente ; **d)** Convergente se $\alpha > 1$, divergente se $\alpha \leq 1$.

15 - **a)** Simplesmente convergente ; **b)** Simplesmente convergente ; **c)** Divergente . **d)** Absolutamene convergente ; **e)** Absolutamente convergente ; **f)** Simplesmente convergente ; **g)** Simplesmente convergente .

20 - **a)** 7 ; **b)** 5 ; **c)** 2 ; **d)** 9 usando a aproximação $S \approx S_9$, 8 usando a aproximação $S \approx \dfrac{S_7 + S_8}{2}$.

CAPÍTULO V

SÉRIES DE POTÊNCIAS DE TERMOS REAIS

1. Estudo da Convergência

Chama-se *série de potências* a uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(x-a)^{p_n}$, em que x e a são reais, a_n é o termo geral de uma sucessão real e p_n é o termo geral de uma sucessão estritamente crescente de números inteiros não negativos . Quando seja $p_1 = 0$, convenciona-se por conveniência de notação que o primeiro termo da série é a_1 , mesmo para $x = a$.

Uma série de potências é absolutamente convergente para $x = a$, pois todos os seus termos ficam nulos, pelo menos a partir do segundo. Vamos ver que quando convirja para certo $x_1 = a + r$ $(r \neq 0)$, a série é absolutamente convergente para todos os valores de $x \in \,]\, a - |\,r\,|\ ,\ a + |\,r\,|\,[$. Com efeito, para $x_1 = a + r$ o termo geral da série reduz-se a $a_n \,.\, r^{p_n}$ e, em caso de convergência da série, tem-se $lim\ a_n \,.\, r^{p_n} = 0$, donde resulta que $|\,a_n \,.\, r^{p_n}\,| < 1$ de certa ordem em diante, digamos para $n > n_1$. Tomando um qualquer $x \in \,]\, a - |\,r\,|\ ,\ a + |\,r\,|\,[$, tem-se $|\,x - a\,| < |\,r\,|$ e, portanto, $0 < k = |\,x - a\,| \,/\, |\,r\,| < 1$; para $n > n_1$ tem-se então,

$$|\,a_n \,.(x-a)^{p_n}\,| = |\,a_n \,.\, r^{p_n}\,| \,.\, \frac{|x-a|^{p_n}}{|r|^{p_n}} < k^{p_n} \leq k^{n\text{-}1} \,,$$

e da convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1}$ (série geométrica com $0 < k < 1$) resulta a convergência de $\sum_{n=1}^{\infty} |\,a_n\,(x-a)^{p_n}\,|$ (série de termos menores), sendo portanto absolutamente convergente a série de potências.

Do que antecede resulta que se a série de potências converge para todos os $x \in \mathbf{R}$, a convergência é necessariamente absoluta, não pode ser simples.

O resultado antecedente permite ainda provar que se a série de potências converge para $x_1 = a + r$ $(r \neq 0)$ e diverge para $x_2 = a + s$ com $|\,s\,| > |\,r\,|$, então existe um real $\lambda > 0$ tal que a série é absolutamente convergente para $x \in \,]\, a - \lambda\ ,\ a + \lambda\,[$ e divergente para $x < a - \lambda$ e para $x > a + \lambda$. Senão vejamos :

a) O conjunto A dos reais positivos α tais que a série de potências é absolutamente convergente para todos os $x \in \,]\, a - \alpha\ ,\ a + \alpha\,[$ é um conjunto não vazio, pois pelo menos $|\,r\,| \in A$. E trata-se de um conjunto majorado por $|\,s\,|$ pois se certo $\alpha \in A$ excedesse $|\,s\,|$, a série dada seria convergente para $x_2 = a + s \in \,]\, a - \alpha\ ,\ a + \alpha\,[$, contrariamente à hipótese admitida.

b) Existe portanto o real $\lambda = Sup\ A > 0$ e vamos mostrar que a série é absolutamente convergente para $x \in \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[$:

i) Dado um qualquer $x \in [\, a \,,\, a + \lambda \,[$ tem-se $0 \leq x - a < \lambda$ e por definição de supremo existe um $\alpha \in A$ tal que $0 \leq x - a < \alpha < \lambda$; a série é então absolutamente convergente para $x \in [\, a \,,\, a + \alpha \,[\subset \,]\, a - \alpha \,,\, a + \alpha \,[$;

ii) Sendo $x \in \,]\, a - \lambda \,,\, a \,[$, tem-se $x' = a + (a - x) \in \,]\, a \,,\, a + \lambda \,[$ e tendo em conta o resultado de i) conclui-se que a série de potências é absolutamente convergente para $x' = a + (a - x)$; e como $|\, a_n .(x' - a)^{p_n} \,| = |\, a_n .(x - a)^{p_n} \,|$ resulta que a série também converge absolutamente para $x \in \,]\, a - \lambda \,,\, a \,[$.

c) A série diverge para $x < a - \lambda$ e para $x > a + \lambda$. De facto, se a série fosse convergente para $x = a + \beta$ com $|\, \beta \,| > \lambda$, a série seria absolutamente convergente para todos os $x \in \,]\, a - |\, \beta \,| \,,\, a + |\, \beta \,| \,[$ e então ter-se-ia $|\, \beta \,| \in A$ e tal seria contrário ao facto de ser λ o supremo de A .

Sumariando as conclusões precedentes, pode concluir-se que para uma série de potências podem ocorrer as seguintes possibilidades :

1) Convergência absoluta apenas para $x = a$;
2) Convergência absoluta para todos os $x \in \,]\, -\infty \,,\, +\infty \,[$;
3) Convergência absoluta para todos os $x \in \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[$, com certo $\lambda > 0$ e divergência para $x < a - \lambda$ e para $x > a + \lambda$.

No caso 3) a série de potências pode ainda ser absolutamente convergente nas extremidades $a \pm \lambda$ do intervalo, sendo que se o for numa delas também o é na outra porque às séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \lambda^{p_n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (-\lambda)^{p_n}$ corresponde a mesma série dos módulos.
Ainda no caso 3) , não havendo convergência absoluta nas extremidades do intervalo, pode haver convergência simples numa delas ou em ambas.

Representando por I e I_0 respectivamente os intervalos dos valores de x que tornam a série de potências convergente e absolutamente convergente , têm-se as seguintes possibilidades :

Caso 1 : $I = I_0 = [\, a \,,\, a \,]$;
Caso 2 : $I = I_0 = \,]\, -\infty \,,\, +\infty \,[$;
Caso 3 : Há cinco possibilidades : $I = I_0 = \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[$; $I = I_0 = [\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,]$;
$I_0 = \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[\subset I = [\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[$;
$I_0 = \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[\subset I = \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,]$;
$I_0 = \,]\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,[\subset I = [\, a - \lambda \,,\, a + \lambda \,]$;

Na prática o estudo da convergência das séries de potências faz-se sem grande dificuldade aplicando à série dos módulos o critério de Cauchy ou de D'Alembert , complementados eventualmente com outros critérios para estudar a série nas extremidades do intervalo de convergência , como se ilustra nos exemplos seguintes :

1) Para a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n . (x-1)^{n-1}$, tem-se,

$$lim \sqrt[n]{n^n . |x-1|^{n-1}} = |\, x \text{-}1 | \, . \, lim \; n = \begin{cases} 0 & , \; x = 1 \\ +\infty , & x \neq 1 \end{cases} ,$$

e portanto a série apenas converge para $x = 1$: $I = I_0 = [a \, , a]$

2) Dada a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{n}$, tem-se,

$$lim \frac{|x|^{2n+2} \; / \; (n+1)}{|x|^{2n} \; / \; n} = |\, x \,|^2 . \, lim \; \frac{n}{n+1} = |\, x \,|^2,$$

podendo portanto concluir-se que : **a)** Para $x \in I_0 = \,]\text{-}1 \, , 1[$, a série é absolutamente convergente ; **b)** Para $x \in \,]\text{-}\infty , \text{-}1 \, [\; \cup \;] \, 1 \, , +\infty \, [$, a série diverge ; **c)** Para $x = \text{-}1$ e $x = 1$, obtém-se em ambos os casos a série simplesmente convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n . 1/n$, sendo portanto $I = [\text{-}1 \, , 1]$ o intervalo de convergência da série.

2. Exercícios

1 - Estude a convergência das seguintes séries de potências de termos reais:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n . (n+1)!}{2 . 4 . 6 . \cdots . (2n)} \cdot x^{n+1}$; **b)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$; **c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{3^n + 1}$; **e)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+a)^n}{a^{n+1}}$ $(a \neq 0)$; **f)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(5x+1)^{2n}}{n^2 + 1}$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} [log \, (1 + 1/n)] . x^n$; **h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(2n)!} \cdot x^n$; **i)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x-1)^n}{n}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1 + 1/n} - 1) . (log \, x)^n$; **k)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot (x-1)^{2n}$;

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n + 4}{n(n+1)(n+2)} \cdot (x-2)^n$; **m)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n} \right) . x^n$ $(a \, , b > 0)$.

2 - Prove que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) . x^n$, com $a_n \geq a_{n+1}$ e $lim \; a_n = a$ finito, é absolutamente convergente pelo menos no intervalo $[\text{-}1 \, , 1]$.

3 - Determine a de forma que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^{n+1}}{n+1} \cdot x^n$ seja convergente em $x = -3$ e divergente em $x = 3$.

4 - Sendo a um parâmetro real , determine o intervalo de convergência da série real de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1 + a^{2n}}$.

5* - Estude a convergência das seguintes séries de potências de termos reais:

a) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}$ (com $\alpha \neq 0 , 1 , 2 , \ldots$) ;

b) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)}{(n-1)!} \cdot \dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-2)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-2)} \cdot x^{n-1}$,

(com $\alpha , \beta , \gamma \neq 0 , -1 , -2 , \ldots$) .

RESPOSTAS

1 - **a)** Absolutamente convergente em $]-2 , 2[$; **b)** Absolutamente convergente em $\mathbf{R}$;
c) Absolutamente convergente em $]-1 , 1[$, simplesmente convergente em $x = -1 , 1$;
d) Absolutamente convergente em $]-2 , 4[$;
e) Absolutamente convergente em $]-a - |a| , -a + |a|[$;
f) Absolutamente convergente em $[-2/5 , 0]$;
g) Absolutamente convergente em $]-1 , 1[$, simplesmente convergente em $x = -1$;
h) Absolutamente convergente em $\mathbf{R}$;
i) Absolutamente convergente em $]0 , 1[$, simplesmente convergente em $x = 0$;
j) Absolutamente convergente em $]1/e , e[$, simplesmente convergente em $x = 1/e$;
k) Absolutamente convergente em $]-1 , 3[$; l) Absolutamente convergente em $[1 , 3]$;
m) Com $a \geq b$, absolutamente convergente em $]-1/a , 1/a[$ e simplesmente convergente em $x = -1/a$; com $a < b$, absolutamente convergente em $]-1/b , 1/b[$ e simplesmente convergente em $x = -1/b$.

3 - 1/3 .

4 - Se $|a| \leq 1$, a série é absolutamente convergente em $]-1 , 1[$; se $|a| > 1$, a série é absolutamente convergente em $]-a^2 , a^2[$.

5 - **a)** Se $\alpha > 0$, a série é absolutamente convergente em $[-1 , 1]$; se $-1 < \alpha < 0$, a série é absolutamente convergente em $]-1 , 1[$ e simplesmente convergente em $x = 1$; se $\alpha \leq -1$, a série é absolutamente convergente em $]-1 , 1[$;
b) Se $\gamma > \alpha + \beta$, a série é absolutamente convergente em $[-1 , 1]$; se $\alpha + \beta - 1 < \gamma \leq \alpha + \beta$, a série é absolutamente convergente em $]-1 , 1[$ e simplesmente convergente em $x = -1$; $\gamma \leq \alpha + \beta - 1$, a série é absolutamente convergente em $]-1 , 1[$.

CAPÍTULO VI

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL. LIMITES E CONTINUIDADE

1. Introdução

Dado um qualquer conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$, se por um certo processo se faz corresponder a cada $x \in A$ um e um só $y = f(x) \in \mathbf{R}$, diz-se que se definiu uma *função f* de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ (simbolicamente, $f : A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$) ou , como também se diz , uma *função real de variável real* com domínio no conjunto A . Ao conjunto $f\,(A)$ dos valores y que correspondem a pelo menos um $x \in A$ chama-se *contradomínio* da função:

$$f\,(A) = \{\, y \;:\; \exists\, x \in A \text{ tal que } y = f\,(x) \} .$$

A letra x (ou qualquer outra) que representa o elemento genérico do domínio A da função , chama-se *variável independente* ; por seu lado, a letra y (ou qualquer outra) que representa o elemento de $f\,(A)$ que a função faz corresponder a um valor genérico do domínio, é designada por *variável dependente* (no sentido de que o valor por ela assumido depende do valor dado à variável independente x).

Quando se escreve, $y = f\,(x)$ com domínio em A , quer-se significar abreviadamente que estamos em presença de uma função $f : A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ que a cada $x \in A$ associa $y = f\,(x)$. É mesmo frequente usar a expressão ainda mais abreviada "*função f* (x) *, com domínio em A* " ou mesmo apenas " *função f* (x) " sempre que a referência ao domínio seja dispen-sável por poder o mesmo ser subentendido.

Como é sabido, o cálculo dos valores $f\,(x)$ que a função faz corresponder a cada $x \in A$ faz-se normalmente (mas nem sempre) utilizando uma expressão analítica (ou, menos frequentemente, utilizando diversas expressões analíticas válidas cada uma delas numa parte do domínio). Quando os valores $f\,(x)$ são calculados mediante utilização de uma expressão analítica e não se explicita o domínio da função, subentende-se que o mesmo coincide com o conjunto de valores de x para os quais as operações envolvidas na expressão analítica têm significado no campo real . Assim, por exemplo, quando nos referimos à função $y = \sqrt{x}$ ou $f\,(x) = \sqrt{x}$, estamos de modo abreviado a pensar na função $f\!: A = [\,0\,, +\infty\,[\; \rightarrow \mathbf{R}$ que a cada $x \geq 0$ faz corresponder o número $y = \sqrt{x}$.

Em vez da representação analítica de uma função usa-se muitas vezes, por ser sugestiva, a sua representação gráfica; esta obtém-se no plano, fixando um referencial cartesiano e representando os pontos de coordenadas $[\,x\,,\, f\,(x)]$ para todos os $x \in A$.

Dada a função $f\,(x)$, com domínio em A , considere-se um subconjunto $B \subseteq A$. O conjunto $f\,(B) = \{\, y \;:\; \exists\, x \in B : y = f\,(x) \}$ é a *imagem* ou *transformado do conjunto B*, dado pela função ; assim, o contradomínio $f\,(A)$ não é mais que o transformado ou imagem do domínio da função. Caso o conjunto $f\,(B)$ seja majorado, diz-se que a função

$f(x)$ é *majorada* no conjunto B ; e a $\lambda = Sup\, f(B) = \underset{x\in B}{Sup}\, f(x)$ chama-se *supremo da função* no conjunto B. Caso o conjunto $f(B)$ seja minorado, diz-se que a função $f(x)$ é *minorada* no conjunto B; a $\mu = Inf\, f(B) = \underset{x\in B}{Inf}\; f(x)$ chama-se *ínfimo da função* no conjunto B.

Quando $f(x)$ seja majorada e minorada em B , diz-se limitada nesse conjunto existindo então finitos , $\lambda = \underset{x\in B}{Sup}\, f(x)$ e $\mu = \underset{x\in B}{Inf}\, f(x)$.

A função $f(x)$, com domínio em A , diz-se *injectiva* se e só se,

$$\forall\ x', x'' \in A \quad ,\ x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x''),$$

ou seja, se e só se a valores distintos do domínio correspondem valores do contradomínio também distintos. Neste caso $f(x)$ admite *função inversa* que é a função $f^{-1}(\,y\,)$ que a cada $y \in f(A)$ faz corresponder o $x \in A$ único tal que $y = f(x)$.

Pode porém acontecer que, embora $f(x)$ não seja injectiva no seu domínio A , o seja em certo $B \subset A$. Nesse caso, a função, embora não invertível quando considerada definida em todo o seu domínio, pode inverter-se se apenas se considerar definida nessa parte B do domínio onde é injectiva. Assim, por exemplo :

a) A função $y = x^2$, com domínio em **R** , não admite inversa; no entanto, a função pode inverter-se em qualquer dos intervalos $[0\ ,\ +\infty\ [$ ou $]\ -\infty\ ,\ 0]$, obtendo-se como inversas nesses intervalos, respectivamente, $x = +\sqrt{y}$ e $x = -\sqrt{y}$.

b) A função $y = sen\, x$, com domínio em **R** , não tem inversa (por não ser injectiva no seu domínio); no entanto, a função pode inverter-se por exemplo em $B = [\ -\pi/2\ ,\ \pi/2]$, obtendo-se como inversa $x = arc\ sen\, y$ (com $-\pi/2 \leq\ arc\ sen\, y\ \leq \pi/2$).

Seja $y = g\,(x)$ uma função real de variável real com domínio A e $z = f\,(y)$ uma outra função real de variável real com domínio B . Vamos ver em que condições e como se define a função composta de f com g , função composta que como se sabe se representa usualmente por $f\,o\,g$:

<u>1º Caso</u> : Se $B = g\,(A)$, a todo o $x \in A$ corresponde $y = g\,(x) \in g\,(A) = B$ e, por sua vez, a cada $y = g\,(x) \in g\,(A) = B$ a função f faz corresponder $z = [\,f\,o\,g](x) = f\,[\ g\,(x)]$. A função composta tem assim como domínio o conjunto A, que é igualmente o domínio da função $g\,(x)$.

<u>2º Caso</u> : Caso seja $B \neq g\,(A)$ e $B \cap g\,(A) \neq \emptyset$, considere-se o conjunto $A_0 \subseteq A$ de todos os $x \in A$ que fazem $y = g\,(x) \in B$. Restringindo a definição de $g\,(x)$ a A_0 e a de $f\,(y)$ a $g\,(A_0\,)$, com as funções assim restringidas estamos no primeiro caso e podemos então definir a função composta $z = [\,f\,o\,g]\ (x) = f\,[\ g\,(x)]$, para todo o $x \in A_0$. Neste caso a função composta tem domínio não em todo o A mas apenas em $A_0 \subseteq A$.

<u>3º Caso</u> : Caso seja $B \neq g\,(A)$ e $B \cap g\,(A) = \emptyset$, a composição é impossível.

Vejamos exemplos de composição de funções para cada um dos dois casos possíveis referidos anteriormente:

1) Sendo $y = g\,(x) = x^2$ com domínio em $A = \left]\,-\infty\,,+\infty\right[$ e $z = f\,(y) = \sqrt{y}$ com domínio em $B = g\,(A) = \left[\,0\,,+\infty\,\right[$, a função composta $z = [\,f\,o\,g\,]\,(x) = f\,[\,g(x)]\; = \sqrt{x^2}\; = \;|\,x\,|$ tem domínio em $A = \left]\,-\infty\,,+\infty\,\right[$.

2) Sendo $y = g\,(x) = x^3$ com domínio em $A = \left]\,-\infty\,,+\infty\,\right[$ e $z = f\,(y) = \sqrt{y}$ com domínio em $B = g\,(A) = \left[\,0\,,+\infty\,\right[$, a função composta $z = [\,f\,o\,g\,]\,(x) = f\,[\,g(x)]\; = \sqrt{x^3}$ tem domínio em $A_0 = \left[\,0\,,+\infty\,\right[$ (pois só para $x \geq 0$, o valor $y = x^3$ pertence ao domínio da função f).

Como a composição de f com g , quando estas funções se encontrem no segundo caso, se pode reduzir sempre ao 1º caso, por restrição adequada das funções envolvidas a domínios convenientes, os resultados teóricos que envolvem funções compostas são por vezes enunciados no pressuposto de o domínio da função f coincidir com o contradomínio da função intermédia g , ou seja, $B = g\,(A)$, sendo depois adaptados ao caso em que seja $B \neq g\,(A)$ e $B \cap g\,(A) \neq \varnothing$. Em particular, se a verificação de determinadas hipóteses por parte de f e g implicar uma certa tese relativamente a $f\,o\,g$, no pressuposto de ser $B = g\,(A)$, o mesmo resultado é válido para a função composta no caso de ser $B \neq g\,(A)$ e $B \cap g\,(A) \neq \varnothing$ desde que as mesmas hipóteses sejam verificadas pelas restrições de g e f , respectivamente , aos conjuntos A_0 e $g\,(A_0)$ em que A_0 designa o conjunto de todos os $x \in A$ que fazem $y = g\,(x) \in B$.

Para terminar esta rápida revisão dos conceitos básicos sobre funções reais de variável real, falta rever a definição de função crescente e decrescente. Sendo $f\,(x)$ uma função real de variável real com domínio A e sendo $B \subseteq A$:

a) A função diz-se *crescente em sentido lato* se e só se,

$$\forall\, x', x'' \in B \quad , \quad x' < x'' \Rightarrow f\,(x') \leq f\,(x'')\;;$$

diz-se *crescente em sentido estrito* se e só se,

$$\forall\, x', x'' \in B \quad , \quad x' < x'' \Rightarrow f\,(x') < f\,(x'')\;;$$

b) A função diz-se *decrescente em sentido lato* se e só se,

$$\forall\, x', x'' \in B \quad , \quad x' < x'' \Rightarrow f\,(x') \geq f\,(x'')\;;$$

diz-se *decrescente em sentido estrito* se e só se,

$$\forall\, x', x'' \in B \quad , \quad x' < x'' \Rightarrow f\,(x') > f\,(x'')\;.$$

As funções crescentes ou decrescentes recebem a designação genérica de *funções monótonas* (em sentido lato ou em sentido estrito).

2. Definição de limite de uma função num ponto

Considere-se a função $f(x)$ com domínio em A e seja a um ponto de acumulação de A (ponto de acumulação próprio ou impróprio, pertencente ou não ao conjunto). É já conhecida do leitor a *definição de Heine* de limite de $f(x)$ quando x tende para a, ou mais simplesmente limite de $f(x)$ no ponto a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\, x_n \in A \;\;,\; x_n \neq a \;\wedge\; \lim x_n = a \;\Rightarrow\; \lim f(x_n) = b \;,$$

podendo nesta definição b ser real , $+\infty$ ou $-\infty$ (tal como a) .

Embora esta definição seja suficiente para uma abordagem elementar da teoria dos limites das funções reais de variável real, nomeadamente permitindo uma demonstração muito simples das regras mais usuais do cálculo de limites, em matérias mais avançadas é por vezes conveniente utilizar uma outra definição alternativa (equivalente à de Heine). Trata-se da *definição de Cauchy* :

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \,,\, \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) \;>\; 0 : \; x \in V_{\varepsilon}(a) \cap [\, A - \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_{\delta}(b) \;,$$

podendo nesta definição b ser real , $+\infty$ ou $-\infty$ (tal como a) .

No teorema seguinte estabelece-se a equivalência entre ambas as definições:

Teorema 1 : *As duas definições de limite, segundo Heine e segundo Cauchy, são equivalentes*

<u>Demonstração</u> : a) Supondo que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ segundo Cauchy, considere-se uma qualquer sucessão x_n , de termos pertencentes ao domínio A da função, tal que $x_n \neq a$ e $\lim x_n = a$. Fixado um qualquer $\delta > 0$, determine-se o correspondente $\varepsilon > 0$ com o qual se verifica a condição que traduz a definição de Cauchy. Com esse ε , determine-se a ordem a partir da qual $x_n \in V_{\varepsilon}(a)$; a partir dessa ordem tem-se $x_n \in V_{\varepsilon}(a) \cap [\, A - \{a\}\,]$ o que implica ser $f(x_n) \in V_{\delta}(b)$, ficando assim provado que $\lim f(x_n) = b$. Em conclusão: tem-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ segundo Heine.

b) Supondo agora que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ segundo Heine, admitamos por absurdo que tal não sucedia segundo a definição de Cauchy. Existiria então um particular $\delta > 0$ para o qual , com qualquer $\varepsilon > 0$, sempre se encontraria um $x_{\varepsilon} \in V_{\varepsilon}(a) \cap [\, A - \{a\}\,]$ tal que $f(x_{\varepsilon}) \notin V_{\delta}(b)$. Tomando $\varepsilon_n = 1/n$, para $n = 1 , 2 , \ldots$, existiriam números reais $x_n \in V_{1/n}(a) \cap [\, A - \{a\}\,]$ tais que $f(x_n) \notin V_{\delta}(b)$. Claro que os x_n pertenceriam a A , seriam distintos de a e $lim\, x_n = a$; no entanto, como $f(x_n) \notin V_\delta(b)$ para todo o n , não seria $lim\, f(x_n) = b$, contrariamente à hipótese de ser $\lim_{x \to a} f(x) = b$ segundo Heine .

3 - Condição necessária e suficiente para existência de limite finito

Pode demonstrar-se com facilidade uma condição necessária e suficiente para existência de limite finito de uma função num ponto. Trata-se de uma condição semelhante à condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão (condição de Cauchy) .

Teorema 2 : *Sendo $f(x)$ uma função com domínio em A e a um ponto de acumulação de A , a condição necessária suficiente para que exista finito $\lim_{x \to a} f(x)$ (com a finito, $+\infty$ ou $-\infty$) é que,*

$$\forall\, \delta > 0 \ , \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 \ : \ x', x'' \in V_\varepsilon(a) \cap (A - \{a\}) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \delta$$

Demonstração : a) A condição é necessária. Sendo $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (finito) então, de acordo com a definição de Cauchy,

$$\forall\, \delta > 0 \ , \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 \ : \ x \in V_\varepsilon(a) \cap (A - \{a\}) \Rightarrow |\ f(x) - b\ | < \delta/2 \ .$$

Tomando então quaisquer valores $x', x'' \in V_\varepsilon(a) \cap (A - \{a\})$ tem-se,

$$|f(x') - f(x'')| \ \leq\ |f(x') - b| + |\ b - f(x'')| < \delta/2 + \delta/2 = \delta \ ,$$

verificando-se portanto a condição do enunciado,

b) A condição é suficiente. Suponha-se verificada a condição do enunciado. Considere-se uma qualquer sucessão de termos $x_n \in A$, tal que $x_n \neq a$ e $lim\, x_n = a$. Dado um $\delta > 0$, considere-se o correspondente $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ cuja existência é assegurada pela condição do enunciado (supostamente verificada). De certa ordem $n_{\varepsilon(\delta)}$ em diante, tem-se $x_n \in V_\varepsilon(a)$ e, portanto, tomados $n > m > n_{\varepsilon(\delta)}$, tem-se x_n , $x_m \in V_\varepsilon(a) \cap (A - \{a\})$, o que implica $|\,f(x_n) - f(x_m)| < \delta$ (pela condição do enunciado). Mas tal traduz precisamente a convergência da sucessão $f(x_n)$. Seja $b = lim\, f(x_n)$ (finito) e vejamos que para qualquer outra sucessão x_n', nas condições de x_n, também se tem $b = lim\, f(x_n')$ o que, de acordo com a definição de Heine , mostrará que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ (finito) : para qualquer outra sucessão x_n', nas mesmas condições que x_n, existirá $b' = lim\, f(x_n')$; e como x_n , x_n' pertencem a $V_\varepsilon(a) \cap (A - \{a\})$, a partir de certa ordem, tem-se $|\,f(x_n) - f(x_n')\,| < \delta$ donde resulta, passando ao limite, que $|\ b - b'| \leq \delta$; devido à arbitrariedade de δ, tem-se $b = b'$, o que completa a demonstração.

4 – Sublimites . Limites laterais

Dada a função $f(x)$ com domínio em $A \subseteq \mathbf{R}$, seja $B \subseteq A$ e a um ponto de acumulação (real , $+\infty$ ou $-\infty$) do domínio A e também do conjunto B . Representando por $f_B(x)$ a restrição de $f(x)$ ao conjunto B , caso exista $\lim\limits_{x \to a} f_B(x)$, a esse limite chama-se *sublimite* da função em a relativo ao conjunto B . Também se usa o símbolo $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$ para representar o *sublimite* da função em a relativo ao conjunto B

Casos particulares de sublimites são os chamados limites laterais. O *limite lateral direito* é o sublimite que se obtém (caso exista) com $B = D = A \cap [\, a\, , +\infty\, [$; o *limite lateral esquerdo* é o sublimite que se obtém (caso exista) com $B = E =]\, -\infty\, , a\,] \cap A$.

Os limites laterais têm simbologia específica :

$$f\,(a+0) \;=\; \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \;=\; \lim_{x \to a} f_D(x) \;,$$

no caso do limite lateral direito ; e para o limite lateral esquerdo,

$$f\,(a-0) \;=\; \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \;=\; \lim_{x \to a} f_E(x) \,.$$

Note-se que uma função pode não ter limites laterais num ponto, mas admitir sublimites nesse ponto relativamente a outros subconjuntos do domínio, como é o caso da função,

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 1 \;,\; se\;\; x\; é\; racional \\ 0 \;,\; se\; x\; é\; irracional \end{cases} \;,$$

para a qual não existem por exemplo os limites laterais,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) \;,$$

existindo no entanto os sublimites em $x = 0$ relativos aos conjuntos $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ (o primeiro igual a 1 e o segundo igual a 0) .

Conclui-se sem dificuldade que caso exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, com esse limite coincidem todos os sublimites de $f(x)$ em $x = a$, porque com $B \subseteq A$, a condição que define segundo Cauchy o limite,

$$\forall \delta > 0\, , \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 :\; x \in V_\varepsilon(a) \cap [\, A \text{ - } \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)\, ,$$

implica a condição que define segundo Cauchy o sublimite relativo ao conjunto B,

$$\forall \delta > 0\, , \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 :\; x \in V_\varepsilon(a) \cap [\, B \text{ - } \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)\, .$$

Daqui resulta que existindo em $x = a$ sublimites distintos para a função esta não pode ter limite no referido ponto.

O teorema seguinte tem utilidade prática na determinação dos possíveis sublimites de uma função num ponto.

Teorema 3 : *Dada a função $f(x)$ com domínio em A , sendo a um ponto de acumulação de A (com a finito, $+\infty$ ou $-\infty$) e sendo B_1 , B_2 , … , B_k conjuntos em número finito, dois a dois disjuntos, tais que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$, admita-se que a é ponto de acumula-ção de cada um dos B_j e que existem os sublimites λ_j da função em $x = a$ relativos a cada um dos referidos B_j . Nessas condições nenhum λ distinto de todos os λ_j pode ser sublimite da função em $x = a$*

<u>Demonstração</u> : Seja λ distinto de todos os λ_j . Nessas condições é possível fixar $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que a vizinhança $V_\delta(\lambda)$ não tenha pontos em comum com nenhuma das vizinhanças $V_\delta(\lambda_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Como cada λ_j é por hipótese sublimite de $f(x)$ em $x = a$ relativamente ao respectivo B_j , existem valores $\varepsilon_j > 0$ tais que,

$$x \in V_{\varepsilon_j}(a) \cap [\, B_j - \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_\delta(\lambda_j) \quad (\, j = 1, 2, \ldots, k\,) \ .$$

Com $\varepsilon = Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\} > 0$ tem-se então, por ser $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$,

$$x \in V_\varepsilon(a) \cap [\, A - \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in \bigcup_{j=1}^{k} V_\delta(\lambda_j) \Rightarrow f(x) \notin V_\delta(\lambda) \ .$$

Pode agora ver-se com facilidade que λ não pode ser sublimite de $f(x)$ em $x = a$ relativo a certo conjunto $B \subseteq A$ de que a seja ponto de acumulação . Se o fosse, para o $\delta > 0$ fixado acima – como para qualquer outro – existiria um ε^* positivo tal que

$$x \in V_{\varepsilon^*}(a) \cap [\, B - \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_\delta(\lambda) \ ,$$

e então para os valores $x \in B - \{a\}$ pertencentes à mais estreita das vizinhanças $V_\varepsilon(a)$ e $V_{\varepsilon^*}(a)$ – e tais valores existem por ser a ponto de acumulação de B – ter-se-ia simultaneamente $f(x) \notin V_\delta(\lambda)$ e $f(x) \in V_\delta(\lambda)$ o que é manifestamente absurdo

O teorema precedente não é válido se os conjuntos B_j envolvidos forem em número infinito, falhando a demonstração neste caso porque então nada garante que seja $Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots\} > 0$ e tal é essencial para a validade do argumento apresentado.

Se , nas condições do teorema precedente os λ_j forem todos iguais , ou seja, se tivermos $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = \mu$ tem-se que para cada $\delta > 0$ existem $\varepsilon_j > 0$ tais que,

$$x \in V_{\varepsilon_j}(a) \cap [\, B_j - \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_\delta(\mu) \quad (\, j = 1, 2, \ldots, k\,) .$$

Com $\varepsilon = Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\} > 0$ tem-se então, por ser $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$,

$$x \in V_\varepsilon(a) \cap [\, A - \{a\}\,] \Rightarrow f(x) \in V_\delta(\mu) \ .$$

Daqui se tira que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mu$. Pode pois enunciar-se o seguinte

Teorema 4 : *Dada a função $f(x)$ com domínio em A, sendo a um ponto de acumulação de A (com a finito, $+\infty$ ou $-\infty$) e sendo B_1, B_2, … , B_k conjuntos em número finito, dois a dois disjuntos, tais que $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$, admita-se que a é ponto de acumula-ção de cada um dos B_j, que existem os sublimites λ_j da função em $x = a$ relativos a cada um dos referidos B_j e que tais sublimites são todos iguais a certo μ. Nessas condições* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mu$

Refira-se que tal como no caso do teorema 3, o teorema precedente não é válido se os conjuntos B_j envolvidos forem em número infinito, falhando a demonstração neste caso porque então nada garante que seja $Min\ \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots\} > 0$ e tal é essencial para a validade do argumento apresentado.

Do teorema 4 e das considerações que precedem o teorema 3 resulta imediatamente o seguinte,

Teorema 5 : *Dada a função $f(x)$ com domínio em A, sendo a (finito) um ponto de acumulação de A e bem assim dos conjuntos $D = A \cap [\, a , +\infty\, [$ e $E =]\, -\infty , a\,] \cap A$ a condição necessária e suficiente para que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ é que sejam iguais os limites laterais $f(a+0)$ e $f(a-0)$*, tendo-se então que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a+0) = f(a-0)$$

No caso especial das funções monótonas, tem-se ainda o seguinte teorema de frequente aplicação:

Teorema 6 : *Seja $f(x)$ com domínio em A e considere-se a ponto de acumulação, pró-prio ou impróprio, de A. Então:*

a) *Sendo a finito :* **1)** *Se a é ponto de acumulação de $D = [\, a , +\infty\, [\cap A$ e f é monótona em certo $B_\theta =]\, a , a + \theta\, [\cap A$, então existe $f(a+0)$;* **2)** *Se a é ponto de acumulação de $E =]\, -\infty , a\,] \cap A$ e f é monótona em certo $B_\theta =]\, a - \theta , a\, [\cap A$, então existe $f(a-0)$;*

b) *Sendo $a = +\infty$, se f é monótona em certo $B_\theta =]\, 1/\theta , +\infty\, [\cap A$, então existe* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *;*

c) *Sendo $a = -\infty$, se f é monótona em certo $B_\theta =]\, -\infty , -1/\theta\, [\cap A$, então existe* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

<u>Demonstração</u> : Vamos fazer a demonstração apenas para o caso ***a*1)** na hipótese em que f é monótona crescente. Nos restantes casos a argumentação é semelhante, pelo que se deixam como exercício

Seja μ o ínfimo de *f(x)* em B_θ e vejamos que se tem $\mu = f\,(a + 0)$. Tratemos em separado cada um dos dois casos possíveis, μ finito ou $\mu = -\infty$.

Se μ for finito, dado um qualquer $\delta > 0$, existe um $x_\delta \in B_\theta$ tal que $f\,(x_\delta) < \mu + \delta$, caso contrário $\mu + \delta$ seria um minorante de f em B_θ maior que o respectivo ínfimo; fazendo, $\varepsilon\,(\delta) = x_\delta - a$, tem-se,

$$x \in [\ \mathrm{V}_{\varepsilon(\delta)}(a) - \{a\}\,] \cap D \;\Rightarrow\; x \in\,]\, a\,,\, a + \varepsilon(\delta)\,[\, \cap D \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a < x < a + \varepsilon\,(\delta) \;\wedge\; x \in D \;\Rightarrow\; a < x < x_\delta \wedge x \in B_\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \leq f\,(x) \leq f\,(x_\delta) < \mu + \delta \Rightarrow f\,(x) \in \mathrm{V}_\delta(\mu)\,,$$

devido à monotonia crescente de f em B_θ ; assim se conclui, usando a definição de Cauchy, que $\mu = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

Se for $\mu = -\infty$, dado um qualquer $\delta > 0$, existe um $x_\delta \in B_\theta$ tal que $f\,(x_\delta) < -1/\delta$; um argumento semelhante ao usado anteriormente leva a que $\lim\limits_{x \to a+0} f\,(x) = -\infty$.

5 - Regras de cálculo de limites de funções

A definição de limite segundo Heine permite com facilidade transferir para o cálculo de limites das funções reais de variável real todas as regras relativas ao cálculo de limites de sucessões reais, com as mesmas convenções e casos de indeterminação.

A título de exemplo vamos apenas apresentar as regras referentes ao limite do quociente de funções, da exponencial de base natural e da função logarítimica de base natural, o que poderá servir de modelo para o leitor justificar por si a validade das demais regras de cálculo :

a) Limite do quociente - Dadas as funções $f\,(x)$ e $g\,(x)$, seja a um ponto de acumulação dos respectivos domínios e admita-se que existem os limites

$$\theta = \lim_{x \to a} f\,(x) \quad \text{e} \quad \mu = \lim_{x \to a} g(x)\;.$$

Considere-se a função $h(x) = f\,(x)\,/\,g\,(x)$, cujo domínio é formado pelos pontos comuns aos domínios de $f\,(x)$ e $g\,(x)$ que não anulem o denominador, e admita-se que a é ponto de acumulação do domínio de $h\,(x)$. Então, dada uma qualquer sucessão de termos x_n pertencentes ao domínio de $h\,(x)$, tal que $x_n \neq a$ e $\lim x_n = a$, tem-se , $\lim f\,(x_n) = \theta$ e

$\lim g\,(x_n) = \mu$ (definição de limite segundo Heine) ; será portanto, pela regra do limite do quociente de sucessões,

$$lim\ h\,(x_n) \;=\; lim\ \frac{f\,(x_n)}{g(x_n)} \;=\; \theta/\mu\,,$$

com as convenções seguintes:

$\theta/(\pm\infty) = 0$, $(\pm\infty)/\mu = \pm\infty$ (μ real positivo) , $(\pm\infty)/\mu = \mp\,\infty$ (μ real negativo) ,

e casos de indeterminação : $0/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ e $(\pm\infty)/0$. Ter-se-á então, pela definição de limite segundo Heine,

$$\lim_{x\to a} h(x) \;=\; \lim_{x\to a} \frac{f\,(x)}{g(x)} \;=\; \theta/\mu \;=\; \frac{\lim\limits_{x\to a}\ f\,(x)}{\lim\limits_{x\to a}\ g(x)}\quad ,$$

com as convenções e casos de indeterminação supramencionados.

b) **<u>Limite da exponencial de base natural</u> -** Dada a função $f\,(x)$, seja a um ponto de acumulação do respectivo domínio e admita-se que existe o limite $\theta = \lim\limits_{x\to a}\ f\,(x)$. Considere-se a função $h(x) = e^{\,f\,(x)}$, cujo domínio coincide com o de $f\,(x)$. Então, dada uma qualquer sucessão de termos x_n pertencentes ao domínio de $h\,(x)$, tal que $x_n \neq a$ e $lim\ x_n = a$, tem-se , $lim\, f\,(x_n) = \theta$ (definição de limite segundo Heine) ; será portanto, $lim\ h(x_n) = lim\ e^{f\,(x_n)} = e^{\theta}$, com as convenções seguintes: $e^{+\infty} = +\infty$ e $e^{-\infty} = 0$. Tem--se portanto (definição de limite segundo Heine) $\lim\limits_{x\to a} e^{f\,(x)} = e^{\theta}$, com as convenções referidas.

c) **<u>Limite da função logarítmica de base natural</u> -** Dada a função $f\,(x)$, seja a um ponto de acumulação do respectivo domínio e admita-se que existe o limite $\theta = \lim\limits_{x\to a}\ f\,(x)$. Considere-se a função $h(x) = log\,f\,(x)$, cujo domínio é formado pelo pontos do domínio de $f\,(x)$ que fazem $f\,(x) > 0$, e admita-se que a é ponto de acumulação do domínio de $h(x)$. Então, dada uma qualquer sucessão de termos x_n pertencentes ao domínio de $h(x)$, tal que $x_n \neq a$ e $lim\ x_n = a$, tem-se , $lim\,f\,(x_n) = \theta \geq 0$ (definição de limite segundo Heine) ; será portanto, $lim\ h(x_n) = lim\ log\,f\,(x_n) = log\ \theta$, com as convenções seguintes: $log\ (+\infty\ ) = +\infty$ e $log\ 0 = -\infty$. Tem--se portanto (definição de limite segundo Heine) $\lim\limits_{x\to a} log\ f\,(x) = log\ \theta$, com as convenções referidas.

Também as **fórmulas de Bernoulli** estudadas no âmbito do cálculo de limites de sucessões se adaptam com facilidade, de modo a poderem ser utilizadas no levantamento de indeterminações que surjam no cálculo de limites de funções que envolvam

exponenciais e logaritmos. Assim, sendo $u = u(x)$ uma função com domínio em A e sendo a um ponto de acumulação deste conjunto, admita-se que $\lim\limits_{x\to a}\ u(x) = 0$. Tem-se,

$$e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{[u(x)]^2}{2!} + \cdots + \frac{[u(x)]^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{[u(x)]^m}{m!} \cdot \xi_m[u(x)] \,,$$

e pode ver-se sem dificuldade que, $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \xi_m[u(x)] = 1$. De facto, sendo $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$, se considerarmos uma qualquer sucessão x_n de valores do domínio de $u(x)$, tal que $x_n \neq a$ e $\lim x_n = a$, tem-se , $\lim u(x_n) = 0$ (definição de limite segundo Heine) e, portanto, $\lim \xi_m[u(x_n)] = 1$ (m fixo); então , novamente pela definição de limite segundo Heine, conclui-se que $\lim\limits_{x \to a} \xi_m[u(x)] = 1$.

Argumentos semelhantes permitem adaptar as três outras fórmulas de Bernoulli estudadas :

$$\log[1 + u(x)] = u(x) - [u(x)]^2 . \lambda[u(x)] \,,$$

com $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \lambda[u(x)] = 1/2$; também,

$$\log[1 + u(x)] = u(x) . \eta[u(x)] \,,$$

com $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \eta[u(x)] = 1$; e finalmente,

$$[1 + u(x)]^{\alpha} = 1 + u(x). \alpha . \zeta[u(x)] \,,$$

com $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \zeta[u(x)] = 1$.

A utilização prática destas fórmulas no cálculo de limites de funções faz-se nos mesmos termos que no cálculo dos limites de sucessões. Assim, por exemplo,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{x . \log(1 + 1/x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + (1/x).\xi_1 - 1}{x . (1/x) . \eta} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\xi_1}{x . \eta} = 0 .$$

6 - Limites das funções trigonométricas e suas inversas

Os limites das funções trigonométricas obtêm-se com grande facilidade a partir dos resultados propostos para demonstração nos exercícios 17 e 18 do texto sobre successões reais . Assim,

a) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ (*finito*) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} sen[u(x)] = sen\, b$. Com efeito, sendo $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ (*finito*), se considerarmos uma qualquer sucessão x_n de valores do domínio de $u(x)$, tal que $x_n \neq a$ e $\lim x_n = a$, tem-se , $\lim u(x_n) = b$ (definição de limite segundo Heine) e, portanto, de acordo com o resultado da alínea c) do supracitado exercício 17, será $\lim sen\,[\,u(x_n)] = sen\, b$; então, novamente pela definição de limite segundo Heine, pode concluir-se que $\lim\limits_{x \to a} sen[u(x)] = sen\, b$.

Do mesmo modo, com argumentação semelhante baseada agora na alínea d) do mesmo exercício,

b) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ *(finito)* $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} cos[u(x)] = cos\, b$.

E ainda, também com argumentação semelhante baseada agora na alínea e) do mesmo exercício,

c) $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ [*finito, diferente de* $(2k+1)\pi/2$] $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} tg[u(x)] = tg\, b$.

Relativamente à tangente, refira-se ainda que no caso de ser $b = (2k+1)\pi/2$ a existência ou não de limite para $tg[\,u(x)]$ depende do modo como $u(x)$ tende para $b = (2k+1)\pi/2$ quando x tende para a : se tende por valores menores que b , o limite da tangente é $+\infty$, se tende por valores maiores que b, o limite da tangente é $-\infty$, não existindo limite fora destes casos; estas conclusões obtêm-se de imediato exprimindo a tangente em termos do seno e do coseno e estudando o comportamento destas duas funções quando $u(x)$ tende para b dos diversos modos possíveis.

Com base no resultado constante do supracitado exercício 18, conclui-se ainda de imediato (mais uma vez utilizando a definição de Heine) que,

$$\lim_{x \to a} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{sen\,[u(x)]}{u(x)} = 1 ,$$

resultado muito útil para muitas aplicações.

Vejamos agora os limites das funções trigonométricas inversas, começando por estudar os casos,

$$\lim_{x \to a} (arc\ sen\ x) \ , \ \lim_{x \to a} (arc\ cos\ x) \text{ e } \lim_{x \to a} (arc\ tg\ x) \ .$$

Relembremos primeiro que : $y = arc\ sen\ x$ é a função que se obtém invertendo $x = sen\ y$ no intervalo $[\,-\pi/2\,,\,\pi/2]$ onde esta função é injectiva; $y = arc\ cos\ x$ é a função que se obtém invertendo $x = cos\, y$ no intervalo $[\,0\,,\,\pi\,]$ onde esta função é injectiva ; $y = arc\ tg\ x$ é a função que se obtém invertendo $x = tg\ y$ no intervalo $]\,-\pi/2\,,\,\pi/2\,[$ onde esta função é injectiva.

E relembremos também que: o domínio de $y = arc\ sen\ x$ é o intervalo $[\,-1\,,\,1]$ e o contradomínio é o intervalo $[\,-\pi/2\,,\,\pi/2]$; o domínio de $y = arc\ cos\ x$ é o intervalo $[\,-1\,,\,1]$ e o contradomínio é o intervalo $[\,0\,,\,\pi\,]$; o domínio de $y = arc\ tg\ x$ é o intervalo $]\,-\infty, +\infty\,[$ e o contradomínio é o intervalo $]\,-\pi/2\,,\,\pi/2[$.

Vejamos então que $\lim_{x \to a} (arc\ sen\ x) = arc\ sen\ a$ $(-1 \le a \le 1)$. Seja x_n uma qualquer sucessão de elementos de $[\,-1\,,\,1\,]$, tal que $lim\ x_n = a$. Fazendo $y_n = arc\ sen\ x_n$, ou seja , $x_n = sen\ y_n$, tem-se $y_n \in [\,-\pi/2\,,\,\pi/2\,]$ e admita-se por absurdo que esta sucessão poderia não ter como limite $arc\ sen\ a$; existiria então uma subsucessão y_{α_n} tal que $\lambda = lim\ y_{\alpha_n} \neq arc\ sen\ a$ $(-\pi/2 \le \lambda \le \pi/2)$; mas então,

$$x_{\alpha_n} = sen\ y_{\alpha_n} \wedge \lambda = lim\ y_{\alpha_n} \Rightarrow lim\ x_{\alpha_n} = sen\ \lambda\ ,$$

e como, por outro lado, $lim\ x_n = a \Rightarrow lim\ x_{\alpha_n} = a$, ter-se-ia necessariamente $a = sen\ \lambda$ com $-\pi/2 \le \lambda \le \pi/2$, ou seja, $\lambda = arc\ sen\ a$; deveria então ter-se ao mesmo tempo $\lambda \neq arc\ sen\ a$ e $\lambda = arc\ sen\ a$ o que é impossível. <u>Em conclusão</u> : a qualquer sucessão x_n de elementos de $[\,-1\,,\,1\,]$, tal que $lim\ x_n = a$ corresponde uma sucessão $y_n = arc\ sen\ x_n$ tal que,

$$lim\ y_n = lim\ arc\ sen\ x_n = arc\ sen\ a\ ,$$

o que de acordo com a definição de limite segundo Heine permite concluir que $\lim_{x \to a} (arc\ sen\ x) = arc\ sen\ a$, como se pretendia provar.

Um argumento análogo permite concluir que $\lim_{x \to a} (arc\ cos\ x) = arc\ cos\ a$.

Vejamos agora o caso de $\lim_{x \to a} (arc\ tg\ x)$, considerando separadamente os casos : a finito ; $a = +\infty$; $a = -\infty$.

<u>1º Caso</u> : a finito . Neste caso, um argumento semelhante ao utilizado no caso da função $y = arc\, sen\, x$ permitiria concluir que $\lim_{x \to a} (arc\ tg\ x) = arc\ tg\ a$.

<u>2º Caso</u> : $a = +\infty$. Considere-se uma qualquer sucessão x_n de elementos de $]\,-\infty\,,+\infty\,[$, tal que $lim\ x_n = +\infty$. Fazendo $y_n = arc\ tg\ x_n$, ou seja, $x_n = tg\ y_n$, tem-se $y_n \in]\,-\pi/2\,,\,\pi/2\,[$ e admita-se por absurdo que esta sucessão poderia não ter como limite $\pi/2$; existiria então uma subsucessão y_{α_n} tal que $\lambda = lim\ y_{\alpha_n} \neq \pi/2$ $(-\pi/2 \le \lambda < \pi/2)$; mas então,

$$x_{\alpha_n} = tg\ y_{\alpha_n} \wedge \lambda = lim\ y_{\alpha_n} \Rightarrow lim\ x_{\alpha_n} = \begin{cases} tg\ \lambda & ,\ -\pi/2 < \lambda < \pi/2 \\ -\infty & ,\quad \lambda = -\pi/2 \end{cases} ,$$

e como , por outro lado , $lim\ x_n = +\infty \Rightarrow lim\ x_{\alpha_n} = +\infty$, ter-se-ia ao mesmo tempo $a = +\infty$ e $a \neq +\infty$ o que é impossível. <u>Em conclusão</u> : a qualquer sucessão x_n de elementos de elementos de $]\,-\infty\,,+\infty\,[$, tal que $lim\ x_n = +\infty$. corresponde uma sucessão $y_n = arc\ tg\ x_n$ tal que $lim\ y_n = lim\ arc\ tg\ x_n = \pi/2$, o que de acordo com a definição de limite segundo Heine permite concluir que $\lim_{x \to +\infty} (arc\ tg\ x) = \pi/2$.

3º Caso : $a = -\infty$. Um argumento semelhante ao utilizado no caso anterior permite concluir que $\lim\limits_{x \to -\infty} (arc\,tg\,x) = -\pi/2$.

Os resultados precedentes generalizam-se aos casos das funções : $y = arc\,sen\,u(x)$, com $-1 \leq u(x) \leq 1$; $y = arc\,cos\,u(x)$, com $-1 \leq u(x) \leq 1$; e $y = arc\,tg\,u(x)$.

Vejamos a título de exemplo o caso da função $y = arc\,sen\,u(x)$, valendo para as restantes uma argumentação semelhante. Vamos então provar que,

$$\lim_{x \to a} u(x) = b \Rightarrow \lim_{x \to a} arc\,sen\,u(x) = arc\,sen\,b \,.$$

Considere-se uma sucessão x_n de valores do domínio de $u = u(x)$, tal que $x_n \neq a$ e $\lim x_n = a$; tem-se então, pela definição de limite segundo Heine , que a sucessão $u_n = u(x_n)$ tende para b , porque por hipótese $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$; mas de $\lim u_n = \lim u(x_n) =$ $= b$ resulta, de novo pela definição de limite segundo Heine,

$$\lim arc\,sen\,u_n = \lim arc\,sen\,u(x_n) = arc\,sen\,b \,,$$

porque como se viu anteriormente $\lim\limits_{u \to b} arc\,sen\,u = arc\,sen\,b$ e , por outro lado, $-1 \leq u(x) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq b \leq 1$; fica assim provado que,

$$\lim_{x \to a} arc\,sen\,u(x) = arc\,sen\,b \,.$$

Para as outras duas funções trigonométricas inversas, tem-se :

$$\lim_{x \to a} u(x) = b \Rightarrow \lim_{x \to a} arc\,cos\,u(x) = arc\,cos\,b \quad (-1 \leq b \leq 1)$$

$$\lim_{x \to a} u(x) = b \Rightarrow \lim_{x \to a} arc\,tg\,u(x) = \begin{cases} arc\,tg\,b & , \; -\infty < b < +\infty \\ \pi/2 & , \; b = +\infty \\ -\pi/2 & , \; b = -\infty \end{cases}$$

7. Continuidade pontual

Seja $f(x)$ uma função real de variável real com domínio A e seja $a \in A$. Diz-se que $f(x)$ é *contínua* em $x = a$ se e só se,

$$\forall \, \delta > 0 \;\; , \; \exists \, \varepsilon = \varepsilon(\delta) \; : \; x \in V_\varepsilon(a) \cap A \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\delta[f(a)] \,,$$

ou seja, se e só se,

$$\forall \, \delta > 0 \;\; , \; \exists \, \varepsilon = \varepsilon(\delta) \; : \; |x - a| < \varepsilon \wedge x \in A \;\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta \,.$$

Quando $a \in A$ não seja ponto de acumulação de A (nesse caso diz-se que a é ponto isolado do domínio da função), existe sempre certa vizinhança de a em que o único ponto de A que aí se encontra é o próprio a ; portanto, neste caso, a condição que define a continuidade de $f(x)$ em $x = a$ é sempre verificada. Quando $a \in A$ seja ponto de acumu-lação de A , a condição que define a continuidade de $f(x)$ em $x = a$ equivale a ser $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Com um argumento semelhante ao utilizado quando se demonstrou a equivalência das definições de limite de Heine e Cauchy, pode concluir-se que $a \in A$ (ponto isolado ou não) é ponto de continuidade da função $f(x)$ se e só se para qualquer sucessão x_n de elementos de A que tenha por limite o real a a correspondente sucessão $f(x_n)$ tiver por limite $f(a)$.

O teorema seguinte garante a continuidade da função composta $z = [f \, o \, g]\,(x)$ a partir da continuidade das funções $y = g(x)$ e $z = f(y)$.

Teorema 7 : *Admita-se que a função $y = g(x)$ com domínio A é contínua em certo ponto $a \in A$ e que a função $z = f(y)$ com domínio $B = g(A)$ é contínua no ponto correspondente $b = g(a) \in B$. Então a função composta $[f \, o \, g]\,(x)$ é contínua em $x = a$*

<u>Demonstração</u>: A continuidade de $f(y)$ em $b = g(a)$ e de $g(x)$ em a traduz-se respectivamente por,

$$1)\ \forall\, \delta > 0 \quad , \quad \exists\, \eta = \eta(\delta) \ : \ y \in V_{\eta}(b) \cap g(A) \Rightarrow f(y) \in V_{\delta}[f(b)]$$

$$2)\ \forall\, \eta > 0 \quad , \quad \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\eta) \ : \ x \in V_{\varepsilon}(a) \cap A \Rightarrow g(x) \in V_{\eta}[\, g(a)] \quad ,$$

Então, dado $\delta > 0$, determina-se $\eta = \eta(\delta)$ pela condição 1) e a partir deste determina-se $\varepsilon = \varepsilon(\eta) = \varepsilon[\eta(\delta)]$ pela condição 2); claro que então, com o ε e η assim determinados,

$$x \in V_{\varepsilon}(a) \cap A \Rightarrow g(x) \in V_{\eta}[\, g(a)] \Rightarrow g(x) \in V_{\eta}[\, g(a)] \cap g(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f[\, g(x)] \in V_{\delta}[f(b)] \Rightarrow f[\, g(x)] \in V_{\delta}\{f[\, g(a)]\} \ ,$$

assim se provando a continuidade de $[f \, o \, g]\,(x)$ em $x = a$.

Embora o teorema precedente tenha sido enunciado para o caso $B = g(A)$ - domínio de $f(y)$ coincidente com o contradomínio de $g(x)$ - , ele adapta-se com facilidade ao caso da composição de funções em que $B \neq g(A)$ e $B \cap g(A) \neq \emptyset$. De facto, restringindo o domínio de $g(x)$ ao conjunto A_0 de todos os $x \in A$ que fazem $g(x) \in B$, restringindo o domínio de $f(y)$ ao conjunto $g(A_0)$ e atendendo a que a continuidade de $g(x)$ em a se mantém quando se restringe o domínio da função, o mesmo acontecendo quanto à continuidade de $f(y)$ em b , o teorema é aplicável à função composta $z = f[\, g(x)]$ definida em A_0 .

8. Descontinuidades

Dada a função $f(x)$ com domínio em A, considere-se um real $a \in Ad\ A = A \cup A'$. Como já sabemos, a função é contínua em $x = a$, nos seguintes casos : **1)** $a \in A$ e $a \notin A'$ (a é ponto isolado do domínio) ; **2)** $a \in A$, $a \in A'$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

A função diz-se *descontínua* em $x = a$, nos seguintes casos : **1)** $a \in A$, $a \in A'$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ ou não existe ou existindo é distinto de $f(a)$; **2)** $a \notin A$, $a \in A'$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ ou não existe ou existindo é infinito .

Há ainda outro caso possível : $a \notin A$, $a \in A'$ e $\lim_{x \to a} f(x)$ existe finito. Neste caso a função $f(x)$ diz-se *quase contínua* em $x = a$, no sentido de que é possível, alargando o domínio da função a $x = a$ e definindo $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, obter uma função contínua.

Sendo a ponto de descontinuidade de $f(x)$, caso existam os limites laterais $f(a+0)$ e $f(a-0)$ – ou apenas um deles se em certo intervalo $]\, a - \varepsilon\ ,\ a\, [$ ou $]\, a\ ,\ a + \varepsilon\, [$ não houver pontos do domínio da função – a descontinuidade diz-se de *primeira espécie*. Nos outros casos, a descontinuidade diz-se de *segunda espécie*.

O teorema seguinte mostra que qualquer função monótona num intervalo admite quando muito uma infinidade numerável de pontos e descontinuidade.

Teorema 8 : *Função monótona num intervalo admite quando muito uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade*

Demonstração : Vejamos primeiro o caso em que $f(x)$ é crescente no intervalo limitado e fechado $[a\ ,\ b]$, generalizando-se depois o resultado aos outros casos. Note-se que sendo a função crescente tem-se, para todos os reais $x \in [a\ ,b]$, $f(a) \le f(x) \le f(b)$, donde resulta que : 1) A função $f(x)$ é limitada no intervalo $[a\ ,b]$; 2) Em cada ponto c $\in\ ]\, a\ ,\ b\, [$ onde a função seja descontínua, os limites laterais $f(c+0)$ e $f(c-0)$, cuja existência é assegurada pelo teorema 6, verificam a desigualdade $f(c-0) < f(c+0)$, ou seja, $s(c) = f(c+0) - f(c-0) > 0$.

Fixado $\delta > 0$, vamos mostrar que a desigualdade $s(c) = f(c+0) - f(c-0) > \delta$ não pode ser verificada para uma infinidade de pontos $c \in\ ]\, a\ ,\ b\, [$. Se tal pudesse acontecer , considerem-se m desses pontos , $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$. Ter-se-ia então, devido à monotonia crescente da função,

$$\begin{array}{l}
f(c_2) - f(a) \ \ge\ f(c_1+0) - f(c_1-0) > \delta \\
f(c_3) - f(c_1) \ \ge\ f(c_2+0) - f(c_2-0) > \delta \\
f(c_4) - f(c_2) \ \ge\ f(c_3+0) - f(c_3-0) > \delta \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(c_m) - f(c_{m-2}) \ \ge\ f(c_{m-1}+0) - f(c_{m-1}-0) > \delta \\
f(b) - f(c_{m-1}) \ \ge\ f(c_m+0) - f(c_m-0) > \delta
\end{array}$$

donde , somando ordenadamente, $f(b) - f(a) + f(c_m) - f(c_1) \geq m\,\delta$, ou ainda, de novo pela monotonia crescente da função, $f(b) - f(a) + f(b) - f(a) \geq m\,\delta$, donde resulta $f(b) - f(a) \geq (m\,\delta) / 2$. Ora esta última desigualdade é incompatível com a possibili-dade de m poder ser tomado arbitrariamente grande. Logo, apenas num número finito de pontos $c \in \,]\, a , b \,[$, pode ter-se $s(c) = f(c+0) - f(c-0) > \delta$.

Considere-se agora o conjunto D dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ que pertençam ao intervalo $]\, a , b \,[$. Para cada $c \in D$ tem-se como vimos $f(c+0) - f(c-0) > 0$. Decomponha-se o conjunto D nos conjuntos D_1 , D_2 , … (em infinidade numerável) definidos como segue (alguns ou todos poderão ser vazios) :

$$D_1 = \{\, c : c \in D \wedge f(c+0) - f(c-0) \geq 1 \,\}$$

$$D_j = \{\, c : c \in D \wedge 1/j \leq f(c+0) - f(c-0) < 1/(j-1) \,\} \;\; (\, j = 2 , 3 , ... \,)$$

Pelo demonstrado anteriormente os conjuntos D_j ($j = 1 , 2 , 3 , ...$) são finitos, eventualmente vazios . E como $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \;\ldots$, conclui-se que o conjunto D é quando muito numerável .

Dado que o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ em $]\, a , b \,[$ é quando muito numerável, o mesmo acontece quanto ao conjunto dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ em $[a , b]$, pois este tem quando muito mais dois pontos que aquele.

Para generalizar o resultado obtido ao caso em que $f(x)$ é crescente num qualquer intervalo I (limitado ou não) , basta notar que é sempre possível determinar um sucessão de intervalos limitados e fechados $I_n = [\, a_n , b_n]$ de modo a ter-se $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Em cada um dos $I_n = [\, a_n , b_n]$ o número de pontos de descontinuidade de $f(x)$ é quando muito numerável e é fácil concluir que a união numerável de conjuntos finitos ou numeráveis é quando muito numerável.

Finalmente para generalizar o resultado ao caso em que $f(x)$ é decrescente num qualquer intervalo I (limitado ou não) , basta notar que nesse caso $-f(x)$ é crescente e que tem o mesmos pontos de descontinuidade que $f(x)$.

9. <u>Continuidade num conjunto. Propriedades especiais das funções contínuas</u>

Dada a função $f(x)$ com domínio A , ela diz-se *contínua no seu domínio* se e só se for contínua em todos os $a \in A$. Por outro lado, $f(x)$ diz-se *contínua no conjunto* $B \subset A$ se e só se a restrição de $f(x)$ a B for contínua em todos os $a \in B$. Atente-se bem nesta última definição : não se diz que $f(x)$ é contínua em $B \subset A$ se e só se for contínua em todos os $a \in B$; diz-se que $f(x)$ é contínua no conjunto $B \subset A$ se e só se a restrição de $f(x)$ a B for contínua em todos os $a \in B$. O exemplo seguinte é elucidativo: a função,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x < 0 \\ 1 + x & , \ 0 \le x < 1 \\ 3 & , \ x \ge 1 \end{cases} ,$$

não é contínua no seu domínio $A = \mathbf{R}$, mas é contínua por exemplo no conjunto $B = \{0 , 1\} \cup [\, 2 , +\infty\, [$; com efeito, embora $f(x)$ não seja contínua em $x = 0$ e $x = 1$, a restrição de $f(x)$ ao conjunto B, ou seja a função,

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x=0 \\ 3 \ , \ x=1 \\ 3 \ , \ x \ge 2 \end{cases} ,$$

é contínua nos pontos $x = 0$ e $x = 1$ (pontos isolados do seu domínio) e ainda em todos os pontos $a \in [\, 2 , +\infty\, [$.

Se em particular se considerar um intervalo $I \subset A$, $f(x)$ será contínua em I se e só se a restrição $f_I(x)$ de $f(x)$ a I for contínua em todos os pontos $a \in I$. Como qualquer $a \in I$ é ponto de acumulação desse intervalo (salvo se este intervalo se reduzir ao próprio a , ou seja, se se tratar de um intervalo degenerado), tem-se,

$$f(x) \text{ contínua em } I \Leftrightarrow \forall\, a \in I \ , \lim_{x \to a} f_I(x) = f_I(a) = f(a) ,$$

em que $f_I(x)$ designa a restrição de $f(x)$ ao intervalo I . Note-se que a igualdade $\lim_{x \to a} f_I(x) = f(a)$ equivale a :

a) $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, caso a seja a extremidade inicial do intervalo I ;

b) $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a)$, caso a seja a extremidade final do intervalo I ;

c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, caso $a \in I$ não seja nenhuma das extremidades do intervalo I ,

porque nesse caso $f_I(x) = f(x)$ em certa $V_\varepsilon(a) = \,]\, a - \varepsilon , a + \varepsilon\, [$ e tal garante que,

$$\lim_{x \to a} f_I(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = b .$$

<u>Em conclusão</u>: $f(x)$ é contínua no intervalo I de extremidades μ (inicial) e λ (final) se e só se for contínua em todos os $a \in I$ tais que $a \neq \mu , \lambda$ e além disso, caso a função seja definida em μ e λ ,

$$\lim_{x \to \mu+0} f(x) = f(\mu) \ \text{(Continuidade à direita em } \mu)$$

$$\lim_{x \to \lambda-0} f(x) = f(\lambda) \ \text{(Continuidade à esquerda em } \lambda) \ .$$

Estudam-se seguidamente algumas propriedades especiais das funções contínuas em conjuntos especiais. Começa-se pelo,

Teorema 9 : *Seja* $f(x)$ *contínua num intervalo* I *e tomem-se* a , $b \in I$ *tais que* $a < b$. *Sendo* $f(a) \neq f(b)$, *então dado* k *estritamente compreendido entre* $f(a)$ *e* $f(b)$, *isto é , tal que,*

$$min \{ f(a) , f(b)\} < k < máx \{ f(a) , f(b)\} ,$$

existe um valor $c \in \,]\, a , b\, [$ *tal que* $f(c) = k$ (Cauchy)

<u>Demonstração</u> : a) Considere-se em primeiro lugar o caso em que $f(a) < f(b)$. Nesse caso será $f(a) < k < f(b)$ e seja X o conjunto dos $x \in [\, a , b]$ para os quais $f(x) < k$. Claro que: 1) O conjunto X é não vazio (pertence-lhe pelo menos o ponto a) ; 2) O com-junto X tem elementos que excedem a, porque a verificação da desigualdade $f(x) < k$ no ponto de continuidade $x = a$ implica a verificação da mesma desigualdade para os valores $x > a$ suficientemente próximos de a ; 3) Existe um intervalo $]\, b - \varepsilon , b]$ em que não se encontra nenhum elemento do conjunto X, porque a verificação da desigualdade $f(x) > k$ no ponto de continuidade $x = b$ implica a verificação da mesma desigualdade para os valores $x < b$ suficientemente próximos de b ; 4) Como consequên-cia de 1), 2) e 3) , o supremo c do conjunto X é um número compreendido entre a e b .

Vejamos que é precisamente $f(c) = k$, com $c = Sup\, X$.

Não pode ser $f(c) > k$, porque se assim fosse teríamos $f(x) > k$ para $x \in]\, c - \varepsilon , c]$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, por ser c um ponto de continuidade da função ; e então, como entre $c - \varepsilon$ e c não haveria elementos do conjunto X , $c - \varepsilon$ seria um majorante desse conjunto menor que o respectivo supremo, o que é impossível.

Não pode ser $f(c) < k$, porque nesse caso teríamos $f(x) < k$ para $x \in [\, c , c + \varepsilon\, [$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, por ser c um ponto de continuidade da função ; e então o conjunto X teria valores maiores que o seu supremo c , o que é impossível.

Só resta portanto a possibilidade de ser $f(c) = k$.

b) No caso de ser $f(a) > f(b)$ e sendo $f(a) > k > f(b)$, considere-se $g(x) = -f(x)$. Claro que $g(x)$ é contínua em A e como $g(a) < -k < g(b)$, o resultado estabelecido em a) permite concluir pela existência de um $c \in]\, a , b\, [$ tal que $g(c) = -k$. Com esse c temos, $f(c) = -g(c) = k$.

Este teorema admite os seguintes corolários:

Corolário 1 : *Uma função contínua num intervalo não muda de sinal sem se anular*

<u>Demonstração</u>: Resulta imediatamente do teorema de Cauchy, notando que se a função muda de sinal, o valor 0 é um valor intermédio entre dois valores da função.

Corolário 2 : *Se* $f(x)$ *é função contínua em certo intervalo I, então o transformado de I por* $f(x)$, *isto é ,* $f(I)$ *é igualmente um intervalo*

Demonstração : Seja $r = Inf\, f(I)$ se $f(I)$ for minorado e $r = -\infty$ se $f(I)$ não for minorado; seja $s = Sup\, f(I)$ se $f(I)$ for majorado e $r = +\infty$ se $f(I)$ não for majorado. Vejamos que para qualquer $k \in \,]\, r\,,\, s\,[$ existe um $c \in I$ tal que $f(c) = k$. De facto, dado ser $r < k < s$ tem-se que existem valores $a\,,\, b \in I$ tais que $r \leq f(a) < k < f(b) \leq s$: com efeito se para todo o $x \in I$ fosse $f(x) \geq k$, k seria um minorante de $f(x)$ em I maior que o respectivo ínfimo, o que é impossível; e se para todo o $x \in I$ fosse $f(x) \leq k$, k seria um majorante de $f(x)$ em I menor que o respectivo supremo, o que é também impossível . Logo, pelo teorema de Cauchy, existe $c \in]\, a\,,\, b\,[$ tal que $f(c) = k$. Em conclusão : a $f(I)$ pertencem todos os valores entre o ínfimo r e o supremo s deste conjunto; o próprio r ou s poderão ou não pertencer a $f(I)$, mas em qualquer caso $f(I)$ é sempre um intervalo.

Teorema 10 : *Sendo $f(x)$ contínua no conjunto limitado e fechado B , então $f(B)$ é igualmente limitado e fechado*

Demonstração : a) Vejamos em primeiro lugar que $f(B)$ é limitado.

Se $f(B)$ não fosse majorado , então para $n = 1\,,2\,,\ldots$, existiria sempre um $x_n \in B$ tal que $f(x_n) > n$; claro que seria então $lim\, f(x_n) = +\infty$. A sucessão limitada x_n admitiria uma subsucessão x_{α_n} com limite $\lambda \in B$ (dado B ser fechado) ; seria então $lim\, x_{\alpha_n} = \lambda \;\Rightarrow\; lim\, f(x_{\alpha_n}) = f(\lambda)$, devido à continuidade de $f(x)$ em λ ; mas esta conclusão não seria compatível com a já anteriormente obtida quanto a $lim\, f(x_n)$, pois,

$$lim\, f(x_n) = +\infty \;\Rightarrow\; lim\, f(x_{\alpha_n}) = +\infty \ .$$

Em conclusão $f(B)$ é um conjunto majorado.

Com um argumento semelhante prova-se que $f(B)$ tem de ser um conjunto minorado, ficando assim provado que $f(B)$ é um conjunto limitado.

b) Vejamos agora que $f(B)$ é um conjunto fechado. Seja $y_n = f(x_n)$ uma qualquer sucessão de reais do conjunto $f(B)$ com limite real y . Se se provar que $y \in f(B)$, tal será suficiente para garantir que $f(B)$ é fechado. A sucessão limitada x_n admite uma subsucessão x_{α_n} com limite $\lambda \in B$ (dado B ser fechado) ; e então $lim\, f(x_{\alpha_n}) = f(\lambda)$, devido à continuidade de $f(x)$ em λ ; tem-se então que $y = f(\lambda)$, ou seja, $y \in f(B)$, como se pretendia provar.

Corolário 1 : *Sendo $f(x)$ contínua no conjunto limitado e fechado B , admite nesse conjunto mínimo e máximo absolutos*

Demonstração: Resulta de imediato do teorema. O conjunto $f(B)$ é limitado e fechado, admitindo por isso máximo e mínimo sendo estes o máximo e mínimo absolutos da função no conjunto B .

Corolário 2 : *Sendo* $f(x)$ *contínua no intervalo limitado fechado* $I = [\,a\,,\,b\,]$ *, então* $f(\,I\,)$ *é igualmente um intervalo limitado e fechado*

Demonstração: Resulta imediatamente do teorema em conjugação com o corolário 2 de teorema 9 .

10. Continuidade da função inversa

Antes de passarmos ao teorema seguinte, notemos que dada uma função $f(x)$ com contínua e injectiva no seu domínio A, a respectiva função inversa f^{-1} pode não ser contínua no seu domínio $f(A)$. É relativamente simples apresentar exemplos de funções nessas condições, o que será feito nos exercícios propostos no final do capítulo.

No entanto,

Teorema 11 : *Sendo* $f(x)$ *contínua e injectiva em certo conjunto limitado e fechado A, então a respectiva inversa* f^{-1} *é também contínua em* $f(A)$

Demonstração : Tome-se um qualquer $b \in f(A)$, ou seja, $b = f(a)$ com certo $a \in A$. Seja $y_n = f(x_n)$ uma sucessão (qualquer) de elementos de $f(A)$ tal que $lim\, y_n = b$. Vejamos que $lim\ f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b)$, o que provará ser f^{-1} contínua em $b \in f(A)$ e , portanto, dada a arbitrariedade desse b , ficará provada a continuidade de f^{-1} em $f(A)$.

Como os termos x_n pertencem a A e este conjunto é limitado e fechado , a sucessão x_n é limitada e vamos ver que tem limite coincidente com a . Para tal provaremos que essa sucessão não admite nenhum sublimite distinto de a . Considere-se então uma qualquer subsucessão x_{α_n} que tenha limite, seja ele λ ; tem-se que $\lambda \in A$ (por ser A fechado) e, devido à continuidade de $f(x)$, sai $lim\ f(\,x_{\alpha_n}\,) = f(\lambda) = f(a)$ sendo que a segunda igualdade é assegurada por ser $f(\,x_{\alpha_n}\,)$ subsucessão de $y_n = f(x_n)$ que por hipótese tende para $b = f(a)$. Dada a injectividade de $f(x)$, a igualdade $f(\lambda) = f(a)$ implica $\lambda = a$, o que permite concluir que todos os sublimites da sucessão x_n coincidem com a , donde resulta ser $lim\, x_n = a$. Mas , dado que $x_n = f^{-1}(y_n)$ e $a = f^{-1}(b)$, tal significa ser $lim\ f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b)$, como e pretendia provar.

Teorema 12 : *Sendo* $f(x)$ *monótona no intervalo I e sendo* $f(\,I\,)$ *um intervalo, então* $f(x)$ *é contínua em I*

Demonstração : Supondo que f é crescente em I, admita-se que em certo ponto $c \in I$ a função f não é contínua. Dado tratar-se de uma função crescente, o teorema 6 garante a existência dos limites laterais $f(c + 0)$ e $f(c - 0)$, podendo eventualmente só ter significado um dos dois, o que acontece quando c seja uma das extremidades do intervalo I .

Então, ou $f(c + 0) \neq f(c)$ ou $f(c - 0) \neq f(c)$, podendo verificar-se ambas as situações ao mesmo tempo. Sendo $f(c + 0) \neq f(c)$, só pode ter-se $f(c) < f(c + 0)$ devido ao facto de f ser crescente; e como para $x \in I$, se tem $f(x) \leq f(c)$ se for $x < c$ e $f(x) \geq f(c + 0)$

se for $x > c$, nenhum valor $x' \in I$ fará $f(x')$ situar-se entre $f(c)$ e $f(c + 0)$, logo $f(I)$ não poderá ser um intervalo. Do mesmo modo, no caso de ser $f(c - 0) \neq f(c)$, conclui-se que nenhum valor $x' \in I$ fará $f(x')$ situar-se entre $f(c - 0)$ e $f(c)$, logo $f(I)$ também não poderá ser um intervalo.

Se f for decrescente, a demonstração é semelhante. Aliás este caso pode reduzir-se ao caso anterior, usando a função $g(x) = -f(x)$ que será então crescente.

Corolário : *Sendo $f(x)$ estritamente monótona e contínua no intervalo I, então a função inversa f^{-1} de f em I é também contínua em $f(I)$*

Demonstração : Nas condições do enunciado, f^{-1} é estritamente monótona em $f(I)$ e este conjunto é um intervalo (corolário 2 do teorema 9). Como a função f^{-1} transforma o intervalo $f(I)$ no intervalo I , o teorema anterior garante que esta função é necessaria-mente contínua em $f(I)$, como se queria provar. Note-se que a hipótese da monotonia estrita garante a injectividade de $f(x)$ no intervalo I e portanto a existência de inversa.

11 . Continuidade uniforme. Teorema de Heine – Cantor

Relembremos o conceito de função contínua num conjunto. Dada a função $f(x)$ com domínio em A ,

$$f \text{ é contínua em } B \Leftrightarrow \forall\, a \in B \,,\ \forall\, \delta > 0 \,,\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(a, \delta) :$$
$$: x \in V_\varepsilon(a) \cap B \Rightarrow f(x) \in V_\delta[f(a)] \,,$$

ou, em termos de distâncias,

$$f \text{ é contínua em } B \Leftrightarrow \forall\, a \in B \,,\ \forall\, \delta > 0 \,,\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(a, \delta) :$$
$$: d(x, a) = |x - a| < \varepsilon \text{ e } x \in B \Rightarrow d[f(x), f(a)] = |f(x) - f(a)| < \delta .$$

Refira-se que na definição precedente, o valor ε indicado depende em geral do $\delta > 0$ fixado e do ponto $a \in B$ que se está a considerar. Caso seja possível determinar, para cada $\delta > 0$, um $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, só dependente de δ, que assegure para todos os pontos $a \in B$,

$$d(x, a) < \varepsilon(\delta) \text{ e } x \in B \Rightarrow d[f(x), f(a)] < \delta ,$$

a função diz-se *uniformemente contínua* no conjunto B, ou seja,

$$f \text{ é uniformemente contínua em } B \Leftrightarrow \forall\, \delta > 0 \,,\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\delta) :$$
$$: d(x, a) < \varepsilon \text{ e } x, a \in B \Rightarrow d[f(x), f(a)] < \delta ,$$

ou ainda, na forma equivalente mais usual ,

$$f \text{ é uniformemente contínua em } B \Leftrightarrow \forall\, \delta > 0 \,,\ \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\delta) :$$

$$: \ d(x', x'') < \varepsilon \ \text{ e } \ x', x'' \in B \Rightarrow d\,[f(x')\,,\ f(x'')] < \delta\,.$$

Vejamos dois exemplos, um em que a função em causa é uniformemente contínua num conjunto e outro em que não é :

1) Com $f(x) = x^2$ e $B = [\ 0\ ,\ 1\ ]$, tem-se,

$$|\,x_1^2 - x_2^2\,| = |\,x_1 - x_2\,|\,.\,|\,x_1 + x_2\,| \ \le\ 2\,.\,|\,x_1 - x_2\,|\ ,$$

quaisquer que sejam $x_1\,,\,x_2 \in [\ 0\ ,\ 1\ ]$. Então, fixando $\delta > 0$, basta tomar o valor $\varepsilon = \delta/2$, para que,

$$|\,x_1 - x_2\,| < \varepsilon = \delta/2 \ \Rightarrow\ |\,x_1^2 - x_2^2\,| \ \le\ 2\,.\,|\,x_1 - x_2\,| \ < 2\,.\,(\delta/2) = \ \delta\ ,$$

ou seja, a função f é uniformemente contínua em $B = [\ 0\ ,\ 1\ ]$.

2) Com $g(x) = 1/x$ e $B =]\ 0\ ,\ 1\ ]$, tem-se evidentemente g contínua em B , mas vamos ver que a função não é uniformemente contínua nesse conjunto. Com efeito, tomando por exemplo $\delta = 1$, vejamos que com qualquer $\varepsilon > 0$ sempre se encontram particulares $x', x'' \in]\ 0\ ,\ 1\ ]$ tais que $|\,x' - x''\,| < \varepsilon$ e para os quais $|\ f(x') - f(x'')\ | \ge \delta = 1$; toman-do $p \ge 1$ tal que $\varepsilon/p \in]\ 0\ ,\ 1\ ]$, com, $x' = \varepsilon/2p$ e $x'' = \varepsilon/p$, tem-se,

$$x',\, x'' \in]\ 0\ ,\ 1\ ] \quad \text{e} \quad |\,x' - x''\,| = |\ \varepsilon/2p\ -\ \varepsilon/p\,| < \varepsilon/2p < \varepsilon$$

e, no entanto, $|\ f(x') - f(x'')\ | = p/\varepsilon \ \ge 1 = \delta$, porque $0 < \varepsilon/p \le 1$.

O teorema seguinte é frequentemente útil para estudar a eventual continuidade uniforme de uma função num conjunto.

Teorema 13 : *A função $f(x)$ com domínio em A é uniformemente contínua no conjunto $B \subseteq A$ se e só se quaisquer que sejam as sucessões x'_n e x''_n de pontos do conjunto B, tais que $lim\ d\,(x'_n\,,\,x''_n) = 0$, se tem também $lim\ d\,[\,f(x'_n)\,,\ f(x''_n)] = 0$*

<u>Demonstração</u> : Suponha-se $f(x)$ uniformemente contínua em B e sejam x'_n e x''_n duas sucessões de pontos do conjunto B tais que $lim\ d\,(x'_n\,,\,x''_n) = 0$. Dado um qualquer $\delta > 0$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que,

$$d\,(x', x'') < \varepsilon \ \text{ e } \ x', x'' \in B \Rightarrow d\,[f(x')\,,\ f(x'')] < \delta\,;$$

como, de certa ordem em diante, $d\,(x'_n\,,\,x''_n) < \varepsilon$, tem-se , a partir da mesma ordem, $d\,[\,f(x'_n)\,,\ f(x''_n)] < \delta$, o que prova ser $lim\ \ d\,[\,f(x'_n)\,,\ f(x''_n)]\ = 0$.

Inversamente, admita-se que para quaisquer $x'_n\,,\,x''_n \in B$ tais que,

$$lim\ d\,(x'_n\,,\,x''_n) = 0\ ,$$

se tem também $lim\ d\ [\ f\ (x'_n\ )\ ,\ \ f\ (x''_n\ )]\ \ = 0$. Vejamos que então, a função $f\ (x)$ é uniformemente contínua no conjunto.

Se, por absurdo, tal não acontecesse, haveria um δ_0 relativamente ao qual, para qualquer $\varepsilon > 0$, existiriam pontos $x'_\varepsilon\ , x''_\varepsilon \in B$ tais que,

$$d\,(x'_\varepsilon\ , x''_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d\,[\,f\,(x'_\varepsilon)\ ,\ f\,(x''_\varepsilon)]\ \geq \delta_0\,;$$

considerando então, $\varepsilon_n = 1/n$, existiriam pontos $x'_n\ , x''_n \in B$ tais que,

$$d\,(x'_n\ , x''_n) < 1/n \quad \text{e} \quad d\,[\,f\,(x'_n)\ ,\ f\,(x''_n)]\ \geq \delta_0\ ,$$

sendo então $lim\ d\ (x'_n\ , x''_n)\ = 0$, sem que em correspondência se tivesse,

$$lim\ d\,[\,f\,(x'_n)\ ,\ f\,(x''_n)]\ = 0\ ,$$

o que seria contrário à hipótese admitida inicialmente. Logo, $f\ (x)$ deverá ser uniformemente contínua em B como se queria provar.

Embora, em geral, uma função possa ser contínua num conjunto sem que aí seja uniformemente contínua, vamos estudar o teorema de Heine-Cantor onde se garante que uma função contínua num conjunto limitado e fechado é sempre uniformemente contínua nesse conjunto.

Teorema 14 : *Sendo $f\ (x)$ contínua no conjunto limitado e fechado B, então $f\ (x)$ é uniformemente contínua em B* (**Heine-Cantor**)

<u>Demonstração</u> : Seja $f\ (x)$ contínua no conjunto limitado e fechado B e considere-se por absurdo que não é uniformemente contínua nesse conjunto . Existiria então certo $\delta > 0$ tal que, qualquer que fosse $\varepsilon > 0$, sempre haveria pontos $x'_\varepsilon, x''_\varepsilon \in B$ de modo a ser,

$$d\,(x'_\varepsilon, x''_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d\,[\,f\,(x'_\varepsilon)\ ,f\,(x''_\varepsilon)]\ \geq \delta$$

Em particular com $\varepsilon_n = 1/n$, existiriam pontos $x'_n\ , x''_n \in B$ tais que,

$$d\,(x'_n\ , x''_n) < 1/n \quad \text{e} \quad d\,[\,f\,(x'_n)\ ,\ f\,(x''_n)]\ \geq \delta\ .$$

Como a sucessão x'_n é limitada existe uma sua subsucessão x'_{α_n} com limite $a \in B$ e claro que ,

$$lim\ x'_{\alpha_n} = a\ \ \wedge\ d\,(\,x'_{\alpha_n}\,,\ x''_{\alpha_n}\,)\ =\ |\ x'_{\alpha_n} - x''_{\alpha_n}\,| < 1/\alpha_n \quad \Rightarrow\ lim\ x''_{\alpha_n} =\ a$$

Por outro lado , $lim f\,(\,x'_{\alpha_n}\,)\ =\ lim f\,(\,x''_{\alpha_n}\,) = f\,(a)$ devido à continuidade de $f\,(x)$ em $a \in B$, daqui resultando $lim\ \ d\,[\,f\,(\,x'_{\alpha_n}\,)\ ,\ f\,(\,x''_{\alpha_n}\,)]\ =\ lim\ \ |f\,(\,x'_{\alpha_n}\,) - f\,(\,x''_{\alpha_n}\,)]\ =\ 0$, em contradição com a condição $d\,[\,f\,(x'_n)\ ,\ f\,(x''_n)]\ \geq \delta$ que deveria ser verificada para todo o natural $n \in \mathbf{N}$.

12. Exercícios

1 - Diga se são ou não monótonas, se são ou não limitadas e determine os respectivos ínfimos e supremos e, quando possível, máximos e mínimos (em todo o domínio e na intersecção do domínio com o intervalo $[\ 0\ , +\infty\ [$) para as seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$; **b)** $f(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$; **c)** $f(x) = x^n$ (n inteiro positivo) ;

d) $f(x) = \sqrt{x^2} - 1$; **e)** $f(x) = \dfrac{|sen\ x|}{|x|}$; **f)** $f(x) = tg\, x$ ($-\pi/2 < x \leq \pi/4$) ;

g) $f(x) = x - I(x)$, em que $I(x)$ é o maior inteiro que é menor ou igual a x .

2 - Uma função $f(x)$ com domínio em **R** diz-se :

1) *Par* se e só se $f(x) = f(-x)$, qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$;
2) *Ímpar* se e só se $f(x) = -f(-x)$, qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$.

Posto isto demonstre que:

a) Uma função $f(x)$ definida , monótona e não constante em **R** não pode ser par ;

b) Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções reais de variável real com domínio em **R**, se $g(x)$ for par , então a função composta $f[g(x)]$ é igualmente par ;

c) Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções reais de variável real com domínio em **R**, se $g(x)$ for ímpar e $f(x)$ for par, então a função composta $f[g(x)]$ é par ;

d) Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções reais de variável real com domínio em **R**, se $g(x)$ for ímpar e $f(x)$ for ímpar, então a função composta $f[g(x)]$ é também ímpar.

3 - Uma função $f(x)$ com domínio A diz-se *algébrica* se e só se for raiz de certa equação em y,

$$P_0(x) \cdot y^n + P_1(x) \cdot y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x) \cdot y + P_n(x) = 0 \,,$$

em que os $P_i(x)$ são polinómios em x . Tal significa que para qualquer $x = a$ pertencente ao domínio A da função $f(x)$ se tem, com $b = f(a)$,

$$P_0(a) \cdot b^n + P_1(a) \cdot b^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(a) \cdot b + P_n(a) = 0 \,.$$

Posto isto prove que é algébrica a função : $y = f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$.

4 - Determine, quando existam, as inversas das seguintes funções de **R** em **R** :

a) $f(x) = [\, x - I\,(x)]^{\,2} + I^{\,2}(x)$; **b)** $f(x) = \begin{cases} x & , \ -3 \leq x < 1 \\ x - I(x) & , \quad 1 \leq x < 2 \\ x + 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$;

c) $f(x\,) = \begin{cases} x + 1 & , \ x \ racional \\ x - 1 & , \ x \ irracional \end{cases}$.

5 - Considere uma função $f(x)$ crescente e ímpar (ver definição no exercício 2) com domínio em **R** . Prove que:

a) $x < 0 \ \Rightarrow \ f\,(x) \leq 0$; **b)** $x > 0 \ \Rightarrow \ f\,(x) \geq 0$; **c)** $f\,(x) \neq 0 \ \Rightarrow \ -1 \leq \dfrac{f\,(0)}{f\,(x)} \leq 1$.

6 - Inverta a função, $y = f\,(x) = \dfrac{\sqrt{x} \ + \ 1}{\sqrt{x \ - \ 1}}$ no respectivo domínio e indique o domínio da função inversa.

7 - Seja $f\,(x)$ uma função com domínio $]\, 0 \,, +\infty\, [$ e tal que $f(x^{\alpha}) = \alpha \,.\, f(x)$, qualquer que seja $\alpha \in$ **R** .

a) Prove que $f\,(1) = 0$;

b) Se para certo $a > 0$ tal que $a \neq 1$, $f\,(a) = 1$, prove que $f\,(x) = log_a\, x$.

8 - Para cada uma das funções seguintes determine os respectivos domínios, mostre que são injectivas e indique as respectivas inversas e seus domínios e contradomínios:

a) $y = arc\ sen\ \dfrac{x}{x+1}$; **b)** $y = arc\ cos\left(\sqrt{x} \ - \ 3\right)$; **c)** $y = 2 \,.\, arc\ tg\ \dfrac{1}{1+x}$;

d) $y = e^{1/x}$; **e)** $y = log\ (1 + x^{1/2})$.

9* - Seja $y = f\,(x)$ uma função injectiva com domínio de existência A. Sendo $y = f\,(x)$ algébrica (ver exercício 3 para a definição) , mostre que a função inversa $x \ = \ f^{\,-1}(y)$ é igualmente algébrica.

10 - Mostre que a função $f(x) = x - I(x)$ com domínio em **R** é invertível em certa vizinhança de qualquer ponto do domínio mas não é globalmente invertível.

11 - Utilize a definição de limite segundo Heine para mostrar que as seguintes funções tendem para a unidade quando $x \to 1$:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \ x > 1 \\ 2 & , \ x = 1 \\ x^2 + 3x - 3 & , \ x < 1 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} sen\,(x-1) + 1 & , \ x > 1 \\ 2x - x^2 & , \ x \leq 1 \end{cases}$.

12 - Utilize a definição de limite segundo Cauchy para mostrar que:

a) $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$; **b)** $\lim\limits_{x \to a} (2x + 1) = (2a + 1)$; **c)** $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} = 0$; **e)** $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x - 1} = +\infty$.

13 - Para as funções dadas calcule os limites laterais nos pontos indicados:

a) $f(x) = I(x)$, em $x = 0$; **b)** $f(x) = \dfrac{sen\,x}{|x|}$, em $x = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \ racional \\ 0 & , \ x \ irracional \end{cases}$, em $x = 2$;

d) $f(x) = \begin{cases} x & , \ x \geq 1 \\ x - 1 & , \ x < 1 \end{cases}$, em $x = 1$; **e)** $f(x) = arc\,tg\, \dfrac{2}{I(x)}$, em $x = 2$;

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 1}}{x^2 - 3x + 2}$, em $x = 2$; **g)** $f(x) = \mathrm{I}\left(\log \dfrac{e}{\sqrt{x}} \right)$, em $x = e$.

14 - Determine a de forma que a função,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax + 1}{(a^2 + 1)x - 1} & , \ x < 1 \ \wedge \ x \neq 1/(a^2 + 1) \\ (a + 1)x & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

tenha limite em $x = 1$.

15 - Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$; **c)** $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$; **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{x^3 - 4x^2} \cdot \log(1 + 1/x)$; **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$;

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x - 1}$; **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \log(1 + x)}{2x^2}$; **i)** $\lim\limits_{x \to +\infty} x \, . \log\left[1 + 1/(x-1)\right]$;

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$; **k)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \, . \, \mathrm{sen}\, x}$; **l)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arc\,sen}\, x}{x}$;

m) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arc\,sen}\, x^2}{2x^2}$; **n)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\mathrm{arc\,sen}\,(x - 2)}{1 - \sqrt{3 - x}}$;

o) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{\mathrm{arc\,tg}\left[(x-1)/(x+1)\right]} - 1}{\log\left(1 + \dfrac{x - 1}{x + 1}\right)^2}$; **p)** $\lim\limits_{x \to 0^+} (\mathrm{sen}\, x)^{1/\log x}$;

q) $\lim\limits_{x \to 1+0} (x - 1)^{\mathrm{sen}\,(x-1)}$; **r)** $\lim\limits_{x \to 0^+} (1/x)^x$.

16 - Estude a continuidade das funções dadas nos pontos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^k \, . \, \mathrm{sen}\,(1/x) & , \ x \neq 0 \\ k & , \ x = 0 \end{cases}$, em $x = 0$;

b) $f(x) = \begin{cases} x^k \, . \, \mathrm{sen}\,(1/x) & , \ x \neq 0 \\ k - 1 & , \ x = 0 \end{cases}$, em $x = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}\,(1/x) & , \ x < 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ x - 1 & , \ x > 0 \end{cases}$, em $x = 0$;

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \ x \ \text{racional} \\ x^2 & , \ x \ \text{irracional} \end{cases}$, em $x = 1$ e em $x = a \neq 1$.

17 - Determine m e n de forma que,

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{-1} \, . \, log\left[1 + n.(x-1)\right] & , \; x > 1 \\ 2m + 2n & , \; x = 1 \\ (m+n).x^2 + x & , \; x < 1 \end{cases} \; ,$$

seja contínua em $x = 1$.

18 - Dada a função,

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} \, . \, tg\,(nx) & , \; x \neq 0 \\ n^2 & , \; x = 0 \end{cases} \; ,$$

determine n de forma que seja contínua na origem .

19 - Demonstre que sendo $f(x)$ contínua em certo ponto a do seu domínio, então $f(x)$ é limitada em certo conjunto $A_\theta = \,]\, a - \theta \, , \, a + \theta \,[\; \cap A$, em que A designa o domínio da função.

20 - Determine os pontos de descontinuidade da função $f(x) = I(x) + \sqrt{x}$.

21 - Determine os pontos de descontinuidade das seguintes funções reais de variável real,

a) $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , \; x < 0 \\ 1 & , \; x = 0 \\ x.(1-x)^{-1} & , \; x > 0 \;\; e \;\; x \neq 1 \end{cases}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1).(x+2)}$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$; **d)** $f(x) = \begin{cases} x^2/2 + 2 & , \; x \text{ não inteiro} \\ |1+x| + |1-x| & , \; x \text{ inteiro} \end{cases}$.

22 - Dada a função,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , \; x < 0 \\ x^2 & , \; 0 \leq x < 1 \\ 1 + x & , \; x \geq 1 \end{cases} \; ,$$

estude a respectiva continuidade em cada um dos seguintes conjuntos:

a) R ; **b)** $[\, 0 \, , 1 \, [$; **c)** $[\, 0 \, , 1 \,]$; **d)** $[\, 0 \, , 1/2 \, [\; \cup \; \{1\}$;

e) $\{(1+1/n) \; : \; n = 1 \, , 2 \, , 3 \, , ... \} \; \cup \; \{1\}$.

23 - Estude a continuidade das seguintes funções nos conjuntos indicados:

a) $f(x) = log\ \dfrac{x+1}{x-1}$, em $A =]\,1\,, +\infty\,[$;

b) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , x > 1 \\ 3 & , x = 1 \\ 2x + 2 & , x < 1 \end{cases}$, em $B = [\,1\,, 4\,]$;

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x > 1 \\ 0 & , x = 1 \\ 1 - x & , x < 1 \end{cases}$, em $B =]\,2\,, +\infty\,[\, \cup \{1\}$ e $C = [\,1\,, +\infty\,[$;

24 - Seja $f(x)$ uma função continua no intervalo limitado e fechado $[\,a\,, b]$ e admita que $f(a)\,.\,f(b) < 0$. Designe por X o subconjunto dos valores x pertencentes ao intervalo para os quais $f(x) = 0$.

a) Mostre que X é limitado e não vazio ;

b) Mostre que o supremo e ínfimo de X pertencem a este conjunto, concluindo assim que X tem máximo e mínimo.

25 - Apresente um exemplo de uma função $f(x)$ contínua num intervalo aberto I , mas tal que $f(\,I\,)$ seja um intervalo fechado.

26 - Seja $f(x)$ contínua no seu domínio A . Sendo A limitado e fechado, prove que também é limitado e fechado o conjunto das soluções em A da equação $f(x) = \alpha$.

27 - Mostre através de um exemplo conveniente que uma função real de variável real pode ser contínua num intervalo semi-fechado $]\,a\,, b]$ sem que aí admita pelo menos um extremo.

28 - Mostre que se a função real de variável real $f(x)$ é contínua no intervalo I e se $f(\,I\,)$ é finito, então $f(x)$ é constante em I .

29 - Mostre que a equação $sen^3\, x + cos^3\, x = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[\,0\,, \pi\,]$.

30 - Prove que todo o polinómio real de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

31 - Prove que a equação,

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1}\, x + a_{2n} = 0 \ ,$$

tal que $a_0\, a_{2n} < 0$, tem pelo menos uma raiz positiva e outra negativa.

32 - Utilize o teorema de Bolzano-Cauchy para provar que a função real de variável real,

$$f(x) = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} \qquad (a_1 < a_2 < \ldots < a_n) \ ,$$

se anula para certos valores $x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1}$ tais que,

$$a_1 < x_1 < a_2 < x_2 < a_3 < \ \ldots \ < a_{n-1} < x_{n-1} < a_n \ .$$

33 - Prove que uma função real de variável real definida e contínua num intervalo é injectiva se e só se for estritamente monótona.

34 - Seja $f(x)$ uma função real de variável real contínua no intervalo $I = [\, a , b]$ e admita que $f(I) \subseteq I$. Utilizando como função auxiliar $g(x) = f(x) - x$, prove que existe um $c \in I$ tal que $f(c) = c$.

35 - Considere uma função $f(x)$, real de variável real, contínua em **R** e admita que existem finitos os limites,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \quad .$$

a) Prove que $f(x)$ é limitada em **R** ;

b) Supondo que o produto dos dois limites referidos é negativo, determine o máximo absoluto da função,

$$g(x) = \frac{1}{1 + f^2(x)} \ .$$

36* - Seja $f(x)$ uma função real de variável real contínua e positiva no intervalo $[\, a , b]$ e admita-se que $f(a) < f(b)$. Mostre que existem pontos c e d entre a e b tais que,

$$f(a) \, . \, f(b) = f^2(c) \quad \text{e} \quad f(a) + f(b) = 2 f(d) \ .$$

Poderá ser $d = c$? Justifique.

37* - Sendo $f(x)$ contínua no intervalo $I \subseteq$ **R** e invertível na vizinhança de cada ponto $a \in I$, prove que $f(x)$ é invertível em I .

38 - Dada a função $f(x) = x^2$, considere o conjunto : $B =]\, -1 , 0\,] \cup [\, 1 , +\infty [$.

a) Mostre que f é injectiva e contínua em B ;

b) Mostre que f_B^{-1} (inversa da restrição de f a B) não é contínua no conjunto $f(B)$.

39 - Estude a continuidade uniforme das seguintes funções nos conjuntos indicados:

a) $f(x) = tang\ x$, em $I =]\,0\,,\pi/2\,[$;

b) $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = sen\,x$, todas em $]\,a\,,b[$, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$;

c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1/x^2$, ambas em $]\,0\,,b[$, com $0 < b \leq +\infty$;

d) $f(x) = sen\,(1/x)$, em $]\,a\,,1[$, com $0 \leq a < 1$.

RESPOSTAS:

1 - NO DOMÍNIO :

Monótonas : a) , c) (com n ímpar) , f) ;
Limitadas: a) , b) , e) , g) ;
Ínfimos : a) -1 , b) 0 , c) 0 (n par) e $-\infty$ (n ímpar) , d) -1 , e) 0 , f) $-\infty$, g) 0 ;
Supremos : a) 1 , b) 2 , c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) 1 , f) 1 , g) 1 ;
Mínimos : a) -1 , c) 0 (n par) , d) -1 , e) 0 , g) 0 ;
Máximos : a) 1 , b) 2 , f) 1 .

NA INTERSECÇÃO DO DOMÍNIO COM $[0\,,+\infty\,[$:

Monótonas : a) , b) , c) , d) , f) ;
Limitadas: a) , b) , e) , f) , g) ;
Ínfimos : a) 1 , b) 0 , c) 0 , d) -1 , e) 0 , f) 0 , g) 0 ;
Supremos : a) 1 , b) 2 , c) $+\infty$, d) $+\infty$, e) 1 , f) 1 , g) 1 ;
Mínimos : a) 1 , c) 0 , d) -1 , e) 0 , f) 0 , g) 0 ;
Máximos : a) 1 , b) 2 , f) 1 .

4 - a) Não existe ; **b)** Não existe ; **c)** $f^{-1}(y) = \begin{cases} y-1 & ,\ y\ racional \\ y+1 & ,\ y\ irracional \end{cases}$.

6 - $x = \left(\dfrac{1+y^2}{y^2-1}\right)^2$, com domínio $B =]\,1\,,+\infty\,[$.

8 - a) Domínio da função : $[\,-1/2\,,+\infty\,[$; função inversa : $x = \dfrac{sen\,y}{1-sen\,y}$, com domínio $[\,-\pi/2\,,\pi/2\,[$ e contradomínio $[\,-1/2\,,+\infty\,[$;

b) Domínio da função : $[\,4\,,16]$; função inversa : $x = (3+cos\,y)^2$, com domínio $[\,0\,,\pi\,]$ e contradomínio $[\,4\,,16]$;

c) Domínio da função : $]\,-\infty\,,-1\,[\ \cup\ ]\,-1\,,+\infty\,[$; função inversa : $x = \dfrac{1}{tg\,(y/2)} - 1$, com domínio $]\,-\pi\,,0\,[\ \cup\ ]\,0\,,\pi\,[$ e contradomínio $]\,-\infty\,,-1\,[\ \cup\ ]\,-1\,,+\infty\,[$;

d) Domínio da função : $]\,-\infty\,,0\,[\ \cup\ ]\,0\,,+\infty\,[$; função inversa : $x = \dfrac{1}{log\ y}$, com domínio $]\,0\,,1\,[\ \cup\ ]\,1\,,+\infty\,[$ e contradomínio $]\,-\infty\,,0\,[\ \cup\ ]\,0\,,+\infty\,[$;

e) Domínio da função : $[\,0\,,+\infty\,[$; função inversa : $x = (e^y - 1)^2$, com domínio $[\,0\,,+\infty\,[$ e contradomínio $[\,0\,,+\infty\,[$.

13 - **a)** Limite lateral esquerdo = -1 , limite lateral direito = 0 ;
b) Limite lateral esquerdo = -1 , limite lateral direito = 1 ;
c) Não existem ;
d) Limite lateral esquerdo = 0 , limite lateral direito = 1 ;
e) Limite lateral esquerdo = $arc\ tg\ 2$, limite lateral direito = $\pi/4$;
f) Limite lateral esquerdo = $-\infty$, limite lateral direito = $+\infty$;
g) Limite lateral esquerdo = 0 , limite lateral direito = 0 .

14 - $a = \pm 1$.

15 - **a)** $n\, a^{n-1}$; **b)** $+\infty$; **c)** $-\infty$; **d)** Não existe ; **e)** 0 ; **f)** 1/2 ; **g)** 1 ; **h)** 1/4 ; **i)** 1 ; **j)** 1/2 ; **k)** 1/2 ; **l)** 1 ; m) 1/2 ; **n)** 2 ; **o)** 1/2 ; **p)** e ; **q)** 1 ; **r)** 1 .

16 - **a)** Não é contínua ; **b)** Contínua se $k = 1$, não contínua se $k \neq 1$; **c)** Não é contínua ; **d)** Contínua em $x = 1$, não contínua em $x = a \neq 1$.

17 - $m = -1$ e $n = 2$.

18 - $n = 0$ ou $n = 1$.

20 - $n = 1, 2, 3, \ldots$.

21 - **a)** 0 e 1 ; **b)** -2 e 1 ; **c)** 0 ; **d)** Todos os a inteiros com excepção de $a = 0$ e $a = \pm 2$.

22 - **a)** Não é contínua ; **b)** É contínua ; **c)** Não é contínua ; **d)** É contínua ; **e)** É contínua .

23 - **a)** Contínua ; **b)** Contínua ; **c)** Contínua em B , não contínua em C .

25 - Por exemplo, para a função $y = sen\, x$, com $I =]\, 0 , 2\pi\, [$ tem-se $f(I) = [\, -1 , 1\,]$.

27 - Por exemplo, $f(x) = \dfrac{1}{x-a} \cdot sen\, \dfrac{1}{x-a}$.

35 - b) 1 .

36 - Não pode ser $d = c$ porque daí resultaria $f(a) = f(b)$.

39 - **a)** Não é uniformemente contínua ; **b)** As funções $f(x) = x$ e $h(x) = sen\ x$ são uniformemente contínuas em qualquer intervalo $]\, a , b\, [$ mesmo que não seja limitado , enquanto que a função $g(x) = x^2$ é uniformemente contínua em qualquer intervalo $]\, a , b\, [$ desde que seja limitado ; **c)** A função $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua em $]\, 0 , b\, [$ para todos os valores de b (mesmo com $b = +\infty$) , enquanto que a função $g(x) = 1/x^2$ não é uniformemente contínua em nenhum intervalo $]\, 0 , b\, [$; **d)** A função $f(x) = sen\,(1/x)$ é uniformemente contínua em $]\, a , 1[$ com $0 < a < 1$ mas não quando seja $a = 0$.

CAPITULO VII

CÁLCULO DIFERENCIAL EM R

1. Definição de derivada de uma função num ponto

Considere-se uma função $f(x)$ com domínio A , seja a um ponto interior do domínio, ou seja, um ponto para o qual exista uma vizinhança $V_\varepsilon(a) =]\, a - \varepsilon \,,\; a + \varepsilon\, [$ contida em A. Para $x \in]\, a - \varepsilon \,,\; a + \varepsilon\, [$ e $x \neq a$, considere-se a *razão incremental*,

$$R(a\,, x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ;$$

se existir $\lim\limits_{x \to a} R(a, x)$, finito , $+\infty$ ou $-\infty$, o valor desse limite designa-se por *derivada* de $f(x)$ em $x = a$ e representa-se por $f'(a)$. Como qualquer valor $x \in]\, a - \varepsilon \,,\; a + \varepsilon\, [$ tal que $x \neq a$ se pode escrever na forma $x = a + h$ com $0 < |\, h \,| < \varepsilon$ e como $x = a + h$ tende para a se e só se h tende para 0 , pode igualmente escrever-se ,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad ,$$

caso este limite exista (finito , $+\infty$ ou $-\infty$) .

Por exemplo:

1) Com $f(x) = e^x$, tem-se para $a \in \mathbf{R}$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a\,(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^a\,(1 + \xi_1 h - 1)}{h} = e^a \;;$$

2) Com $f(x) = log\, x$, tem-se para $a > 0$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{log\,(a + h) - log\, a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{log\, a + log\,(1 + h/a) - log\, a}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\eta \,.\, (h/a)}{h} = \frac{1}{a} \quad ;$$

3) Com $f(x) = sen\, x$, tem-se para $a \in \mathbf{R}$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{sen\,(a + h) - sen\, a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\, sen\,(h/2)\, cos\,(a + h/2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{sen\,(h/2)}{h/2} \cdot cos\,(a + h/2) = cos\, a \;\; ;$$

4) Com $f(x) = x^{1/3}$, tem-se no ponto $a = 0$,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{1/3} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \, .$$

Os limites laterais da razão $R(a\,,x)$ ou $R(a\,,a+h)$ quando x tenda para a ou h para 0 , ou seja,

$$f_d'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad f_e'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \; ,$$

designam-se por *derivadas laterais*, respectivamente, *derivada lateral direita* e *derivada lateral esquerda* da função $f\,(x)$ em $x = a$. Claro que existindo $f'\,(a)$ existem e são iguais as derivadas laterais ; inversamente, existindo e sendo iguais ambas as derivadas laterais, existe a derivada da função no ponto e o seu valor coincide com o valor comum daquelas.

Portanto, caso seja $f_d'(a) \neq f_e'(a)$, não existe $f'\,(a)$, como acontece por exemplo no caso seguinte : para a função $f(x) = |\, x \,|$ em $a = 0$, tem-se,

$$f_d'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{e} \quad f_e'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \text{-}1 \; .$$

Note-se que as derivadas laterais podem ser definidas mesmo que o ponto a não seja interior do domínio A . No caso da derivada lateral direita basta que, com certo $\varepsilon > 0$, o intervalo $[\; a\,,\, a + \varepsilon\, [$ esteja contido no domínio da função; no caso da derivada lateral esquerda basta que, com certo $\varepsilon > 0$, o intervalo $]\; a - \varepsilon \;,\, a]$ esteja contido no domínio da função . Assim, por exemplo, com $f\,(x) = (1 - x^2)^{3/2}$, função cujo domínio é o intervalo $[\,\text{-}1\,,\,1]$, tem-se :

$$f_d'(\text{-}1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left[1 - (-1 + h)^2\right]^{3/2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left[2h - h^2\right]^{3/2}}{h} = 0$$

$$f_e'(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[1 - (1 + h)^2\right]^{3/2}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[-2h - h^2\right]^{3/2}}{h} = 0 \; .$$

~

A existência de derivada finita num ponto implica a continuidade da função nesse ponto, nos termos do teorema seguinte:

Teorema 1 : *Seja $f(x)$ um função com domínio em A e seja $a \in A$. Têm-se os seguintes resultados :*

a) *Se a é interior do domínio A e existe finita $f'(a)$, então $f(x)$ é contínua em $x = a$;*

b) *Se existe um intervalo $[\ a\ ,\ a+\varepsilon\ [\ \subseteq A$ e existe finita $f_d'(a)$, então $f(x)$ é contínua à direita em $x = a$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$;*

c) *Se existe um intervalo $]\ a - \varepsilon\ ,\ a\ ]\ \subseteq A$ e existe finita $f_e'(a)$, então $f(x)$ é contínua à esquerda em $x = a$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$*

<u>Demonstração</u> : **a)** Existe por hipótese um intervalo $]\ a - \varepsilon\ ,\ a+\varepsilon\ [\ \subseteq A$, logo para $x \in\ ]\ a - \varepsilon\ ,\ a+\varepsilon\ [$ e $x \neq a$,

$$R(a\,,x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f(x) = f(a) + (x - a)\,.\,R(a\,,x)\,,$$

igualdade que dá de imediato,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) + 0\,.\,f'(a) = f(a)\,,$$

assim se provando a continuidade de $f(x)$ em a.

b) Existe por hipótese um intervalo $[a\ ,\ a+\varepsilon\ [\ \subseteq A$, logo para $x \in [\ a\ ,\ a+\varepsilon\ [$ e $x \neq a$,

$$R(a\,,x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f(x) = f(a) + (x - a)\,.\,R(a\,,x)\,,$$

igualdade que dá de imediato,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) + 0\,.\,f_d'(a) = f(a)\,,$$

assim se provando a continuidade à de $f(x)$ à direita em $x = a$.

c) Como em **b)**, mas considerando $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

O teorema anterior admite o seguinte corolário:

Corolário : *Seja $f(x)$ uma função com domínio em A e I um intervalo de extremidades a e b, contido naquele conjunto. Têm-se os seguintes resultados:*

a) *Se $I = [\, a\, ,\, b\,]$, existindo finitas, $f'(x)$ para $x \in\,]\, a\, ,\, b\,[$, $f_d'(a)$ e $f_e'(b)$, então $f(x)$ é contínua em I ;*

b) *Se $I = [\, a\, ,\, b\,[$, existindo finitas $f'(x)$ para $x \in\,]\, a\, ,\, b\,[$ e $f_d'(a)$, então $f(x)$ é contínua em I ;*

c) *Se $I =]\, a\, ,\, b\,]$, existindo finitas $f'(x)$ para $x \in\,]\, a\, ,\, b\,[$ e $f_e'(b)$, então $f(x)$ é contínua em I ;*

d) *Se $I =]\, a\, ,\, b\,[$, existindo finita, $f'(x)$ para $x \in\,]\, a\, ,\, b\,[$, então $f(x)$ é contínua em I*

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do teorema 1, tendo em conta que a continuidade de uma função num intervalo equivale à continuidade da função nos pontos interiores desse intervalo e à continuidade lateral (direita ou esquerda) nas respectivas extremidades (caso pertençam ao intervalo).

A propósito do teorema anterior, convém observar que a continuidade de uma função num ponto se pode verificar sem que nesse ponto exista derivada, como acontece por exemplo com a função,

$$f(x) = \begin{cases} x\ sen\ (1/x) & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases} ,$$

que é contínua em $x = 0$ e, no entanto,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h\ sen\ (1/h)}{h} = \lim_{x \to 0}\ sen\ (1/h) ,$$

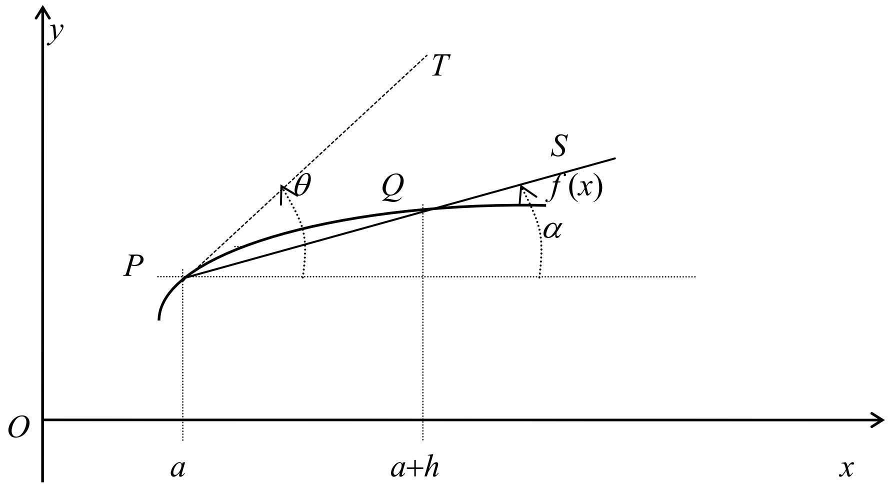
não existe.

2. <u>Interpretação geométrica do conceito de derivada</u>

Considere-se a função $f(x)$ com domínio A , tome-se $a \in A$ para o qual exista certo intervalo $[\, a\, ,\, a + \varepsilon\, [\ \subseteq A$. Vamos interpretar geometricamente, caso exista,

$$f_d'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} ,$$

baseando a nossa análise na figura seguinte,



a qual nos mostra que para cada $h \in \left]\, 0\,,\, \varepsilon \,\right[$ a razão incremental,

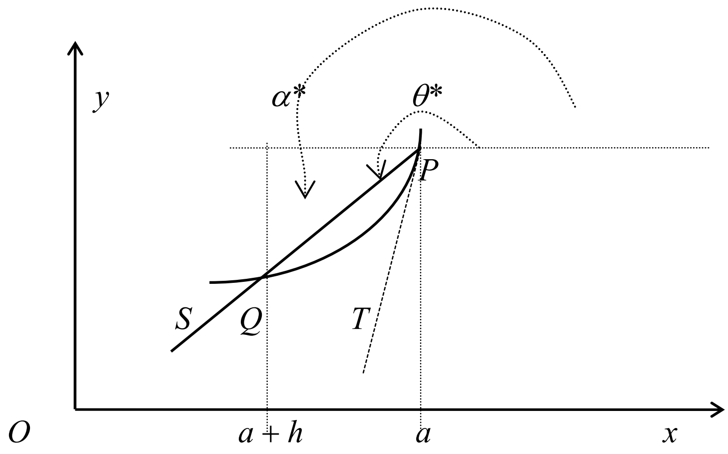
$$R(a\,,\, a+h) \;=\; \frac{f(a+h) \,-\, f(a)}{h}\;,$$

corresponde à tangente trigonométrica do ângulo α que a semirecta secante $\overrightarrow{PQ}$ faz com a semirecta $\overrightarrow{Ox}$: dependendo da posição do arco PQ tem-se $\alpha \in \left[\, 0\,,\, \pi/2 \,\right[$ no caso de ser $f(a+h) \;\geq\; f(a)$ e $\alpha \in \left]\, -\pi/2\,,\, 0 \,\right[$ no caso de ser $f(a+h) < f(a)$; ou seja, para cada $h \in \left]\, 0\,,\, \varepsilon \,\right[$, $\alpha = arc\ tg\, R(a\,,\, a+h)$. Quando se faz $h \to 0^+$, se existir (finito, $+\infty$ ou $-\infty$) o limite da razão incremental, tem-se:

$$\theta \;=\; \lim_{h\to 0^+} \;\alpha \;=\; \lim_{h\to 0^+} \;\; arc\ tg\, R(a\,,\, a+h) = \begin{cases} arc\ tg\ f_d^{'}(a) & , \;\; f_d^{'}(a)\ finito \\ \pi/2 & , \;\; f_d^{'} = +\infty \\ -\pi/2 & , \;\; f_d^{'} = -\infty \end{cases} \qquad ,$$

e o ponto Q desloca-se ao longo da curva para o posição do ponto P, levando a secante $\overrightarrow{PQ}$ a tender para a semirecta limite $\overrightarrow{PT}$, a qual faz um ângulo $\theta \in \left[\, -\pi/2\,,\, \pi/2 \,\right]$ com o eixo $\overrightarrow{Ox}$ e se designa por semitangente direita da curva no ponto P de abcissa $x = a$.

Vejamos agora uma interpretação geométrica semelhante para o caso da derivada à esquerda, no pressuposto de existir um certo intervalo $\left]\, a - \varepsilon\,,\, a \,\right]$ contido no domínio A da função. Vamos basear-nos na figura seguinte:



a qual nos mostra que para cada $h \in \left]-\varepsilon, 0\right[$ a razão incremental,

$$R(a\,,\,a+h) = \frac{f(a+h)\,-\,f(a)}{h}\ ,$$

corresponde à tangente trigonométrica do ângulo α^* que a semirecta secante $\overrightarrow{PQ}$ faz com a semirecta $\overrightarrow{Ox}$: dependendo da posição do arco PQ tem-se $\alpha^* \in \left]\pi/2\,,\,\pi\right]$ no caso de ser $f(a+h) \geq f(a)$ e $\alpha^* \in \left]\pi\,,\,3\pi/2\right[$ no caso de ser $f(a+h) < f(a)$; ou seja, para $h \in \left]-\varepsilon, 0\right[$, $\alpha^* = arc\ tg\, R(a\,,\,a+h) + \pi$. Quando se faz $h \to 0^-$, se existir (finito, $+\infty$ ou $-\infty$) o limite da razão incremental, tem-se:

$$\theta^* = \lim_{h\to 0^-} \alpha^* = \lim_{h\to 0^-} arc\ tg\, R(a\,,\,a+h) + \pi = \begin{cases} arctg\, f_e'(a) + \pi & ,\ f_e'(a)\, finito \\ 3\pi/2 & ,\ f_e' = +\infty \\ \pi/2 & ,\ f_e' = -\infty \end{cases}\ ,$$

e o ponto Q desloca-se ao longo da curva para o posição do ponto P, levando a secante $\overrightarrow{PQ}$ a tender para a semirecta limite $\overrightarrow{PT}$, a qual faz um ângulo $\theta^* \in \left[\pi/2\,,\,3\pi/2\right]$ com o eixo $\overrightarrow{Ox}$ e se designa por semitangente esquerda da curva no ponto P de abcissa $x = a$.

No caso de a ser ponto interior do domínio da função , existindo nesse ponto ambas as derivadas laterais são possíveis os seguintes casos:

<u>1º Caso</u> : $f_d'(a) = f_e'(a) = f'(a)$. Neste caso as ângulos θ e θ^* correspondentes, respectivamente, à semitangente à direita e à semitangente à esquerda, diferem sempre por π . Com efeito,

a) $f_d'(a) = f_e'(a) = f'(a)$ finito $\Rightarrow \theta = arc\ tg\, f'(a) \wedge \theta^* = arc\ tg\, f'(a) + \pi \Rightarrow$

$$\Rightarrow \theta^* = \theta + \pi\ ;$$

b) $f_d'(a) = f_e'(a) = f'(a) = +\infty \Rightarrow \theta = \pi/2 \wedge \theta^* = 3\pi/2 \Rightarrow \theta^* = \theta + \pi$;

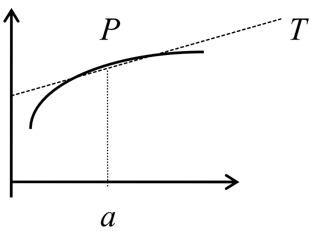
c) $f_d'(a) = f_e'(a) = f'(a) = -\infty \Rightarrow \theta = -\pi/2 \wedge \theta^* = \pi/2 \Rightarrow \theta^* = \theta + \pi$.

Neste caso, portanto, as duas semitangentes prolongam-se uma à outra formando a tangente à curva no ponto P de coordenadas $x = a$ e $y = f(a)$; e então :

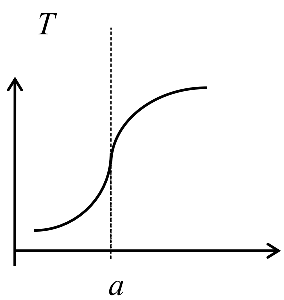
1) Se a derivada $f'(a)$ for finita , o declive da tangente à curva no ponto será $m = f'(a) = tg\ \theta = tg\ \theta^*$ e como tal tangente passa pelo ponto de coordenadas $x = a$ e $y = f(a)$, a sua equação será $y = f'(a) \,.\, x + [\, f(a) - a \,.\, f'(a)]$;

2) Se $f'(a)$ for $+\infty$ ou $-\infty$ a equação da tangente será $x = a$ (recta vertical).

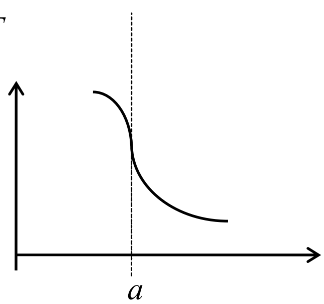
As figuras seguintes são elucidativas quanto às situações que podem verificar-se neste caso:



$f'(a)$ finita

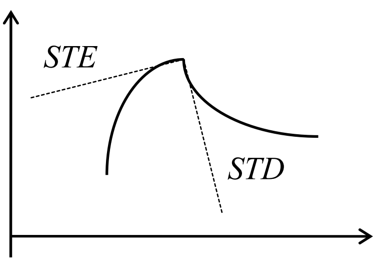


$f'(a) = +\infty$

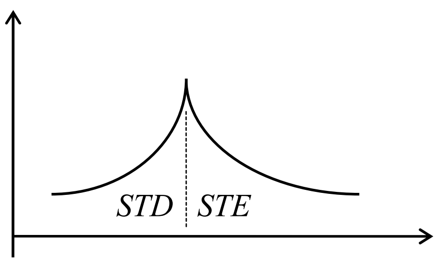


$f'(a) = -\infty$

<u>2º Caso</u> : Se $f_d'(a) \neq f_e'(a)$, os ângulos θ e θ^* não diferem por π e então as semi-tangentes não se prolongam uma à outra. Não existe pois tangente à curva no ponto de abcissa a . Duas situações possíveis são apresentadas nas figuras seguintes:



$f_d'(a)$ e $f_e'(a)$ finitas e distintas : as duas semi-tangentes não se prolongam para formar a tangente.



$f_d'(a) = -\infty$ e $f_e'(a) = +\infty$: as duas semitangentes sobrepõem-se, não se prolongando uma à outra para formar tangente.

3. Regras de derivação

3.1 - Introdução. Regras da soma, do produto e do quociente

Na prática, o cálculo das derivadas raramente de faz recorrendo directamente à definição, mas antes mediante a aplicação de um conjunto de regras de derivação.

Supostamente o leitor já conhece as regras elementares de cálculo da derivada da soma, produto e quociente de funções que a seguir se enunciam e cuja demonstração se faz com facilidade recorrendo à definição de derivada. As regras são enunciadas relativamente às derivadas num ponto a interior dos domínios das funções envolvidas mas valem igualmente, com as mesmas demonstrações, para as derivadas laterais (neste caso basta exigir que existam finitas as correspondentes derivadas laterais das funções somadas, multiplicadas ou divididas, o que pressupõe que estas funções sejam definidas em certo intervalo $[a\,,\, a+\varepsilon\,[$ no caso da derivada lateral direita , ou $]\, a-\varepsilon\,,\, a]$ no caso da derivada lateral esquerda) :

a) Derivada de uma soma : Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ admita-se que existem finitas as derivadas $f'(a)$ e $g'(a)$ no ponto a interior dos respectivos domínios. Então a é também ponto interior do domínio de $f(x)+g(x)$ e $[f(x)+g(x)]'_{x=a} = f'(a)+g'(a)$.

b) Derivada de um produto: Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ admita-se que existem finitas as derivadas $f'(a)$ e $g'(a)$ no ponto a interior dos respectivos domínios. Então a é igual-mente um ponto interior do domínio de $f(x)\,.\,g(x)$ e

$$[f(x)\,.\,g(x)]'_{x=a} = f'(a)\,.\,g(a) + f(a)\,.\,g'(a)\,;$$

em particular, se $f(x)=k$ (constante) , $[\,k\,.\,g(x)]'_{x=a} = k\,.\,g'(a)$, porque $f'(a)=0$.

c) Derivada de um quociente : Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$ admita-se que existem finitas as derivadas $f'(a)$ e $g'(a) \neq 0$ e que $g(a) \neq 0$ no ponto a interior dos respectivos domínios. Então a é igualmente um ponto interior do domínio de $f(x)/g(x)$ e tem-se,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=a} = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)}\,.$$

Limitamo-nos a apresentar a demonstração da regra do quociente, deixando-se as restantes ao cuidado do leitor.

Repare-se em primeiro lugar que, dentro das hipóteses do enunciado da regra do quociente, o ponto a é igualmente um ponto interior do domínio de $f(x)/g(x)$. Com efeito, por ser a ponto interior dos domínios de $f(x)$ e $g(x)$, existe uma $V_\varepsilon(a)$ onde ambas as funções são definidas e, por ser $g(a) \neq 0$ e $g(x)$ contínua em $x=a$ (por ter derivada finita nesse ponto), o valor $\varepsilon > 0$ pode ser tomado suficientemente pequeno de forma que em $V_\varepsilon(a)$ se tenha $g(x) \neq 0$; então, para $x \in V_\varepsilon(a)$ está definido o quociente $f(x)/g(x)$, ou seja , a é ponto interior do domínio da função quociente.

Vejamos agora como se obtém a regra de derivação da função quociente:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'_{x=a} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(a+h)}{g(a+h)} - \dfrac{f(a)}{g(a)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)\,.\,g(a) - f(a)\,.\,g(a+h)}{h\,.\,g(a+h)\,.\,g(a)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)\,.\,g(a) - f(a)\,.\,g(a) + f(a)\,.\,g(a) - f(a)\,.\,g(a+h)}{h\,.\,g(a+h)\,.\,g(a)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(a+h) - f(a)\right].\,g(a) - f(a)\,.\left[g(a+h) - g(a)\right]}{h\,.\,g(a+h)\,.\,g(a)} =$$

$$= \frac{f'(a)\,.\,g(a) - f(a)\,.\,g'(a)}{g^2(a)} \quad ,$$

como se queria provar.

As regras da soma e produto generalizam-se sem dificuldade a mais de duas parcelas ou factores :

$$\left[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)\right]'_{x=a} = f_1'(a) + f_2'(a) + \cdots + f_m'(a)$$

$$\left[f_1(x)\, f_2(x) \cdots f_m(x)\right]'_{x=a} = f_1'(a) f_2(a) \cdots f_m(a) + f_1(a) f_2'(a) \cdots f_m(a) + \cdots +$$

$$+ f_1(a) f_2(a) \cdots f_m'(a) \ .$$

A partir da regra do produto assim generalizada, obtém-se sem dificuldade a regra referente à potência de expoente natural:

$$\left[f^m(x)\right]'_{x=a} = f'(a) f(a) \cdots f(a) + f(a) f'(a) \cdots f(a) + \cdots + f(a) f(a) \cdots f'(a) =$$

$$= m.f^{m-1}(a)\,.\,f'(a) \ ,$$

no pressuposto de existir finita $f'(a)$ no ponto a interior do domínio de $f(x)$; a regra vale igualmente, com a mesma demonstração, para as derivadas laterais (neste caso basta exigir que exista finita a correspondente derivada lateral de $f(x)$, o que pressupõe que esta função seja definida em certo intervalo $[a\, , a+\varepsilon[$ no caso da derivada lateral direita , ou $]\, a -\varepsilon\, , a]$ no caso da derivada lateral esquerda) .

As regras precedentes, juntamente com o facto de ser,

$$f(x) = k \text{ (constante) } \Rightarrow f'(x) = 0 \ , \ \forall\, x \in \mathbf{R}$$

$$f(x) = x \ \Rightarrow f'(x) = 1 \ , \ \forall\, x \in \mathbf{R} \, ,$$

são suficientes para achar as derivadas em qualquer ponto do domínio para as funções definidas por meio de polinómios ou fracções de termos polinomiais. Assim, por exemplo,

$$f(x) = 2\,x^2 + 3\,x + 1 \ \Rightarrow f'(x) = 4\,x + 3 \ , \ \forall\, x \in \mathbf{R} \, ,$$

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 1}{3x^2 - x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(8x+3)(3x^2 - x + 1) - (4x^2 + 3x - 1)(6x - 1)}{(3x^2 - x + 1)^2} \ ,$$

(para qualquer $x \in \mathbf{R}$ que não anule o denominador).

3.2 - Regra de derivação de uma função composta

O teorema seguinte contém uma regra de grande utilidade prática na determinação da derivada de uma função que resulte da composição de duas funções.

Teorema 2 : *Seja $y = g(x)$ uma função com domínio em A e $z = f(y)$ uma outra função com domínio em B e considere-se a função composta $z = f\,[\,g(x)]$ com domínio no conjunto $A_0 = \{\, x \ : \ x \in A \ \wedge \ g(x) \in B \,\}$. Sendo a um ponto interior de A_0 e $b = g(a)$ um ponto interior de B, admita-se que existem finitas $g'(a)$ e $f'(b)$; então, tem-se,*

$$\{f[g(x)]\}'_{x=a} = f'(b) \,.\, g'(a) = f'[\,g(a)] \,.\, g'(a)$$

Demonstração : Repare-se em primeiro lugar que, o ponto a , interior do domínio A_0 da função composta é também ponto interior do domínio A da função $g(x)$.

Note-se a seguir que, por ser b um ponto interior de B, existe um número $r > 0$ tal que $|\theta| < r \ \Rightarrow \ b + \theta \in B$; a partir desse $r > 0$ determine-se um número $s > 0$ que garanta,

$$|\,h\,| < s \ \Rightarrow a + h \in A_0 \ \wedge \ |\,g(a+h) - g(a)\,| < r \ ,$$

o que é possível por ser a ponto interior dos domínios A_0 de $f[g(x)]$ e A de $g(x)$ e por esta função ser contínua em $x = a$ (a continuidade é garantida pelo facto de a função em causa ter derivada finita em $x = a$) .

Tem-se então, por definição de derivada,

$$\{f[g(x)]\}'_{x=a} = \lim_{h\to 0} \frac{f[g(a+h)] - f[g(a)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f[g(a)+k\,] - f[g(a)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(b+k) - f(b)}{h} \quad ,$$

em que $k = g(a+h) - g(a)$. Fazendo agora,

$$\alpha(h) = \begin{cases} g'(a) - \dfrac{g(a+h) - g(a)}{h} & , \ h \neq 0 \ \wedge \ |h| < s \\ 0 & , \ h = 0 \end{cases}$$

$$\beta(\theta) = \begin{cases} f'(b) - \dfrac{f(b+\theta) - f(b)}{\theta} & , \ \theta \neq 0 \ \wedge \ |\theta| < r \\ 0 & , \ \theta = 0 \end{cases} \quad ,$$

obtém-se :

$$k = g(a+h) - g(a) = h \,.\, g'(a) \ - \ h \,.\, \alpha(h) \ \ , \text{ com } \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

$$f(b+\theta) - f(b) = \theta \,.\, f'(b) \ - \ \theta \,.\, \beta(\theta) \ \ , \text{ com } \lim_{\theta\to 0} \beta(\theta) = 0 \quad ,$$

igualdades válidas para $|\,h\,| <$ s e $|\,\theta\,| < r$, respectivamente (válidas mesmo no caso de ser $h = \theta = 0$) . Dada a forma como foram escolhidos os números r e s , tem-se $|\,h\,| < s \ \Rightarrow \ |\,k\,| = |\,g(a+h) - g(a)\,| < r$ e podemos portanto tomar $\theta = k$ na segunda das igualdades obtidas e substituir em seguida k pelo seu valor dado pela primeira igualdade, assim se obtendo (sempre para $|\,h| < s$) :

$$f(b+k) - f(b) = k \,.\, f'(b) \ - \ k \,.\, \beta(k) =$$

$$= [\, h \,.\, g'(a) \ - \ h \,.\, \alpha(h)] \,.\, f'(b) \ - \ [\, h \,.\, g'(a) \ - \ h \,.\, \alpha(h)] \,.\, \beta(k) \,,$$

donde resulta, para $|\,h| < s$,

$$\frac{f(b+k) - f(b)}{h} = [\, g'(a) \ - \alpha(h)] \,.\, f'(b) \ - \ [\, g'(a) \ - \alpha(h)] \,.\, \beta(k) \,,$$

ou ainda, retomando a expressão antes obtida para a derivada da função composta no ponto $x = a$,

$$\left\{ f[g(x)] \right\}'_{x=a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(b+k) - f(b)}{h} = g'(a) \,.\, f'(b) \ - \ g'(a) . \lim_{h\to 0} \beta(k) \ ,$$

com $k = g(a+h) - g(a)$. Mas $\lim_{h\to 0} \beta(k) = \lim_{h\to 0} \beta\, [g(a+h) - g(a)] = 0$, porque $\beta(\theta)$ é função contínua e nula em $\theta = 0$ e $k = g(a+h) - g(a)$ é contínua e nula em $h = 0$; então, obtém-se finalmente,

$$\{f[g(x)]\}'_{x=a} = g'(a)\,.\,f'(b),$$

que é precisamente a igualdade que se pretendia provar.

<u>Observações</u> :

1) A argumentação precedente é válida relativamente às derivadas laterais da função composta no ponto $x = a$. Neste caso deverão verificar-se as seguintes hipóteses: **a)** A função composta, e portanto também *g (x)*, é definida em certo intervalo $[\, a \,,\, a + \varepsilon\, [$ no caso da derivada lateral direita , ou $]\, a - \varepsilon \,,\, a]$ no caso da derivada lateral esquerda ; **b)** existe finita a correspondente derivada lateral direita de $g\,(x)$ em a ; **c)** o ponto $b = g\,(a)$ é ponto interior do domínio B da função $f\,(y)$ e nele esta função admite derivada finita.

Com estas suposições, a argumentação pode ser desenvolvida nos mesmos termos, apenas com a condição adicional de ser $h > 0$ (derivada lateral direita) ou $h < 0$ (derivada lateral esquerda) e considerando sempre limites quando $h \to 0^+$ ou $h \to 0^-$, chegando-se assim às igualdades,

$$\{f[g(x)]\}'_{d\,;x=a} = f'(b)\,.\,g'_d(a) = f'[\,g(a)]\,.\,g'_d(a)$$

$$\{f[g(x)]\}'_{e\,;x=a} = f'(b)\,.\,g'_e(a) = f'[\,g(a)]\,.\,g'_e(a)$$

2) Tanto em relação ao teorema como relativamente ao que ficou dito na observação **1)** é possível dispensar a hipótese de $b = g(a)$ ser ponto interior do domínio B de $f\,(y)$, quando este conjunto seja um intervalo. Nessas condições:

a) Se para certo ponto a interior do domínio A_0 da função composta onde existe finita $g'(a)$ se tem por exemplo $b = g\,(a) = Mín\, B$ (em que B é supostamente um intervalo) , a demonstração do teorema pode refazer-se considerando na definição de $\beta(\theta)$ a derivada $f'_d(b)$ e restringindo o campo de variação de θ pela condição $0 \leq \theta < r$; para $|\, h \,| < s$ teremos então,

$$0 \leq k = g\,(a + h) - g\,(a) < r\,,$$

ou seja, pode tomar-se $\theta = k$ na igualdade em que intervém $\beta\,(\theta\,)$ e a partir daqui a sequência da argumentação conduz à fórmula de cálculo do teorema:

$$\{f[g(x)]\}'_{x=a} = f'_d(b)\,.\,g'(a)\ ;$$

b) Do mesmo modo, se for $b = g\,(a) = Máx\, B$ (com B intervalo), chega-se à fórmula:

$$\left\{ f[g(x)] \right\}'_{x=a} = f'_e(b) \,.\, g'(a) \;;$$

c) Os resultados **a)** e **b)** da presente observação subsistem para as derivadas laterais da função composta, exactamente nos mesmos termos que foram descritos na observação **1)** , ou seja , considerando nas respectivas fórmulas $g'_d(a)$ e $g'_e(a)$ em vez de $g'(a)$.

3.3 - Regra de derivação da potência em geral

Já vimos que a regra de derivação de uma função potência de expoente natural se pode obter com facilidade como corolário da regra de derivação de um produto de funções. Trata-se agora de estudar o caso geral de função potência de expoente α qualquer .

Vejamos em primeiro lugar o caso da função $f(x) = x^\alpha$, com $\alpha \neq 0$ qualquer (natural ou não). O domínio desta função poderá ser, consoante o valor do expoente α :

a) O intervalo $]\,-\infty\,, +\infty\,[$ se α for um racional positivo representável por uma fracção irredutível , $\alpha = n/m$ com m ímpar ;

b) O intervalo $[\,0\,, +\infty\,[$ se α for um racional positivo representável por uma fracção irredutível , $\alpha = n/m$ com m par ;

c) A união de intervalos $]\,-\infty\,, 0\,[\; \cup \;]\,0\,, +\infty\,[$ se α for um racional negativo tal que $-\alpha$ seja representável por uma fracção irredutível , $-\alpha = n/m$ com m ímpar ;

d) O intervalo $]\,0\,, +\infty\,[$ se α for um racional negativo tal que $-\alpha$ seja representável por uma fracção irredutível , $-\alpha = n/m$ com m par ;

e) O intervalo $]\,0\,, +\infty\,[$ se α for um irracional (positivo ou negativo) .

Dado um qualquer $a \neq 0$ que pertença ao domínio da função $f(x) = x^\alpha$, só pode tratar-se de um ponto interior desse domínio e tem-se em qualquer caso,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^\alpha - a^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^\alpha \,.\, \left[(1 + h/a)^\alpha - 1\right]}{h} = \lim_{h\to 0} a^\alpha \cdot \frac{\alpha\zeta}{a} =$$

$$= \alpha\, a^{\alpha - 1} \,.$$

Para $a = 0$, há três possibilidades:

1) Na hipótese ***a)*** quanto ao domínio da função, tem-se que 0 é ponto interior desse domínio e então,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^\alpha}{h} = \lim_{h\to 0} h^{\alpha - 1} = \begin{cases} 0 & , \ \alpha > 1 \\ 1 & , \ \alpha = 1 \\ N\,/\,existe\ finito & , \ 0 < \alpha < 1 \end{cases} \;;$$

2) Na hipótese **b)** quanto ao domínio da função, tem-se que 0 não é ponto interior desse domínio , mas a função é definida à direita de 0 e portanto,

$$f_d'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^{\alpha}}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{\alpha - 1} = \begin{cases} 0 & , \ \alpha > 1 \\ N\,/\,existe\ finito & , \ 0 < \alpha < 1 \end{cases} ;$$

3) Nas restantes hipóteses quanto ao domínio da função, tem-se que 0 não é ponto do domínio da função potência e portanto não faz sentido definir derivada nesse ponto.

Vejamos agora o caso mais geral da função $f(x) = [\,u(x)]^{\alpha}$, função que pode considerar-se o resultado da composição de $z = y^{\alpha}$ com $y = u(x)$.

Considere-se um ponto a interior do domínio da função $f(x)$, o qual será igualmente um ponto interior do domínio de $u(x)$, e admita-se que $b = u(a) \neq 0$. Claro que o ponto $b \neq 0$ será então um ponto do domínio da função $z = y^{\alpha}$ e só poderá ser um ponto interior desse domínio (recorde-se o que antes se disse sobre o domínio da função potência nas várias hipóteses quanto ao valor do expoente). Se admitirmos que $u'(a)$ existe finita, a regra de derivação de uma função composta permite então concluir que,

$$f'(a) = \alpha\, b^{\alpha\text{-}1} \,.\, u'(a) = \alpha\, [\,u(a)]^{\alpha\text{-}1} \,.\, u'(a) \ .$$

Fórmula análoga se tem para as derivadas laterais, ou seja a fórmula anterior é válida substituindo $f'(a)$ e $u'(a)$ pelas respectivas derivadas laterais à direita ou à esquerda e não sendo necessário nesse caso que a seja um ponto interior do domínio de $f(x)$: se se estiver a considerar a derivada lateral direita bastará que a função $f(x)$ - e portanto também $u(x)$ - esteja definida em certo intervalo $[a\,,\, a + \varepsilon\,[$; se se estiver a considerar a derivada lateral esquerda bastará que a função $f(x)$ - e portanto também $u(x)$ - esteja definida em certo intervalo $]\,a - \varepsilon\,,\, a]$.

Considere-se agora um ponto a interior do domínio da função $f(x)$, o qual será igualmente um ponto interior do domínio de $u(x)$, e admita-se que $b = u(a) = 0$. Esta situação só pode ocorrer quando o expoente α for racional positivo pois, nos outros casos, o ponto $b = 0$ não pertence ao domínio da função $z = y^{\alpha}$ não sendo portanto a composição possível no ponto $x = a$. Admita-se a existência de $u'(a)$ finita e vejamos cada uma das situações possíveis:

a) Se α for racional positivo representável pela fracção irredutível $\alpha = n/m$, com m ímpar, $b = u(a) = 0$ será ponto interior do domínio de $z = y^{\alpha}$ e só podemos aplicar a regra de derivação de uma função composta (teorema 2) quando seja $\alpha \geq 1$ (porque para $0 < \alpha < 1$, $z = y^{\alpha}$ não admite derivada finita em $b = 0$), obtendo-se então:

$$f'(a) = \begin{cases} 0 & , \ \alpha > 1 \\ u'(a) & , \ \alpha = 1 \end{cases} \quad .$$

b) Se α for racional positivo representável pela fracção irredutível $\alpha = n/m$, com m par, $b = u(a) = 0$ será a extremidade inicial do intervalo domínio de $z = y^{\alpha}$ e o que ficou dito na alínea a) da observação 2) do teorema 2 permite concluir que $f'(a) = 0$ quando seja $\alpha > 1$.

Resultados análogos aos que acabam de referir-se para o caso $b = u(a) = 0$ têm-se para as derivadas laterais, bastando para tal substituir $f'(a)$ e $u'(a)$ pelas respectivas derivadas laterais à direita ou à esquerda e não sendo necessário nesse caso que a seja um ponto interior do domínio de $f(x)$: se se estiver a considerar a derivada lateral direita bastará que a função $f(x)$ - e portanto também $u(x)$ - esteja definida em certo intervalo $[a , a + \varepsilon[$; se se estiver a considerar a derivada lateral esquerda bastará que a função $f(x)$ - e portanto também $u(x)$ - esteja definida em certo intervalo $]a- \varepsilon , a]$.

Como caso particular da função potência tem-se $f(x) = \sqrt[m]{u(x)}$, com $m = 2 , 3 , \ldots$. Sendo a ponto interior do domínio de $f(x)$ - e portanto também ponto interior do domínio de $u(x)$ - e admitindo que $b = u(a) \neq 0$ e que existe finita a derivada $u'(a)$, tem-se:

$$f'(a) = \{[\, u(x)]^{1/m}\}'_{x=a} = \frac{1}{m} \cdot [u(a)]^{(1/m)-1} \,.\, u'(a) = \frac{u'(a)}{m \,.\, \sqrt[m]{[u(a)]^{m-1}}} \ ,$$

sendo também este resultado válido para as derivadas laterais, bastando substituir $f'(a)$ e $u'(a)$ pelas respectivas derivadas laterais à direita ou à esquerda.

3.4 - Regras de derivação das funções exponencial, logarítmica e exponencial potência

Nos exemplos apresentados a titulo ilustrativo da definição de derivada, viu-se que:

$$f(x) = e^x \ \wedge \ a \in \mathbf{R} \Rightarrow f'(a) = e^a \quad ; \quad g(x) = log\, x \ \wedge \ a > 0 \Rightarrow f'(a) = 1/a \ .$$

Utilizando a regra de derivação de uma função composta podemos agora abordar o caso geral das funções $f(x) = e^{u(x)}$ e $g(x) = log\, u(x)$. No caso da exponencial tem-se,

$$f'(a) = e^{u(a)} \,.\, u'(a) \ ,$$

no pressuposto de a ser um ponto interior do domínio de $f(x)$ - e portanto também ponto interior do domínio de $u(x)$ - e de existir finita a derivada $u'(a)$; como habitualmente, o resultado vale para as derivadas laterais. No caso da função logarítmica, tem-se,

$$g'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)} \ ,$$

no pressuposto de a ser um ponto interior do domínio de $g(x)$ - e portanto também ponto interior do domínio de $u(x)$ - e de existir finita a derivada $u'(a)$; como habitualmente, o resultado vale para as derivadas laterais.

Um caso particular interessante da função logarítmica é o da função $g(x) = log \mid x \mid$, cujo domínio é a união de intervalos $]-\infty, 0[\; \cup \;]0, +\infty[$: para $a > 0$, tem-se $g'(a) = 1/a$, pois $g(x) = log \mid x \mid = log\, x$ no intervalo $]0, +\infty[$; para $a < 0$, tem-se $g'(a) = (-1)/(-a) = 1/a$, pois $g(x) = log \mid x \mid = log\,(-x)$ no intervalo $]-\infty, 0[$; portanto, quer seja $a > 0$ quer seja $a < 0$, tem-se sempre $g'(a) = 1/a$.

Mais geralmente , como a função $f(x) = log \mid u(x) \mid$ resulta da composição de $z = log \mid y \mid$ com $y = u(x)$, tem-se ,

$$f'(a) = \frac{u'(a)}{u(a)} \; ,$$

no pressuposto de a ser um ponto interior do domínio de $f(x)$ - e portanto também ponto interior do domínio de $u(x)$ - e de existir finita a derivada $u'(a)$; como habitualmente, o resultado vale para as derivadas laterais.

A derivada da função $f(x) = b^{u(x)}$, com $b > 0$ pode agora obter-se com facilidade, notando que,

$$f(x) = b^{u(x)} = e^{u(x)\,.\,log\, b} \; ,$$

e aplicando a regra de derivação da exponencial de base natural : sendo a um ponto interior do domínio de $f(x)$ - e portanto também ponto interior do domínio de $u(x)$ - e existindo finita a derivada $u'(a)$, tem-se,

$$f'(a) = e^{u(a)\,.\,log\, b} \,.\, u'(a) \,.\, log\, b = b^{u(a)} \,.\, u'(a) \,.\, log\, b \; ;$$

como habitualmente, o resultado vale para as derivadas laterais.

Refira-se finalmente o caso da derivada da função exponencial potência.

Sendo $f(x) = [\, u(x) \,]^{v(x)}$, com $u(x) > 0$ no domínio de $f(x)$, tem-se,

$$f(x) = [\, u(x) \,]^{v(x)} = e^{v(x)\,.\,log\, u(x)} \; ,$$

e aplicando a regra de derivação da exponencial de base natural , resulta,

$$f'(a) = e^{v(a)\,.\,\log u(a)}\ .\ [\ v(x)\ .\ \log u(x)]'_{x=a}\ =$$

$$=\ e^{v(a)\,.\,\log u(a)}\ .\ [\ v'(a)\ .\ \log u(a) +\ v(a)\ .\ u'(a)/u(a)] =$$

$$= [\ u(a)]^{\ v(a)}\ .\ [\ v'(a)\ .\ \log u(a) +\ v(a)\ .\ u'(a)/u(a)]\ =$$

$$= [\ u(a)]^{\ v(a)}\ .\ v'(a)\ .\ \log u(a) +\ [\ u(a)]^{\ v(a)}\ .\ v(a)\ .\ u'(a)/u(a)\ =$$

$$= [\ u(a)]^{\ v(a)}\ .\ v'(a)\ .\ \log u(a)\ +\ v(a)\ .\ [\ u(a)]^{\ v(a)\,-1}\ .\ u'(a)\ ,$$

no pressuposto de a ser um ponto interior do domínio de $f(x)$ - e portanto também ponto interior dos domínios de $u(x)$ e $v(x)$ - e de existir finita a derivada $u'(a)$; como habitual-mente, o resultado vale para as derivadas laterais. A regra a que se chegou pode memorizar-se facilmente notando que ela corresponde à soma de duas parcelas, em que a primeira se obtém derivando a função como se fosse uma exponencial (de base fixa) e a segunda derivando a função como se fosse uma potência (de expoente fixo)

3.5 - Regras de derivação das funções trigonométricas

Nos exemplos apresentados a propósito da definição de derivada viu-se que:

$$f(x) = sen\ x\ \wedge\ a \in \mathbf{R}\ \Rightarrow f'(a) = cos\ a\ .$$

Dado que $cos\ x\ = sen\ (\pi/2\ -\ x)$, a aplicação da regra de derivação de uma função com-posta permite concluir que,

$$g(x) = cos\ x\ \wedge\ a \in \mathbf{R}\ \Rightarrow\ g'(a) = [\ cos\ (\pi/2\ -\ a)]\ .\ (-1) = -\ sen\ a\ ,$$

uma vez que $g(x) = cos\ x$ se pode considerar como a função composta de $z\ = sen\ y$ com $y\ = \pi/2\ -\ x$.

Por outro lado, por ser $tg\ x = sen\ x\ /\ cos\ x$, tem-se para $a \neq (2\ k + 1\ )\pi/2$ (com $k \in \mathbf{Z}$) , utilizando a regra de derivação de um quociente:

$$[\ tg\ x]'_{x\,=\,a} = \frac{[sen\ x]'_{x=a}\ .\ cos\ a\ -\ (sen\ a)\ .\ [cos\ x]'_{x=a}}{cos^2\ a}\ =\ \frac{cos^2\ a\ +\ sen^2\ a}{cos^2\ a}\ =$$

$$= \frac{1}{cos^2\ a}\ = sec^2\ a\ .$$

A aplicação da regra de derivação de uma função composta permite-nos achar as derivadas de $f(x) = sen\ u(x)$, $g(x) = cos\ u(x)$ e $h(x) = tg\ u(x)$, num ponto a interior dos respectivos domínios onde exista finita a derivada $u'(a)$:

$$f'(x) = [\ cos\ u(a)]\ .\ u'(a)$$

$$g'(x) = [\ \text{-}\ sen\ u(a)]\ .\ u'(a)$$

$$h'(x) = [\ sec^2\ u(a)]\ .\ u'(a)\ ,$$

sendo as fórmulas obviamente válidas para as derivadas laterais.

3.6 - Regra de derivação de uma função inversa . Aplicação às funções trigonométricas inversas

Seja $y = f(x)$ uma função estritamente monótona a contínua no intervalo não degenerado I . Nestas condições, como sabemos, $f(x)$ transforma o intervalo I num intervalo não degenerado K; por outro lado, a monotonia estrita de $y = f(x)$ garante a respectiva injectividade, existindo portanto a função inversa $x = f^{-1}(y)$ com domínio no intervalo K e contradomínio em I .

É fácil concluir que $x = f^{-1}(y)$ é estritamente crescente ou decrescente em K , consoante $y = f(x)$ seja uma coisa ou outra em I . Supondo por exemplo que $y = f(x)$ é estritamente crescente em I , tem-se $y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$, porque se fosse $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$, seria, pelo crescimento estrito de $f(x)$ em I , $f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2$; do mesmo modo, se $f(x)$ for estritamente decrescente em I , tem-se que $f^{-1}(y)$ é também estritamente decrescente em K .

Sabemos também (ver corolário do teorema 12 do capítulo dos limites e continuidade de funções) que a monotonia estrita e continuidade de $y = f(x)$ em I implica a continuidade da função inversa $x = f^{-1}(y)$ em $f(I) = K$.

Posto isto vamos estudar o teorema onde se contém a regra de derivação da função inversa.

Teorema 3 : *Seja $y = f(x)$ uma função estritamente monótona e contínua no intervalo não degenerado I que ela transforma no intervalo K e considere-se a respectiva função inversa $x = f^{-1}(y)$. Para $b = f(a)$ interior de K correspondente a um ponto $a \in I$ onde seja finita e não nula $f'(a)$, tem-se:*

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=b} = \frac{1}{f'(a)}\ ,\ com\ \ a = f^{-1}(b)$$

<u>Demonstração</u> : Sendo b ponto interior de K, então $a = f^{-1}(b)$ é também ponto interior de I , devido à monotonia estrita de $f(x)$ e $f^{-1}(y)$. Tem-se, por definição de derivada,

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=b} = \lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k}\ ;$$

fazendo $h = f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) = f^{-1}(b+k) - a$, tem-se $h \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$ devido à monotonia estrita de $f^{-1}(y)$ e claro que,

$$f^{-1}(b+k) = a + h \Rightarrow b + k = f(a+h) \Rightarrow k = f(a+h) - b = f(a+h) - f(a) \;;$$

portanto,

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=b} = \lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}} \;,$$

com $h = f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)$. Devido a continuidade de $f^{-1}(y)$ em $y = b$, tem-se,

$$\lim_{k \to 0} h = \lim_{k \to 0} \left[f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)\right] = 0 \,,$$

e podemos então concluir com facilidade que, sendo $f'(a) \neq 0$,

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=b} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}} = \frac{1}{f'(a)} \;, \text{ com } \; a = f^{-1}(b) \;.$$

Com efeito , a cada sucessão de termos k_n tal que, $b + k_n \in K$, $k_n \neq 0$ e $lim\; k_n = 0$, corresponde uma sucessão de termos $h_n = f^{-1}(b+k_n) - f^{-1}(b) \in I$ não nulos e tal que $lim\; h_n = 0$ e a esta corresponde por sua vez uma sucessão,

$$\frac{1}{\dfrac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}} \;,$$

com limite $1 \,/\, f'(a)$, por definição de limite segundo Heine ; então, de novo por definição de limite segundo Heine, obtém-se a conclusão desejada.

Observações : a) Se $b = f(a)$ for a extremidade inicial de K, a será a extremidade inicial de I caso $f(x)$ seja crescente e a extremidade final de I caso $f(x)$ seja decrescente ; a demonstração do teorema pode adaptar-se [considerando apenas os $k > 0$, a que correspondem valores $h > 0$ se $f(x)$ for crescente e valores $h < 0$ se $f(x)$ for decrescente] , obtendo-se então,

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{d\,;\,y=b} = \frac{1}{f'_d(a)} \quad \text{ou} \quad \left[f^{-1}(y)\right]'_{d\,;\,y=b} = \frac{1}{f'_e(a)} \;,$$

consoante $f(x)$ seja crescente ou decrescente e sempre no pressuposto de a respectiva derivada lateral de $f(x)$ em $x = a$ ser finita e não nula.

b) Se $b = f(a)$ for a extremidade final de K , obter-se-ia,

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{e\,;\,y=b} = \frac{1}{f'_e(a)} \quad \text{ou} \quad \left[f^{-1}(y)\right]'_{e\,;\,y=b} = \frac{1}{f'_d(a)} \ ,$$

consoante *f (x)* seja crescente ou decrescente e sempre no pressuposto de a respectiva derivada lateral de $f(x)$ em $x = a$ ser finita e não nula.

c) Caso seja $f'(a) = 0$, a derivada da função inversa no ponto correspondente é $+\infty$ se $f(x)$ for crescente e $-\infty$ se $f(x)$ for crescente .

Vejamos alguns exemplos de aplicação deste teorema.

1) A função $y = e^x$ é estritamente crescente e contínua em $I = \left]\, -\infty \,,\, +\infty \,\right[$ que ela transforma em $K = \left]\, 0 \,,\, +\infty \,\right[$. A respectiva função inversa $x = log\, y$ é então também estritamente crescente e contínua no intervalo $\left]\, 0 \,,\, +\infty \,\right[$. Como cada $b \in \left]\, 0 \,,\, +\infty \,\right[$ corresponde a $a = log\, b \in \left]\, -\infty \,,\, +\infty \,\right[$ e , neste ponto , a derivada da função $y = e^x$ é $e^a \neq 0$, tem-se:

$$\left(log\ y\right)'_{y=b} = \frac{1}{\left(e^x\right)'_{x=log\,b}} = \frac{1}{b} \ ,$$

resultado que confere com o que já se obteve por outra via.

2) A função $y = sen\, x$ é estritamente monótona e contínua em $I = \left[\, -\pi/2 \,,\, \pi/2 \,\right]$ que ela transforma em $K = \left[\, -1 \,,\, 1 \,\right]$. A respectiva função inversa $x = arc\ sen\, y$ é então também estritamente monótona e contínua em $\left[-1,\, 1\right]$. Como cada $b \in \left]\, -1 \,,\, 1 \,\right[$ corresponde a $a = arc\ sen\ b \in \left]\, -\pi/2 \,,\pi/2 \,\right[$ e neste ponto a derivada da função $y = sen\, x$ é $cos\ a \neq 0$, tem-se :

$$\left(arc\ sen\ y\right)'_{y=b} = \frac{1}{\left(sen\ x\right)'_{x=arc\,sen\,b}} = \frac{1}{cos\,(arc\ sen\ b)} = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \ ,$$

para $-1 < b < 1$.

3) A função $y = cos\, x$ é estritamente monótona e contínua em $I = \left[\, 0 \,,\, \pi \,\right]$ que ela transforma em $K = \left[\, -1 \,,\, 1 \,\right]$. A respectiva função inversa $x = arc\ cos\ y$ é então também estritamente monótona e contínua em $\left[\, -1,\, 1 \,\right]$. Como cada $b \in \left]\, -1 \,,\, 1 \,\right[$ corresponde a $a = arc\ cos\ b \in \left]\, 0 \,,\pi \,\right[$ e neste ponto a derivada da função $y = cos\, x$ é $-\,sen\ a \neq 0$, tem-se :

$$\left(arc\ cos\ y\right)'_{y=b} = \frac{1}{\left(cos\ x\right)'_{x=arc\cos b}} = \frac{1}{-sen\,(arc\ cos\ b)} = -\,\frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \ ,$$

para $-1 < b < 1$.

4) A função $y = tg\, x$ é estritamente monótona e contínua em $I =]\, \text{-}\pi/2\, ,\, \pi/2 [$ que ela transforma em $K =]\, \text{-}\infty\, ,\, +\infty\, [$. A respectiva função inversa $x = arc\ tg\, y$ é então também estritamente monótona e contínua em $]\, \text{-}\infty\, ,\, +\infty\, [$. Como cada $b \in]\, \text{-}\infty\, ,\, +\infty\, [$ corresponde a $a = arc\ tg\ b \in]\, \text{-}\pi/2\, ,\pi/2\, [$ e neste ponto a derivada da função $y = tg\, x$ é $sec^2\, a \neq 0$, tem-se :

$$\left(arc\ tg\ y\right)'_{y=b} = \frac{1}{\left(tg\ x\right)'_{x = arc tg\ b}} = \frac{1}{sec^2\ (arc\ tg\ b)} = \frac{1}{1+b^2} \quad ,$$

para $\text{-}\infty < b < +\infty$.

Os resultados obtidos nos exemplos 2), 3) e 4) e a aplicação da regra de derivação de uma função composta permitem agora determinar as derivadas das funções,

$$y = arc\ sen\ u(x) \quad , \quad y = arc\ cos\ u(x) \quad \text{e} \quad y = arc\ tg\ u(x) \ ,$$

num ponto a interior dos respectivos domínios onde exista finita $u'(a)$ e tal que no caso do *arc sen* e do *arc cos* seja $\text{-}1 < u(a) < 1$ [no caso do *arc tg* , $u(a)$ pode ser qualquer real] :

$$[\, arc\ sen\ u(x)]\, '_{x=a} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2(a)}}\ .\ u'(a)$$

$$[\, arc\ cos\ u(x)]\, '_{x=a} = \text{-}\ \frac{1}{\sqrt{1 - u^2(a)}}\ .\ u'(a)$$

$$[\, arc\ tg\ u(x)]\, '_{x=a} = \frac{1}{1 + u^2(a)}\ .\ u'(a)\ .$$

As fórmulas precedentes adaptam-se, como de costume, ao caso das derivadas laterais .

4. Primeira derivada. Derivadas de ordem superior

Considere-se a função $f\,(x)$ com domínio em A e seja $A_1 \subseteq A$ o conjunto dos pontos interiores de A onde a função admite derivada finita. A função que a cada $x \in A$ associa $f'(x)$ designa-se por *primeira derivada* de $f\,(x)$ e tem como domínio o supramencionado conjunto A_1 .

Usualmente , a primeira derivada de $f\,(x)$ obtém-se aplicando , para cada $x \in A_1$, as regras de derivação anteriormente estudadas, embora em certos pontos excepcionais seja por vezes necessário recorrer directamente à definição. Vejamos alguns exemplos:

1) Sendo $f\,(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 1}$, com domínio $A =]\, \text{-}\infty\, ,\, 1/2\, [\ \cup\ ]\, 1/2\, ,\, +\infty\, [$, tem--se, para todo o $x \in A_1 = A$,

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+1)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{4x^2 - 4x + 1} \quad ;$$

2) Sendo $f(x) = e^{sen\, x}$, com domínio $A =]\, -\infty , +\infty\, [$, tem-se , para todo o $x \in A_1 = A$, $f'(x) = e^{sen\, x} . \cos x$;

3) Sendo $f(x) = \sqrt{arc\, tg\, (1+x)}$, com domínio $A = [\, -1 , +\infty\, [$, tem-se, para todo o $x \in A_1 =]\, -1 , +\infty\, [\subset A$,

$$f'(x) = \frac{[arc\, tg\, (1+x)]'}{2 . \sqrt{arc\, tg\, (1+x)}} = \frac{\frac{1}{1+(1+x)^2}}{2 . \sqrt{arc\, tg\, (1+x)}} =$$

$$= \frac{1}{2 . (2 + 2x + x^2) . \sqrt{arc\, tg\, (1+x)}} \quad ;$$

4) Sendo,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,(x^2)}{x} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \quad ,$$

tem-se:

a) Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{2x^2 . \cos(x^2) - sen\,(x^2)}{x^2} \quad ;$$

b) Para $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{sen\,(h^2)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{sen\,(h^2)}{h^2} = 1 \ .$$

Portanto,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 . \cos(x^2) - sen\,(x^2)}{x^2} & , \ x \neq 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases} \quad ,$$

sendo **R** o domínio da primeira derivada.

Deverá observar-se que quando o domínio de $f\,(x)$ é um certo intervalo I e a este pertencem uma ou ambas as extremidades, caso nestas existam as correspondentes derivadas laterais de $f\,(x)$, é usual incluir tais extremidades no domínio da primeira derivada a qual assume nesses pontos o valor das referidas derivadas laterais . Assim , por exemplo , no caso da função $f\,(x) = x^{3/2}$ com domínio no intervalo $I = [\, 0 , +\infty\, [$, tem-se :

$$x > 0 \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} \quad ; \quad f'_d(0) = 0 \,.$$

Então $f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{1/2}$ para $x \in I = [\, 0 \,, +\infty \,[$, considerando-se que, para $x = 0$, $f'(x)$ assume como valor $f'_d(0) = 0$.

Dada a função $f(x)$ com domínio em A , seja $f'(x)$ com domínio em $A_1 \subseteq A$ a respectiva primeira derivada. Seja $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ o conjunto dos pontos interiores de A_1 onde exista finita a derivada de $f'(x)$; a função que a cada $x \in A_2$ associa $[f'(x)]'$ designa-se por *segunda derivada* de $f(x)$ e representa-se usualmente por $f''(x)$.

A partir da segunda derivada pode definir-se a *terceira derivada* de $f(x)$: é a primeira derivada da segunda derivada e o seu domínio é o conjunto A_3 dos pontos interiores de A_2 (domínio da segunda derivada) onde $f''(x)$ admite derivada finita. A notação para a terceira derivada é $f'''(x)$.

E assim sucessivamente: a *derivada de ordem n* será a primeira derivada da derivada de ordem n-1, sendo o seu domínio o conjunto A_n dos pontos interiores de $A_{n\text{-}1}$ (domínio da derivada de ordem n-1) onde $f^{(n\text{-}1)}(x)$ admite derivada finita; a derivada de ordem n representa-se por $f^{(n)}(x)$.

Refira-se que nada obriga, mas também nada impede, que se tenha,

$$A \;=\; A_1 \;=\; A_2 \;=\; \ldots \;=\; A_n \;=\; .$$

Assim, por exemplo, $f(x) = \operatorname{sen} x$ admite derivadas de todas as ordens com domínios todos iguais a **R** ; por outro lado, por exemplo, para $f(x) = x^{7/3}$, função com domínio em **R** , tem-se :

$$f'(x) = \frac{7}{3} \cdot x^{4/3} \quad , \; \forall\, x \in \mathbf{R} \,,$$
$$f''(x) = \frac{28}{9} \cdot x^{1/3} \quad , \; \forall\, x \in \mathbf{R} \,,$$
$$f'''(x) = \frac{28}{27} \cdot x^{-2/3} \quad , \; \forall\, x \in \,]\, \text{-}\infty \,, 0 \,[\; \cup \;]\, 0 \,, +\infty \,[\;,$$

tendo-se portanto, como domínios das sucessivas funções derivadas,

$$A_1 = A_2 = \mathbf{R} \quad \text{e} \quad A_n = \,]\, \text{-}\infty \,, 0 \,[\; \cup \;]\, 0 \,, +\infty \,[\;\; \text{para} \;\; n \geq 3 \,.$$

5. Funções diferenciáveis

Considere-se a função $f(x)$ com domínio A e seja a um ponto interior de A . Existe então um $\delta > 0$ tal que, $|\, h \,| < \delta \Rightarrow a + h \in A$ e a função diz-se *diferenciável* em $x = a$ se e só se , para $|\, h \,| < \delta$,

$$f(a+h)-f(a)=k\,.\,h\;+|\,h\,|\,.\,\varepsilon(h)\,,$$

com k constante e $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$.

Sendo $f(x)$ diferenciável em $x=a$, podemos provar com facilidade que existe finita $f'(a)$ e que $k=f'(a)$. Com efeito, da igualdade que define a diferenciabilidade resulta, para $0<|\,h\,|<\delta$,

$$\frac{f(a+h)\;-\;f(a)}{h}\;=\;k\;+\;\frac{|h|}{h}\;.\,\varepsilon(h)\,,$$

e passando ao limite em ambos os membros, quando $h\to 0$, obtém-se imediatamente $k=f'(a)$ (note-se que $|\,h\,|\,/\,h$ é uma função limitada de h - assume o valor 1 se $h>0$ e o valor -1 se $h<0$ - e portanto o seu produto pelo infinitésimo $\varepsilon(h)$ é igualmente um infinitésimo).

Inversamente, se $f(x)$ admite derivada finita em $x=a$, ponto interior do domínio A de $f(x)$, vê-se com facilidade que a função é diferenciável nesse ponto. Com efeito, considerando $\delta>0$ suficientemente pequeno de modo que $|\,h\,|<\delta\;\Rightarrow\;a+h\in A$ e definindo,

$$\theta(h)=\begin{cases} f'(a)\;-\;\dfrac{f(a+h)\;-\;f(a)}{h} & ,\;\;0<|\,h\,|<\delta \\ 0 & ,\;\;h\;=\;0 \end{cases}\quad,$$

tem-se $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=0$ e ,

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)\,.\,h\;-\;h\,.\,\theta(h)\;=\;f'(a)\,.\,h\;+|\,h\,|\,.\,\varepsilon(h)\quad,$$

com ,

$$\varepsilon(h)=\begin{cases} -\dfrac{h}{|h|}\cdot\theta(h) & ,\;\;0<\;|h|\;<\delta \\ \;\;0 & ,\;\;h\;=\;0 \end{cases}\qquad \text{e}\qquad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0\;\;,$$

o que prova a diferenciabilidade de $f(x)$ em $x=a$.

Portanto, para as funções reais de variável real, equivalem-se os conceitos de função diferenciável e de função com derivada finita num ponto (interior do respectivo domínio).

Na igualdade , $f(a+h)-f(a)=f'(a)\,.\,h\;+|\,h\,|\,.\,\varepsilon(h)$, a primeira parcela do segundo membro designa-se por *diferencial* de $f(x)$ em $x=a$ e constitui uma aproximação da diferença $f(a+h)-f(a)$ a menos da parcela $|\,h\,|\,.\,\varepsilon(h)$ que é um infinitésimo de ordem superior a h , ou seja,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|\,.\,\varepsilon(h)}{h}=0\;\;.$$

O símbolo normalmente usado para representar a diferencial de $f(x)$ em $x = a$ é $[d f(x)]_{x=a}$. Quando se esteja a considerar a diferencial da função num ponto genérico x interior do domínio, dispensa-se a referência ao ponto e usa-se o símbolo $d f(x)$, ou seja, $d f(x) = f'(x) \,.\, h$.

Como a diferencial da função $g(x) = x$ é $d x = 1 .\, h = h$, a diferencial de uma função $f(x)$ num ponto genérico x escreve-se frequentemente do modo seguinte :

$$d f(x) = f'(x) \,.\, h = f'(x) \,.\, d x \,.$$

Esta igualdade permite representar a primeira derivada $f'(x)$ como o quociente de duas diferenciais,

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{d x} \,,$$

ou, caso se trate da derivada num ponto particular $x = a$,

$$f'(a) = \left[\frac{d f(x)}{d x}\right]_{x=a} \,.$$

Deste modo se justifica a simbologia usual para representar a primeira derivada da função $y = f(x)$:

$$\frac{d f(x)}{d x} \quad \text{ou} \quad \frac{d y}{d x} \;, \;\; \text{em vez de } f'(x) \,.$$

Inspirada nesta simbologia tem-se a seguinte notação alternativa para as derivadas de ordem superior :

$$\frac{d^2 f(x)}{d x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2 y}{d x^2} \;, \;\; \text{em vez de } f''(x) \,,$$

$$\frac{d^3 f(x)}{d x^3} \quad \text{ou} \quad \frac{d^3 y}{d x^3} \;, \;\; \text{em vez de } f'''(x) \,,$$

etc.

6. Teoremas fundamentais sobre funções regulares

6.1 - Extremantes relativos ou locais e extremantes absolutos de uma função

Dada uma função real de variável real $f(x)$ com domínio em A , um ponto $a \in A$ é *maxi-mizante local* ou *relativo* de $f(x)$ se e só se existe uma $V_\varepsilon(a)$ tal que, $x \in V_\varepsilon(a) \cap A \Rightarrow \;\Rightarrow f(x) \leq f(a)$; é *minimizante local* ou *relativo* de $f(x)$ se e só se existe uma $V_\varepsilon(a)$ tal que, $x \in V_\varepsilon(a) \cap A \;\Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

Sendo a um maximizante (minimizante) relativo, $f(a)$ é o correspondente *máximo* (*mínimo*) local ou relativo.

Maximizantes e minimizantes locais ou relativos recebem a designação genérica de *extremantes locais* ou *relativos* ; os correspondentes máximos ou mínimos recebem a designação genérica de *extremos locais* ou *relativos* .

Os extremantes e correspondentes extremos relativos de uma função não devem confundir-se com os seus extremantes e extremos absolutos : caso exista um ponto $a \in A$ tal que, $\forall\, x \in A$, $f(x) \leq f(a)$, tal ponto designa-se por *maximizante absoluto* da função , sendo então $f(a)$ o *máximo absoluto* ; caso exista um ponto $a \in A$ tal que, $\forall\, x \in A$, $f(x) \geq f(a)$, tal ponto designa-se por *minimizante absoluto* da função, sendo então $f(a)$ o *mínimo absoluto* .

Note-se que o máximo absoluto de $f(x)$ no seu domínio, se existe, é único, mas pode ser atingido em mais que um ponto do domínio; de igual modo, o mínimo absoluto de $f(x)$ no seu domínio, se existe, é único, mas pode ser atingido em mais que um ponto do domínio.

As definições apresentadas permitem imediatamente afirmar que:

a) Maximizantes ou minimizantes absolutos de $f(x)$ são seus maximizantes ou minimi-zantes relativos, mas a inversa não é verdadeira;

b) Máximo ou mínimo absoluto de $f(x)$ é máximo ou mínimo relativo da função, mas a inversa não é verdadeira;

c) Os extremantes (e correspondentes extremos) absolutos de $f(x)$, caso existam, encontram-se entre os respectivos extremantes (extremos) relativos da função.

O teorema seguinte é fundamental :

Teorema 4 : *Sendo $f(x)$ uma função real de variável real com domínio A, se o ponto a interior de A é extremante (maximizante ou minimizante) local, então, se existir $f'(a)$, tem-se $f'(a) = 0$*

Demonstração : Faz-se a demonstração para o caso do maximizante, deixando-se o caso do minimizante (que é análogo) ao cuidado do leitor. Por ser a interior de A , existe uma $V_\varepsilon(a) \subseteq A$ e, por ser a maximizante relativo de $f(x)$, pode escolher-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de forma que, $x \in V_\varepsilon(a) \subseteq A \Rightarrow f(x) \le f(a)$. Dado que,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad ,$$

tem-se :

$$x \in V_\varepsilon(a) \ \wedge \ x < a \ \Rightarrow \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0 \ \Rightarrow f'(a) \ge 0 \ ,$$

$$x \in V_\varepsilon(a) \ \wedge \ x > a \ \Rightarrow \ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \le 0 \ \Rightarrow f'(a) \le 0 \ ,$$

e as duas desigualdades, que devem ser verificadas ao mesmo tempo por $f'(a)$, implicam necessariamente que $f'(a) = 0$, que era o que se pretendia provar.

Repare-se que a hipótese de a ser interior do domínio é fundamental. Por exemplo, no caso da função $f(x) = \sqrt{x}$ cujo domínio é o intervalo $[\ 0\ , +\infty\ [$, tem-se $f'_d(0) = +\infty$ e no entanto a função atinge o seu mínimo absoluto em $x = 0$.

Refira-se ainda que a condição do teorema 4 é apenas uma condição necessária para a existência de extremo relativo num ponto a interior do domínio da função, não garantindo, só por si, que esse ponto seja extremante. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ tem derivada nula em $x = 0$ e no entanto o valor zero não é extremante da função.

6.2 - Funções regulares. Teoremas de Rolle, Lagrange e Cauchy

Uma função $f(x)$ com domínio em A diz-se *regular* no intervalo $I = [\ a\ ,\ b\ ]$ contido em A se e só se for contínua em I e admitir derivada finita em todos os pontos $x \in\ ]\ a\ ,\ b\ [$.

Para as funções regulares num intervalo vamos demonstrar alguns teoremas de grande importância em diversas aplicações.

Teorema 5 : *Sendo $f(x)$ regular em $[\ a\ ,\ b\ ]$ sendo $f(a) = f(b)$, existe um ponto $c \in\ ]\ a\ ,\ b\ [$ tal que $f'(c) = 0$* (Rolle)

<u>Demonstração</u> : Sendo $f(x)$ contínua em $[\ a\ ,\ b\ ]$, admite nesse intervalo máximo e mínimo. Se o máximo e o mínimo absolutos de $f(x)$ são ambos atingidos nas extremidades do intervalo, como $f(a) = f(b)$, a função admite mínimo e máximo absolutos iguais e então é constante no intervalo em causa , ou seja, $f'(c) = 0$ para qualquer $c \in\ ]\ a\ ,\ b\ [$; caso um dos extremos absolutos de $f(x)$ seja atingido em certo ponto interior $c \in\ ]\ a\ ,\ b\ [$ tem-se, pelo teorema 4, $f'(c) = 0$. Em qualquer dos casos, existe pelo menos um $c \in\ ]\ a\ ,\ b\ [$ tal que $f'(c) = 0$, como se queria provar.

O teorema de Rolle admite os seguintes corolários:

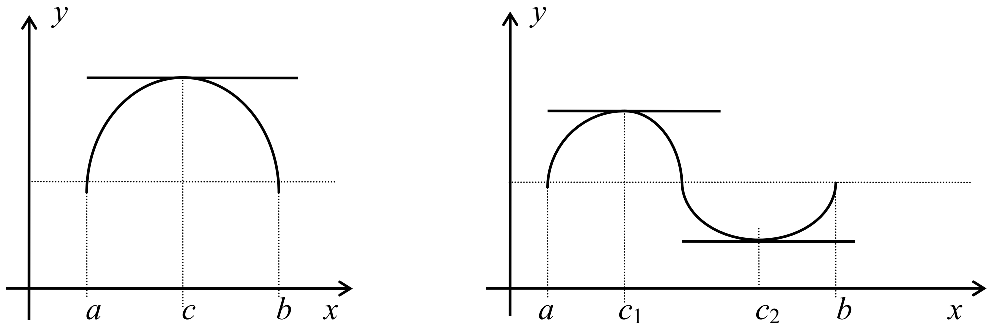
Corolário 1: *Dois zeros de uma função* $f(x)$ *regular num intervalo* $[\,a\,,\,b\,]$ *compreendem pelo menos um zero da derivada* $f'(x)$

<u>Demonstração</u> : Sendo $\alpha\,,\beta\,\in [\,a\,,\,b\,]$, com $\alpha < \beta$, dois zeros de $f(x)$, tem-se : $f(x)$ regular em $[\alpha\,,\beta\,] \subseteq [\,a\,,\,b\,]$; $f(\alpha) = f(\beta)$. Logo , pelo teorema de Rolle, existe um $c \in \,]\,\alpha\,,\beta\,[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário 2 : *Dois zeros consecutivos da derivada de uma função regular no intervalo* $[\,a\,,\,b\,]$ *compreendem quando muito um zero da função*

<u>Demonstração</u> : De facto, se esses zeros da derivada de $f(x)$ compreendessem dois zeros de $f(x)$, então, pelo corolário 1, entre esses dois zeros da função haveria pelo menos um zero da derivada, o qual estaria compreendido entre os dois inicialmente considerados que, portanto, não seriam consecutivos.

Para finalizar o estudo do teorema de Rolle , tem interesse dar uma sua interpretação geométrica. Nas duas figuras seguintes representam-se geometricamente duas funções que, relativamente a um intervalo $[\,a\,,\,b\,]$ se encontram nas condições do enunciado do teorema de Rolle . Segundo este teorema , em um ou mais pontos $c \in \,]\,a\,,\,b\,[$ deverá ter-se $f'(c) = 0$ o que, de acordo com a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, significa que é paralela ao eixo $O\,x$ a tangente à curva que representa $f(x)$, no ponto de coordenadas $x = c$, $y = f(c)$:



Caso de um só <u>c</u> que anula a derivada

Caso de mais de um <u>c</u> que anula a derivada

A partir do teorema de Rolle deduz-se outro teorema muito importante:

Teorema 6 : *Sendo* $f(x)$ *regular em* $[a\,,\,b]$ *, tem-se,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\,,$$

para certo $c \in \,]\,a\,,\,b\,[$ (Lagrange)

<u>Demonstração</u> : Considere-se a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - \lambda\,(x - a)$, com

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{(constante)} .$$

Claro que $\varphi(x)$ é contínua em $[a , b]$ e existe finita $\varphi'(x)$ para todos os pontos $x \in]\, a\ ,\ b[$, porque idênticas propriedades são verificadas por hipótese por $f(x)$ no mesmo intervalo. Além disso, $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$, como se verifica por substituição directa de x por a e por b na expressão que define a função $\varphi(x)$. A função $\varphi(x)$ verifica assim as hipótese do teorema de Rolle, existindo portanto um $c \in]\, a\ ,\ b[$ tal que, $\varphi'(c) = f'(c) - \lambda = 0$, donde se tira,

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) ,$$

que era o que se pretendia provar.

O teorema que acaba de demonstrar-se merece alguns comentários adicionais. Em certas aplicações é mais conveniente utilizar variantes da igualdade demonstrada no teorema. Assim,

a) Sendo $f(x)$ regular em $[a , b]$, tem-se,

$$f(b) - f(a) = (b - a) \,.\, f'[\, a + \theta \,.\, (b - a)] \ ,$$

com certo θ tal que $0 < \theta < 1$. Esta igualdade decorre imediatamente do teorema de Lagrange, bastando notar que qualquer $c \in]\, a , b[$ se pode exprimir do seguinte modo : $c = a + \theta \,.\, (b - a)$, com certo θ compreendido entre 0 e 1 .

b) Sendo $f(x)$ regular no intervalo fechado de extremidades a e x (este intervalo é $[a , x]$ se $x \geq a$ e $[\, x , a]$ se $x < a$), tem-se:

$$f(x) - f(a) = (x - a) \,.\, f'[a + \theta_x \,.\, (x - a)] \ \text{, com } \ 0 < \theta_x < 1 \ .$$

Esta igualdade é evidente quando seja $x = a$; decorre da igualdade da alínea a) , quando seja $x > a$; e decorre da igualdade da alínea a) aplicada ao intervalo $[\, x\ ,\ a]$, quando seja $x < a$, pois de,

$$f(a) - f(x) = (a - x) \,.\, f'[\, x + \mu_x \,.\, (a - x)] \ \text{, com } \ 0 < \mu_x < 1 \ ,$$

resulta sucessivamente,

$$f(x) - f(a) = (x - a) \,.\, f'[\, x + \mu_x \,.\, (a - x)] \ \text{, com } \ 0 < \mu_x < 1 \ ,$$

$$f(x) - f(a) = (x - a) \,.\, f'[\, a + (1 - \mu_x) \,.\, (x - a)] \ \text{, com } \ 0 < \mu_x < 1 \ ,$$

$$f(x) - f(a) = (x-a)\,.\,f'[\,a + \theta_x\ .\ (x-a)]\ \ ,\text{com}\ \ 0 < \theta_x = 1 - \mu_x < 1\ .$$

c) Sendo $f(x)$ regular no intervalo fechado de extremidades a e $a+h$ ($h > 0, h = 0$, ou $h < 0$), tem-se,

$$f(a+h) - f(a) = h\ .\ f'(a + \theta h)\ \ ,\ \text{com}\ \ 0 < \theta < 1\ \ (\ \theta \text{ depende de } h\ )\ ;$$

esta igualdade resulta da alínea b), fazendo $h = x - a$.

O teorema de Lagrange admite o seguinte importante corolário:

Corolário : *Seja I um intervalo não degenerado e admita-se que $f(x)$ e $g(x)$ têm a mesma derivada finita nos pontos interiores de I e a mesma derivada lateral, também finita, nas extremidades do intervalo (caso lhe pertençam) . Então a função $h(x) = f(x) - g(x)$ é constante nesse intervalo*

<u>Demonstração</u> : Fixe-se um qualquer $a \in I$. Dado um ponto $x \in I$ arbitrário, a função $h(x)$ é regular em $[\,a\,,x]$ se $x > a$ ou em $[\,x\,,a]$ se $x < a$: com efeito, das hipóteses do enunciado decorre a continuidade das funções $f(x)$ e $g(x)$ - logo de $h(x)$ - em I e portanto também a continuidade no intervalo de extremidades a e x naquele contido; por outro lado, $f(x)$ e $g(x)$ admitem derivada finita em todos os pontos de I (derivada lateral nas extremidades de I caso lhe pertençam) e, portanto, $h(x) = f(x) - g(x)$ admite derivada finita no interior do intervalo de extremidades a e x .

Tem-se então, pelo teorema de Lagrange,

$$h(x) - h(a) = (x-a)\ .\ h'[\,a + \theta_x\ .\ (x-a)]\ \ ,\text{com}\ \ 0 < \theta_x < 1\ \ ;$$

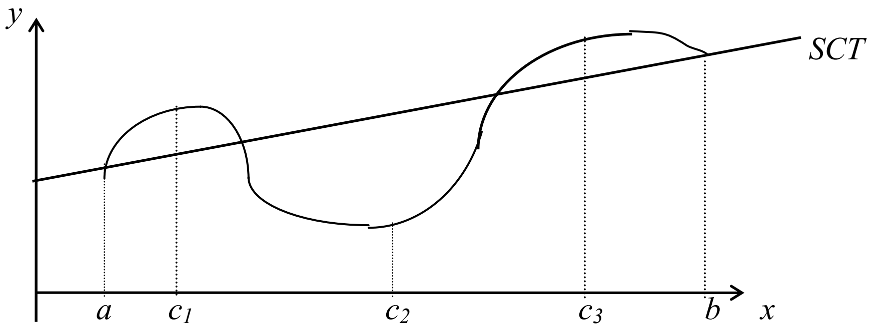
como $a + \theta_x\ .\ (x-a) \in I$ e como neste intervalo $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ (porque por hipótese ambas as funções têm a mesma derivada no intervalo), resulta, $h(x) - h(a) = 0$, ou seja, $h(x) = h(a)$. Conclui-se assim que a função $h(x) = f(x) - g(x)$ é constante no intervalo I [porque fixado um $a \in I$, para qualquer outro $x \in I$ tem-se $h(x) = h(a)$] .

Para terminar o estudo do teorema de Lagrange, vejamos a sua interpretação geométrica.

Na figura seguinte, representa-se uma função regular no intervalo $[a\,,b]$. A razão,

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ ,$$

é o declive da recta SCT que passa pelos pontos $[\,a\,,\ f(a)]$ e $[\,b\,,\ f(b)]$:



O teorema de Lagrange garante a existência de pelo menos um ponto c do interior do intervalo $[\ a\ ,\ b]$ tal que $f'(c) = \lambda$; tendo em conta que $f'(c)$ é o declive da tangente à curva no ponto de abcissa $x = c$, o teorema de Lagrange garante a existência de pelo menos um ponto c do interior do intervalo $[\ a\ ,\ b]$ tal que a tangente à curva no ponto $[\ c\ ,\ f(c)]$ tem o mesmo declive que a secante *SCT* que passa pelos pontos $[\ a\ ,\ f(a)]$ e $[\ b\ ,\ f(b)]$, ou seja, tal que a referida tangente é paralela à referida secante. No caso exemplificado na figura há três pontos c nessas condições (c_1 , c_2 e c_3) .

Vejamos agora um novo teorema sobre funções regulares que mais não é que uma generalização do teorema de Lagrange.

Teorema 7 : *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções regulares no intervalo $[a\ ,\ b]$, se para todos os $x \in \,]\ a\ ,\ b\ [$ se tem $g'(x) \neq 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in \,]\ a\ ,\ b[$ tal que,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{(Cauchy)}$$

<u>Demonstração</u> : Como $g(x)$ é regular em $[\ a\ ,\ b]$ e $g'(x) \neq 0$ no interior desse intervalo, tem de ser $g(b) \neq g(a)$, caso contrário $g(x)$ verificaria as hipóteses do teorema de Rolle no intervalo e então $g'(x)$ anular-se-ia em certo ponto $x = c \in \,]\ a\ ,\ b[$.

A demonstração da igualdade do enunciado parte da função auxiliar,

$$\varphi(x) = f(x)\ -\ \lambda\,.[g(x) - g(a)]\quad ,\ \text{com}\ \ \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\ .$$

Claro que $\varphi(x)$ é contínua em $[\ a\ ,\ b]$ e existe finita $\varphi'(x)$ para todos os pontos $x \in \,]\ a\ ,\ b[$, porque idênticas propriedades são verificadas por hipótese por $f(x)$ e $g(x)$ no mesmo intervalo. Além disso, $\varphi(a) = \varphi(b) = f(a)$, como se verifica por substituição directa de x por a e por b na expressão que define a função $\varphi(x)$. A função $\varphi(x)$

verifica assim as hipótese do teorema de Rolle, existindo portanto um $c \in]\, a\,,\, b[$ tal que,

$$\varphi'(c) \;=\; f'(c) - \lambda\, .\, g'(c) = 0\ ,$$

donde se tira,

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\ ,$$

que era o que se pretendia provar.

Observe-se que o teorema de Lagrange (teorema 6) se pode obter como corolário do presente teorema, tomando $g(x) = x$.

7. <u>Algumas aplicações das derivadas</u>

7.1 - <u>Levantamento de indeterminações</u>

A aplicação da regra do quociente no cálculo de limites conduz frequentemente a casos de indeterminação do tipo 0/0 ou $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Vamos estudar duas regras que envolvem as derivadas do numerador e denominador da fracção e que permitem em grande número de situações o levantamento de tais indeterminações.

A) <u>Regra de L'Hospital</u>

Esta regra permite levantar indeterminações do tipo 0/0, quando se verifiquem determinadas hipóteses. Considerem-se duas funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ e admita-se que:

1) Ambas as funções são definidas em certo intervalo $[\, a\,,\, a+\varepsilon\, [$ e $\psi(x) \neq 0$ para $x \in]\, a\,,\, a+\varepsilon\, [$;

2) $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 = \psi(a) = \lim\limits_{x \to a+0} \psi(x)$;

3) Existem $\varphi'_d(a)$ e $\psi'_d(a)$ não conjuntamente infinitas e tem-se $\psi'_d(a) \neq 0$.

Nestas condições, vamos ver que,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'_d(a)}{\psi'_d(a)}\ ,$$

com as seguintes convenções quanto ao valor do segundo membro:

$$k/(\pm\infty) = 0\ ,\ (\pm\infty)/k = (\pm\infty)\ \text{ se }\ k > 0\ \text{ e }\ (\pm\infty)/k = (\mp\infty)\ \text{ se }\ k < 0\ .$$

Com efeito, por ser $\varphi(a) = 0 = \psi(a)$, tem-se,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \lim_{x \to a+0} \frac{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\dfrac{\psi(x) - \psi(a)}{x - a}} = \frac{\varphi'_d(a)}{\psi'_d(a)} \,,$$

com as convenções referidas quando uma das derivadas laterais seja infinita.

A argumentação precedente vale para o limite lateral esquerdo, considerando as hipóteses:

1) Ambas as funções são definidas em certo intervalo $]\, a - \varepsilon \,,\, a]$ e $\psi(x) \neq 0$ para $x \in]\, a - \varepsilon \,,\, a\, [$;

2) $\lim\limits_{x \to a-0} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 = \psi(a) = \lim\limits_{x \to a-0} \psi(x)$;

3) Existem $\varphi'_e(a)$ e $\psi'_e(a)$ não conjuntamente infinitas e tem-se $\psi'_e(a) \neq 0$.

Obtém-se então :

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'_e(a)}{\psi'_e(a)} \,,$$

com as convenções anteriormente referidas quando uma das derivadas laterais seja infinita.

Quando as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sejam definidas em $]\, a - \varepsilon \,,\, a + \varepsilon\, [$, $\psi(x) \neq 0$ para $x \in]\, a - \varepsilon \,,\, a\, [\ \cup\ ]\, a \,,\, a + \varepsilon\, [$ e $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0 = \psi(a) = \lim\limits_{x \to a} \psi(x)$, tem-se,

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)} \,,$$

caso existam as derivadas $\varphi'(a)$ e $\psi'(a)$ não conjuntamente infinitas e seja $\psi'(a) \neq 0$, com convenções quanto ao valor do segundo membro análogas às anteriormente referidas no caso dos limites laterais.

Vejamos um exemplo de aplicação da regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{[1 - \cos x]'_{x=0}}{[\operatorname{sen} x]'_{x=0}} = \frac{\operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 0 \,.$$

B) **<u>Regra de Cauchy : Indeterminação 0/0</u>**

Admita-se que as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ verificam as seguintes hipóteses:

1) São definidas em certo intervalo $]\, a \,,\, \alpha\, [$, com $a \in \mathbf{R}$ ou $a = -\infty$ e tem-se $\psi(x) \neq 0$ nesse mesmo intervalo ;

2) $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a+0} \psi(x)$, quando seja $a \in \mathbf{R}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} \psi(x)$, quando seja $a = -\infty$;

3) Existem finitas em $]\, a\, ,\, \alpha\, [$ as derivadas $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ e tem-se $\psi'(x) \neq 0$ nesse intervalo.

Nessas condições vamos ver que, com k finito , $+\infty$ ou $-\infty$,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (\text{caso } a \in \mathbf{R})$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (\text{caso } a = -\infty)\ .$$

<u>1º Caso : k finito</u>

Fixado $\delta > 0$ arbitrário, existe um $\beta_\delta > a$ tal que,

$$x \in \,]\, a\, ,\beta_\delta\, [\; \subseteq \;]\, a\, ,\, \alpha\, [\; \Rightarrow\; k - \delta/2 < \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} < k + \delta/2\ ,$$

por definição de limite. Tomando dois pontos $x > y$ no intervalo $]\, a\, ,\beta_\delta\, [$, tem-se que as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ verificam as hipóteses do teorema de Cauchy no intervalo $[\, y\, ,x]\; \subseteq \;]\, a\, ,\beta_\delta [\; \subseteq \;]\, a\, ,\, \alpha\, [$: são ambas regulares nesse último intervalo e $\psi'(x) \neq 0$ em $]\, y\, ,x\, [$. Tem-se então,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\psi(x) - \psi(y)} = \frac{\varphi'(x^*)}{\psi'(x^*)}\ ,\ \text{com } x^* \in \,]\, y\, ,x[\; \subseteq \;]\, a\, ,\beta_\delta [\ .$$

Assim, para quaisquer pontos $x > y$ do intervalo $]\, a\, ,\beta_\delta [$, tem-se:

$$k - \delta/2 < \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\psi(x) - \psi(y)} < k + \delta/2\ .$$

Fazendo y tender para $a + 0$ (ou y tender para $-\infty$, caso seja $a = -\infty$) , $\varphi(y)$ e $\psi(y)$ tendem para zero por hipótese e obtém-se,

$$k - \delta/2 \leq \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \leq k + \delta/2\ ,\ \text{para } x \in \,]\, a\, ,\beta_\delta [\ ,$$

o que implica,

$$k - \delta < \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < k + \delta \ , \ \text{para} \ x \in \,]\, a \, , \beta_\delta [\ ,$$

assim se provando que,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \ ,$$

consoante seja $a \in \mathbf{R}$ ou $a = -\infty$.

<u>2º caso : $k = \pm\, \infty$</u>

Tal qual como no primeiro caso, mas partindo de,

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} > 2/\delta \ \ (\text{caso} \ \ k = +\infty) \ \ \text{ou de} \ \ \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} < -2/\delta \ \ (\text{caso} \ \ k = -\infty) \ ,$$

desigualdades válidas para $x \in \,]\, a \, , \beta_\delta [\ \subseteq \ ]\, a \, , \alpha [$.

A argumentação precedente vale no caso de as hipóteses serem verificadas relativamente a um intervalo $]\alpha \, , a[$, com $a \in \mathbf{R}$ ou $a = +\infty$, devendo então tomar-se limites quando x tende para $a - 0$ ou para $+\infty$, obtendo-se então:

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \ \Rightarrow \ \lim_{x \to a-0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (\text{caso } a \in \mathbf{R})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \ \Rightarrow \ \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \qquad (\text{caso} \ \ a = +\infty \ ) \ .$$

Como corolário dos resultados anteriores referentes aos limites laterais, pode concluir-se que, caso as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ verifiquem as hipóteses:

1) Sejam definidas em $]\alpha \, , a \, [\ \cup \ ] \, a \, , \beta \, [$ e $\psi(x) \neq 0$ nesse conjunto ;

2) $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0 = \lim\limits_{x \to a} \psi(x)$;

3) Existam finitas $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ em $]\alpha \, , a \, [\ \cup \ ] \, a \, , \beta \, [$ e seja $\psi'(x) \neq 0$ nesse mesmo conjunto,

então, com k finito , $+\infty$ ou $-\infty$,

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \ ,$$

chegando-se a tal conclusão por aplicação dos resultados antes obtidos para os limites laterais.

Ao aplicarmos a regra de Cauchy no levantamento de uma indeterminação $0/0$, pode suceder que no cálculo do limite do quociente $\varphi'(x)\ /\ \psi'(x)$ surja nova indeterminação $0/0$. Nesse caso, se as hipóteses da regra de Cauchy forem também verificadas relativamente às funções $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$, podemos calcular o limite de $\varphi''(x)\ /\ \psi''(x)$ e concluir que:

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \ .$$

E assim por diante , caso no cálculo do limite do quociente $\varphi''(x)\ /\ \psi''(x)$ ainda se tenha uma indeterminação $0/0$.

Vejamos dois exemplos de aplicação da regra de Cauchy no levantamento de indeterminações do tipo $0/0$:

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\ x}{e^x} = 1$;

2) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{1 - cos\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2\,(x-1)}{sen\,(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{cos\,(x-1)} = 2$.

C) <u>Regra de Cauchy : Indeterminação $(\pm\infty)/(\pm\infty)$</u>

Admita-se que as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ verificam as seguintes hipóteses:

1) São definidas em certo intervalo $]\,a\,,\alpha\,[$, com $a \in \mathbf{R}$ ou $a = -\infty$ e tem-se $\psi(x) \neq 0$ nesse mesmo intervalo ;

2) $\displaystyle \lim_{x\to a+0} \varphi(x) = +\infty = \lim_{x\to a+0} \psi(x)$, quando seja $a \in \mathbf{R}$,

$\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \varphi(x) = +\infty = \lim_{x\to -\infty} \psi(x)$, quando seja $a = -\infty$;

3) Existem finitas em $]\,a\,,\alpha\,[$ as derivadas $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ e tem-se $\psi'(x) \neq 0$ nesse intervalo.

Nessas condições vamos ver que, tal como em B), com k finito, $+\infty$ ou $-\infty$,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \Rightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (\text{caso } a \in \mathbf{R})$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (\text{caso } a = -\infty) .$$

Antes de mais refira-se que estas implicações subsistem se na hipótese 2) as funções tenderem ambas para $-\infty$, ou uma para $+\infty$ e outra para $-\infty$, como se verifica facilmente por conveniente troca de sinal das funções envolvidas. Com efeito, caso seja, por exemplo, $\lim\limits_{x \to a+0} \varphi(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a+0} \psi(x) = +\infty$, tem-se, admitindo como verdadeiras as implicações referentes ao caso em que ambas as funções tendem para $+\infty$,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \Rightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{-\varphi'(x)}{\psi'(x)} = -k \Rightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{-\varphi(x)}{\psi(x)} = -k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a+0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k .$$

Passemos então à demonstração das implicações em causa.

<u>1º Caso : *k* finito</u>

Fixado $\delta/2 > 0$ arbitrário, existe um $\beta_\delta > a$ tal que,

$$x \in \,]\, a , \beta_\delta [\;\subseteq\;]\, a , \alpha [\;\Rightarrow\; k - \delta/2 < \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} < k + \delta/2 \quad ,$$

por definição de limite. Fixe-se $y \in \,]\, a , \beta_\delta [$ e , a partir dele, determine-se $\gamma_y \in]\, a , \beta_\delta [$ tal que,

$$x \in \,]\, a , \gamma_y [\;\subseteq\;]\, a , \beta_\delta [\;\subseteq\;]\, a , \alpha [\quad \Rightarrow \quad \psi(x) > 0 \;\text{ e }\; \psi(x) > \psi(y) ,$$

o que sempre é possível por ser $\psi(x) \to +\infty$ quando $x \to a + 0$ (ou quando $x \to -\infty$, no caso de ser $a = -\infty$). No intervalo de extremidades $y \in]\, a , \beta_\delta [$ e $x \in \,]\, a , \gamma_y [$ as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ verificam as hipóteses do teorema de Cauchy e, portanto,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\psi(x) - \psi(y)} = \frac{\varphi'(x^*)}{\psi'(x^*)} \quad ,$$

com x^* pertencente ao intervalo $]\, a , \beta_\delta [$; pode pois concluir-se que,

$$k - \delta/2 < \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\psi(x) - \psi(y)} < k + \delta/2 \quad ,$$

desde que $y \in]\, a\,,\beta_\delta\,[$ e $x \in]\, a\,,\gamma_y\,[$. Dadas as condições impostas na determinação de γ_y , tem-se $\psi(x) > 0$ e $\psi(x) > \psi(y)$, para $x \in]\, a\,,\gamma_y\,[$, deduzindo-se da dupla desigualdade a que se chegou,

$$(\,k - \delta/2\,)\,.[\psi(x) - \psi(y)] < \varphi(x) - \varphi(y) < (\,k + \delta/2\,).[\psi(x) - \psi(y)]$$

$$\varphi(y) + (\,k - \delta/2\,)\,.[\psi(x) - \psi(y)] < \varphi(x) < \varphi(y) + (\,k + \delta/2).[\psi(x) - \psi(y)]$$

$$\frac{\varphi(y)}{\psi(x)} + (k - \delta/2)\,.\left[1 - \frac{\psi(y)}{\psi(x)}\right] < \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < \frac{\varphi(y)}{\psi(x)} + (k + \delta/2)\,.\left[1 - \frac{\psi(y)}{\psi(x)}\right],$$

para $x \in]\, a\,,\gamma_y\,[$ e com $y \in]\, a\,,\beta_\delta\,[$ fixo. Quando $x \to a + 0$ (ou $x \to -\infty$, caso seja $a = -\infty$), as funções que enquadram o quociente $\varphi(x) \,/\, \psi(x)$ tendem, respectivamente , para $k - \delta\,/\,2$ e $k + \delta\,/\,2$ porque , com y fixo, as fracções $\varphi(y)\,/\,\psi(x)$ e $\psi(y)\,/\,\psi(x)$ tendem ambas para zero. Tal significa que com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno se tem , para $x \in]\, a\,, a + \varepsilon\,[$ ou $]\,-\infty\,, -1/\varepsilon\,[$ (consoante seja a finito ou $-\infty$) ,

$$(k - \delta/2\,) - \delta/2 = k - \delta < \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} < (k + \delta/2\,) + \delta/2 = k + \delta\ ,$$

o que permite concluir que,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = k \quad (\text{caso } a \in \mathbf{R}\,)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = k \quad (\text{caso } a = -\infty\ ).$$

<u>2º Caso : $k = +\infty$</u>

Tal como no 1º caso, mas partindo de,

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} > 2\,/\delta\ ,\quad \text{para } x \in]\, a\,,\beta_\delta\,[\ \subseteq\ ]\, a\,,\alpha\,[\ .$$

O desenvolvimento do argumento, tal qual como no primeiro caso, leva à desigualdade,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} > \frac{\varphi(y)}{\psi(x)} + \frac{2}{\delta}\cdot\left[1 - \frac{\psi(y)}{\psi(x)}\right]\ ,$$

para $x \in]\, a\,,\gamma_y\,[$ e com $y \in]\, a\,,\beta_\delta\,[$ fixo. Quando $x \to a + 0$ (ou $x \to -\infty$, caso seja $a = -\infty$), a função que minora o quociente $\varphi(x) \,/\, \psi(x)$ tende para $2\,/\delta$. Tal significa que com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno se tem , para $x \in]\, a\,, a + \varepsilon\,[$ ou $]\,-\infty\,, -1/\varepsilon\,[$ (consoante seja a finito ou $-\infty$) ,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} > \frac{2}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta} ,$$

o que permite concluir que,

$$\lim_{x \to a+0} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = +\infty \quad (\text{caso } a \in \mathbf{R})$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = +\infty \quad (\text{caso } a = -\infty) .$$

<u>3º Caso : $k = -\infty$</u>

Tal como no 2º caso, mas partindo de,

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} < -2/\delta , \quad \text{para } x \in \,]\, a \,, \beta_\delta \,[\; \subseteq \;]\, a \,, \alpha \,[\; .$$

A argumentação precedente vale no caso de as hipóteses serem verificadas relativamente a um intervalo $]\alpha\,,\, a[$, com $a \in \mathbf{R}$ ou $a = +\infty$, devendo então tomar-se limites quando x tende para a - 0 ou para $+\infty$, obtendo-se então:

$$\lim_{x \to a-0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a-0} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = k \quad (\text{caso } a \in \mathbf{R})$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = k \quad (\text{caso } a = +\infty) .$$

Como corolário dos resultados anteriores referentes aos limites laterais, pode concluir-se que, caso as funções $\varphi\,(x)$ e $\psi\,(x)$ verifiquem as hipóteses:

1) Sejam definidas em $]\alpha\,,\, a\,[\; \cup \;]\, a\,,\, \beta\,[$ e $\psi(x) \neq 0$ nesse conjunto ;

2) $\lim_{x \to a} \varphi\,(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to a} \psi\,(x) = \pm\infty$;

3) Existam finitas $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ em $]\alpha\,,\, a\,[\; \cup \;]\, a\,,\, \beta\,[$ e seja $\psi'(x) \neq 0$ nesse mesmo conjunto; então, com k finito , $+\infty$ ou $-\infty$,

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x \to a} \frac{\varphi\,(x)}{\psi\,(x)} = k ,$$

chegando-se a tal conclusão por aplicação dos resultados antes obtidos para as derivadas laterais.

Ao aplicarmos a regra de Cauchy no levantamento de uma indeterminação $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, pode suceder que no cálculo do limite do quociente $\varphi'(x)\,/\,\psi'(x)$ surja nova indeterminação $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Nesse caso , se as hipóteses da regra de Cauchy forem também verificadas relativamente às funções $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$, podemos calcular o limite de $\varphi''(x)\,/\,\psi''(x)$ e concluir que:

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = k \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \;.$$

E assim por diante , caso no cálculo do limite do quociente $\varphi''(x)\,/\,\psi''(x)$ ainda se tenha uma indeterminação $(\pm\infty)/(\pm\infty)$.

Vejamos dois exemplos de aplicação da regra de Cauchy no levantamento de indeterminações do tipo $(\pm\infty)/(\pm\infty)$:

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x^2}}{\log x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-2/x^3)\,.\,e^{1/x^2}}{2/x} = \lim_{x\to 0} (-1/x^2)\,.\,e^{1/x^2} = -\infty \;;$$

2) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \,.$$

7.2 - <u>Estudo da monotonia e extremantes</u>

O sinal da primeira derivada de uma função num intervalo permite concluir sobre o seu eventual crescimento ou decrescimento nesse intervalo, nos termos do teorema seguinte:

Teorema 8 : *Sendo $f(x)$ contínua no intervalo I e existindo finita $f'(x)$ nos pontos interiores de I, tem-se:*

a) *Se $f'(x) \geq 0$ no interior de I, então $f(x)$ é crescente em sentido lato no intervalo ;*

b) *Se $f'(x) \geq 0$ no interior de I e entre quaisquer dois pontos do intervalo sempre se encontra um terceiro onde a derivada é maior que zero, então $f(x)$ é crescente em sentido estrito no intervalo .*

<u>Demonstração</u> : **a)** Tomando $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x)$ contínua no intervalo $[\,x_1, x_2\,] \subseteq I$ e existe finita $f'(x)$ em $]\,x_1, x_2\,[$. Logo, pelo teorema de Lagrange,

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\,.\,f'(x^*) \quad , \text{ com } x^* \in \;]\,x_1, x_2\,[\;.$$

E como por hipótese $f'(x) \geq 0$ nos pontos interiores de I e x^* é um desses pontos, tem-se $f(x_2) \geq f(x_1)$, o que prova o crescimento lato de $f(x)$ em I .

b) Pela alínea anterior, tem-se que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$. Se pudesse ser $f(x_2) = f(x_1)$ ter-se-ia $f(x) = f(x_1) = f(x_2)$ para todos os $x \in [\, x_1 , x_2 \,]$, ou seja, a função seria constante no intervalo $[\, x_1 , x_2 \,]$ e, portanto, $f'(x) = 0$ nesse intervalo, contrariamente à hipótese de entre quaisquer dois pontos do intervalo I sempre se encontrar um terceiro onde a derivada é maior que zero. Tem-se assim que,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) ,$$

o que prova o crescimento estrito de $f(x)$ em I .

Do teorema que acaba de ser demonstrado decorre o seguinte corolário:

Corolário 1 : *Sendo $f(x)$ contínua no intervalo I e existindo finita $f'(x)$ nos pontos interiores de I, tem-se:*

a) *Se $f'(x) \leq 0$ no interior de I , então $f(x)$ é decrescente em sentido lato no intervalo ;*

b) *Se $f'(x) \leq 0$ no interior de I e entre quaisquer dois pontos do intervalo sempre se encontra um terceiro onde a derivada é menor que zero, então $f(x)$ é decrescente em sentido estrito no intervalo .*

Demonstração : Basta aplicar o teorema 8 à função $g(x) = - f(x)$ e notar que $f(x)$ decresce se e só se $g(x) = - f(x)$ cresce.

Refira-se ainda que o teorema 8 e seu corolário podem facilmente demonstrar-se sob a hipótese mais fraca de $f(x)$ ser contínua no intervalo I e $f'(x)$ existir finita nos pontos interiores de I, salvo um número finito deles. De facto, sendo $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ os pontos interiores do intervalo I onde $f'(x)$ não existe finita, o teorema 8 e seu corolário são válidos em cada um dos seguintes sub-intervalos de I :

$$I_1 = I \cap \,]\, -\infty , a_1] \,,\; I_2 = [a_1 , a_2] \,, \ldots , I_k = [a_{k-1} , a_k] \,,\; I_{k+1} = [a_k , +\infty [\, \cap I \;;$$

e como a extremidade final de cada um destes sub-intervalos é a extremidade inicial do seguinte, facilmente se conclui que o teorema 8 e seu corolário são igualmente válidos em todo o intervalo I .

O estudo dos intervalos de monotonia de uma função permite ainda tirar as seguintes conclusões sobre a existência de extremantes relativos (interiores ou fronteiros) :

a) Dado um ponto a interior do domínio da função, se a função cresce em certo intervalo $]\, a - \varepsilon , a]$ e decresce em certo intervalo $[\, a , a + \delta\, [$, o ponto em causa é maximizante relativo ; se a função decresce em certo intervalo $]\, a - \varepsilon , a]$ e cresce em certo intervalo $[\, a , a + \delta\, [$, o ponto em causa é minimizante relativo .

b) Dado um ponto a , se certo intervalo $[\, a , a + \delta\, [$ está contido no domínio da função e certo intervalo $]\, a - \varepsilon , a [$ não tem pontos desse mesmo domínio, então: se $f(x)$ cresce em $[\, a , a + \delta\, [$, o ponto a é minimizante ; se $f(x)$ decresce em $[\, a , a + \delta\, [$, o ponto a é maximizante .

c) Dado um ponto a , se certo intervalo $]\, a - \varepsilon , a]$ está contido no domínio da função e certo intervalo $]\, a, a+\delta\, [$ não tem pontos desse mesmo domínio, então: se $f(x)$ decresce em $]\, a - \varepsilon , a]$, o ponto a é minimizante ; se $f(x)$ cresce em $]\, a - \varepsilon , a]$, o ponto a é maximizante .

E claro que o estudo do comportamento de $f(x)$ antes e depois de a pode fazer-se mediante a análise do sinal da derivada, caso exista.

Vejamos um exemplo de aplicação. Dada a função $f(x) = e^{x^3 - 3x}$, com domínio em **R** , tem-se,

$$f'(x) = \left(3x^2 - 3\right) .\, e^{x^3 - 3x} = 3 \,.\left(x - 1\right) . \left(x + 1\right) .\, e^{x^3 - 3x} \ ,$$

e é fácil concluir que:

$-\infty < x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente crescente em $]\, -\infty , -1]$,

$-1 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente decrescente em $[-1 , 1]$,

$1 < x < +\infty \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é estritamente crescente em $[\, 1 , +\infty\, [$;

o ponto $x = -1$ é um maximizante e o ponto $x = 1$ é um minimizante. Também se conclui que a função não tem extremantes absolutos, porque tende para $+\infty$ quando x tende para $+\infty$ e tende para zero sem nunca se anular (a exponencial é sempre positiva) quando x tende para $-\infty$.

7.3 - Estudo da convexidade e concavidade

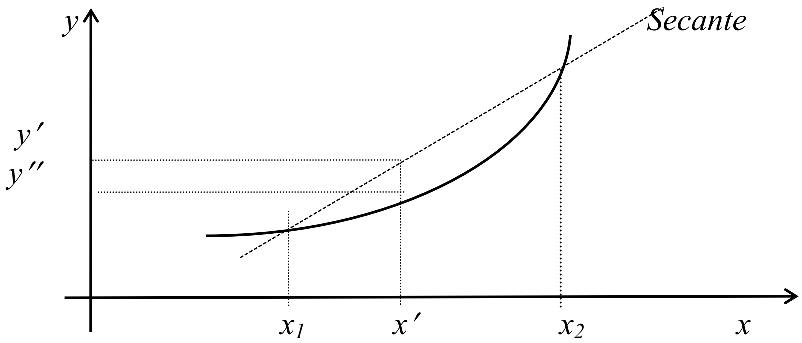
Diz-se que $f(x)$ é *convexa* no intervalo I se e só se dados quaisquer pontos $x_1 , x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, e sendo λ e μ reais positivos e tais que $\lambda + \mu = 1$,

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)\ ;$$

nas mesmas condições, se se tiver, $f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$, diz-se que $f(x)$ é *côncava* no intervalo I .

A convexidade e concavidade têm interpretações geométricas conhecidas:

a) Sendo $f(x)$ convexa em I , então dados $x_1 , x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, os pontos da curva que representa $f(x)$ que tenham abcissa $x' \in [\, x_1 , x_2]$ têm ordenada y'' não superior à ordenada y' dos correspondentes pontos de abcissa x' na recta secante à curva que passa pelos pontos $[\, x_1 ,\ f(x_1)]$ e $[\, x_2 ,\ f(x_2)]$, como se indica na figura seguinte:



Com efeito, a equação da secante referida é,

$$y = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_2)\ ,$$

sendo portanto,

$$y' = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x' - x_2) \quad \text{e} \quad y'' = f(x')\ .$$

Vamos então ver que $y'' \leq y'$. Notando que para $x' = x_1$ ou $x' = x_2$ se tem $y'' = y'$, bastará considerar o caso $x' \in \,]\, x_1 , x_2 \,[$, ou seja,

$$x' = \lambda' x_1 + \mu' x_2 \ \text{, com} \ \ \lambda' , \mu' > 0 \ \ \text{e} \ \ \lambda' + \mu' = 1\ ;$$

tem-se, sucessivamente,

$$y' = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x' - x_2) =$$

$$= f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (\lambda' x_1 + \mu' x_2 - x_2) =$$

$$= f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \, . \, \lambda' . \,(x_1 - x_2) =$$

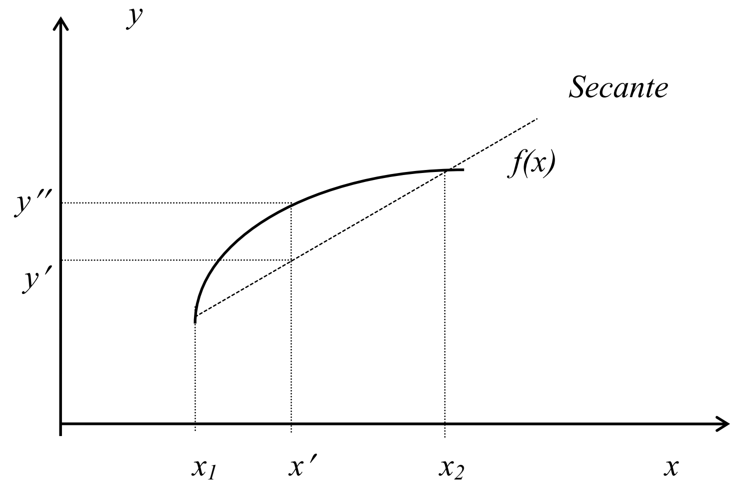
$$= f(x_2) - \lambda' . \,[f(x_2) - f(x_1)] = \lambda' . f(x_1) + \mu' . f(x_2) \, .$$

Por outro lado, a convexidade de $f(x)$ em I garante que,

$$y'' = f(x') = f(\lambda' x_1 + \mu' x_2) \leq \lambda' . f(x_1) + \mu' . f(x_2) = y' ,$$

como se queria provar.

b) Analogamente, sendo $f(x)$ côncava em I, então dados $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, os pontos da curva que representa $f(x)$ que tenham abcissa $x' \in [x_1, x_2]$ têm ordenada y'' não inferior à ordenada y' dos correspondentes pontos de abcissa x' na recta secante à curva que passa pelos pontos $[x_1, f(x_1)]$ e $[x_2, f(x_2)]$, como se indica na figura seguinte:



Sendo $f(x)$ contínua no intervalo I e admitindo derivada finita $f'(x)$ nos pontos interiores desse intervalo, o estudo da monotonia da função derivada pode esclarecer sobre a eventual convexidade ou concavidade de $f(x)$ no intervalo, nos termos do teorema seguinte:

Teorema 9 : *Sendo $f(x)$ contínua em I e existindo $f'(x)$ finita nos pontos interiores de I, então:*

a) *Se $f'(x)$ é crescente no interior I_0 de I, $f(x)$ é convexa em I;*

b) *Se $f'(x)$ é decrescente no interior I_0 de I, $f(x)$ é côncava em I*

<u>Demonstração</u> : **a)** Tomando $x_1 , x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, sejam $\lambda , \mu > 0$ e $\lambda + \mu = 1$. Seja $x^* = \lambda\, x_1 + \mu\, x_2$ e considerem-se os intervalos $[\, x_1 , x^*]$ e $[\, x^* , x_2]$. Em qualquer desses dois intervalos a função é regular (é contínua e admite derivada finita nos respectivos pontos interiores) e pode, portanto escrever-se pelo teorema de Lagrange,

$$f(x^*) - f(x_1) = (x^* - x_1).f'(k_1) \quad \text{e} \quad f(x_2) - f(x^*) = (x_2 - x^*).f'(k_2) \ ,$$

com $x_1 < k_1 < x^* < k_2 < x_2$. De $x^* = \lambda x_1 + \mu x_2$ resulta de imediato que,

$$x^* - x_1 = \mu .(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad x_2 - x^* = \lambda .(x_2 - x_1) \ ,$$

e portanto,

$$f(x^*) - f(x_1) = \mu .(x_2 - x_1).f'(k_1) \quad \text{e} \quad f(x_2) - f(x^*) = \lambda .(x_2 - x_1).f'(k_2) \ .$$

Multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por λ e os da segunda por μ , obtém-se,

$$\lambda .f(x^*) - \lambda .f(x_1) = \lambda .\, \mu .(x_2 - x_1).f'(k_1)$$

$$\mu .f(x_2) - \mu .f(x^*) = \mu .\lambda .(x_2 - x_1).f'(k_2) \ .$$

Notando agora que ,

$$x_1 < k_1 < x^* < k_2 < x_2 \ \Rightarrow f'(k_1) \le f'(k_2) \ ,$$

por ser $f'(x)$ crescente no interior I_0 de I , resulta, sucessivamente,

$$\lambda .f(x^*) - \lambda .f(x_1) \le \mu .f(x_2) - \mu .f(x^*)$$

$$\lambda .f(x^*) + \mu .f(x^*) \le \lambda .f(x_1) + \mu .f(x_2)$$

$$f(x^*) = f(\lambda x_1 + \mu x_2) \le \lambda .f(x_1) + \mu .f(x_2) \ ,$$

o que prova a convexidade de $f(x)$ em I .

b) Tal como em a) , mas notando que com $f'(x)$ decrescente em I_0 se chega no final a uma desigualdade $\ge$ em vez de $\le$.

O teorema admite o seguinte corolário de frequente utilização prática:

Corolário 1 : *Sendo $f(x)$ contínua em I e existindo $f'(x)$ e $f''(x)$ finitas nos pontos interiores de I, então:*

a) *Se $f''(x) \ge 0$ no interior I_0 de I, $f(x)$ é convexa em I ;*

b) *Se* $f''(x) \leq 0$ *no interior* I_0 *de* I *,* $f(x)$ *é côncava em* I

<u>Demonstração</u> : **a)** A existência de $f''(x)$ finita em I_0 implica a continuidade de $f'(x)$ em I_0 e então a condição $f''(x) \geq 0$ assegura o crescimento de $f'(x)$ em I_0 . O teorema ga-rante então a convexidade de $f(x)$ em I .

b) Argumento semelhante ao utilizado em a).

Antes de passarmos a um exemplo de aplicação, convém dar a noção de ponto de inflexão: caso $f(x)$ seja convexa em certo intervalo $[a\,,\,b]$ e côncava em certo intervalo $[\,b\,,\,c]$, ou côncava no primeiro e convexa no segundo, o ponto b é abcissa de um *ponto de inflexão* da curva que representa $f(x)$; o ponto de inflexão é portanto o ponto $[\,b\,,\,f(b)]$.

Vejamos então um exemplo de aplicação. Dada a função $f(x) = e^{-x^2}$, tem-se,

$$f'(x) = -2x\,.\,e^{-x^2}$$

$$f''(x) = (4x^2 - 2)\,.\,e^{-x^2} = 2\,(x - \sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2)\,.\,e^{-x^2} \;,$$

donde resultam as seguintes conclusões:

$-\infty < x < -\sqrt{2}/2 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa em $]-\infty\,,\,-\sqrt{2}/2]$

$-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ côncava em $[-\sqrt{2}/2\,,\,\sqrt{2}/2]$

$\sqrt{2}/2 < x < +\infty \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ convexa em $[\sqrt{2}/2\,,+\infty]$.

Os pontos de abcissa $x = -\sqrt{2}/2$ ou $x = \sqrt{2}/2$ são pontos de inflexão.

8. Exercícios

1 - Usando a respectiva definição, estude a existência de derivada para as seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = x - |x|$, em $x = 0$; **b)** $f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x = 0 \\ \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} & , \; x \neq 0 \end{cases}$, em $x = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \; , & x \; racional \\ 2x & , \; x \; irracional \end{cases}$, em $x = 1$; **d)** $f(x) = \sqrt{x - 1}$, em $x = 1$ e $x = 2$;

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \; x = 0 \\ x \cos(1/x) & , \; x \neq 0 \end{cases}$, em $x = 0$;

f) $f(x) = sen\,(x - 1) \, . \, cos\,(x - 1)$, em $x = 1$;

g) $f(x) = |x| \, log\,(x + 1)$, em $x = 0$; **h)** $f(x) = cos\,[\, I(x) \, . \, \pi \,]$, em $x = 10$;

i) $f(x) = \sqrt{x \, . \, sen\, x} \, . \, cos\, x$, em $x = 0$.

2 - Quando possível, dê exemplos de funções $f(x)$ que verifiquem as seguintes condições:

a) Contínua em $x = 0$ e com $f'_e(0) = 1$ e $f'_d(0) = 2$;

b) Não contínua em $x = 0$ e com $f'_e(0) = 1$ e $f'_d(0) = 2$;

c) Contínua em $x = 0$ e com $f'(0) = -\infty$;

d) Contínua em $x = 0$ e com $f'_e(0) = 0$ e $f'_d(0) = +\infty$;

e) Não contínua em $x = 0$ e com $f'_e(0) = 0$ e $f'_d(0) = +\infty$.

3 - Usando as regras de derivação, determine as primeiras derivadas das seguintes funções:

a) $y = tg\, x - x$; **b)** $y = \dfrac{x + cos\, x}{1 - sen\, x}$; **c)** $y = e^{arc\, tg\, x}$; **d)** $y = e^{log\, x^2}$;

e) $y = sen\, x \, . \, cos\, x \, . \, tg\, x$; **f)** $y = x^2 \, . \, (1 + log\, x)$; **g)** $y = cos\,(arc\, sen\, x)$;

h) $y = (\, log\, x \,)^x$; **i)** $y = x^{sen\, 2x}$; **j)** $y = x^{x^{x-1}}$; **k)** $y = (1 + 2\,x)^{1-x}$;

l) $y = \dfrac{1}{1 + 2e^{-(1-x)}}$; **m)** $y = log\,(\,log\,x)$; **n)** $y = x\,.\,sen^3(1/x)$;

o) $y = log\,x + log\,2x + \ldots + log\,nx$; **p)** $y = log\left[\,arc\,cos\,(\,log\,\dfrac{1}{1+x^2})\right]$;

q) $y = (log\,x)^{log\,(1+x^2)}$; **r)** $y = arc\,sen\,\sqrt{1 - x^2}$; **s)** $y = log\,\dfrac{x\,.\,sen\,x}{1 + cos\,x}$.

4 - Determine m , n e q de forma que a recta $y = m\,x + m + n$ seja tangente no ponto $P(0{,}1)$ à curva que representa a função,

$$y = m.\,sen\,x + n.\,cos\,x + (n - q).\,x + q\,.$$

5 - Dada a função,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \; 0 \le x < \pi \\ sen\,x & , \; x < 0 \end{cases} ,$$

determine o menor dos ângulos formados pelas rectas que contêm as semitangentes à direita e à esquerda da curva $y = f(x)$ em $P(0{,}0)$.

6 - Dadas duas curvas $y = g(x)$ e $y = h(x)$, dizem-se tangentes no ponto $P(a\,,\,b)$ se: 1) O ponto P pertence a ambas as curvas ; 2) São coincidentes as tangentes às duas curvas no ponto P . Posto isto,

a) As curvas $y = x^2$ e $y = x.\,sen\,x$ são ou não tangentes na origem ?

b) Determine a de forma que as curvas,

$$y = a\,.\,log\,x \quad \text{e} \quad y = \frac{(a+1)\,.\,sen\,(x-1)}{a+2} ,$$

sejam tangentes no ponto $P(1{,}0)$.

7 - Determine a e b em,

$$f(x) = \frac{a\,.\,arc\,tg\,\pi^{x^2}}{x + b} ,$$

de forma que a recta de equação $y - x - 1 = 0$ seja tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P(0{,}1)$.

8 - Utilizando a noção de diferencial, calcule um valor aproximado para:

a) $tg\ 46^{\circ}$, sabendo que $1^{\circ} \approx 0{,}01745$ radianos ; **b)** $e^{0,01} .\ sen\ 0{,}01$; **c)** $\sqrt[3]{25}$;

d) $log\ 10{,}2$, sabendo que $log\ 10 \approx 2{,}303$.

9 - Sabendo que $y = x^n$, mostre que $\dfrac{d\,y}{y} = n.\ \dfrac{d\,x}{x}$ $(n \in \mathbf{N})$, nos pontos $x \neq 0$.

10 - Escreva a expressão das diferenciais, num ponto genérico x, para as funções :

a) $y = log\,x$; **b)** $y = sen\,x\ .\ log\,x$; **c)** $y = (sen\,x + cos\,x)\ .\ log\ \sqrt{x}$.

11 - Representando por $y^{(n)}$ a derivada de ordem n , mostre que :

a) Com $y = e^{ax}$, $y^{(n)} = a^n\ .\ e^{ax}$;

b) Com $y = sen\ (k\,x)$, $y^{(n)} = k^n\ .\ sen\ (k\,x + n\pi/2)$;

c) Com $y = log\,x$, $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\ .\ (n-1)\,!\ .\ x^{-n}$;

d) Com $y = x\,e^x$, $y^{(n)} = (x+n)\ .\ e^x$;

e) Com $y = e^x\ .\ cos\,x$, $y^{(n)} = 2^{n/2}\ .\ e^x\ .\ cos\ (x + n\pi/4)$;

f) Com $y = a\ .\ sen\ (k\,x) + b\ .\ cos\ (k\,x)$,

$$y^{(n)} = k^n\ .\ [\ a\ .\ sen\ (k\,x + n\pi/2) + b\ .\ cos\ (k\,x + n\pi/2)]\ ;$$

g) Com $y = f\,(a\,x)$, $y^{(n)} = a^n . f^{(n)}(ax)$, supondo $f\,(x)$ derivável até à ordem n ;

h) Com $y = arc\ tg\,x$, $y^{(n)} = (n-1)!\ cos^n\,y\ .\ sen\ [\ n\ .\ (y + \pi/2)]$;

i) Com $y = e^{ax} .\ sen\ (bx)$ e $a > 0$, $y^{(n)} = r^n\ .\ e^{ax}\ .\ sen\ (bx + ns)$, em que,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad s = arc\ tg\,(b/a)\ .$$

12* - Sendo $f(x)$ uma função indefinidamente derivável em $\mathbf{R}$, suponha que existe uma sucessão x_n estritamente decrescente e tal que $lim\, x_n = 0$ e $f(x_n) = 0$ qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.

a) Prove que a função e as suas sucessivas derivadas de todas as ordens se anulam no ponto $x = 0$;

b) Dê um exemplo de uma função distinta da função nula que verifique as condições do enunciado.

13 - Prove que se um polinómio $P(x)$ de grau n tem n raízes reais e distintas, então o polinómio $P'(x)$ tem n-1 raízes reais distintas.

14 - Seja $f(x)$ uma função n vezes derivável em todos os pontos de um intervalo I e suponha-se que a equação $f(x) = 0$ tem n+1 raízes reais distintas nesse intervalo. Mostre que existe um $c \in I$ onde se anula a derivada de ordem n da função.

15* - Seja $f(x)$ uma função definida e derivável em todos os pontos do intervalo $]\, a\, , +\infty\, [$ e tal que, $\forall\, x > a$, $f(x)\, .\, f'(x) < 0$. Prove que então existem os limites,

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) \ ,$$

sendo o segundo necessariamente finito. Sê-lo-á também o primeiro ?

16 - Verifique que o teorema de Rolle é aplicável à função,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & , x \leq 0 \\ \cos x & , x > 0 \end{cases} \quad ,$$

no intervalo $[\, \text{-}1\, , \pi/2 \,]$ e determine $c \in \,]\, \text{-}1\, , \pi/2\, [$ que faz $f'(c) = 0$.

17 - Mostre que sendo,

$$f(b) = f(a) = f'(a) = \ \dots\ = f^{(n)}(a) = 0 \quad \text{e } f^{(n)}(x) \text{ regular em } [\, a\, , b\,] \ ,$$

então $f^{(n+1)}(x)$ anula-se entre a e b .

18 - Mostre que sendo $f(x)$ regular em $[\, a\, , b\,]$, $f(a) > f(b)$ e $f(x) \geq f(a)$ para $x \in [a\, , a + \varepsilon\, [$, então $f'(c) = 0$ para certo ponto c entre a e b .

19 - Aplique o teorema de Lagrange a $y = log\, x$ no intervalo $[\, n\, ,\, n{+}1\,]$ com $n \in \mathbf{N}$ e deduza daí que $lim\,(\, 1 + 1/2\ +\ ...\ + 1/n) = +\infty$.

20 - Utilize o teorema de Lagrange para provar que,

$$|\, sen\, x\ -\ sen\, y\, |\ \leq\ |\, x\ -\ y\, |\ .$$

21 - Utilize o teorema de Lagrange para provar que , com $h \neq 0$ e $h < 1$,

$$h\ <\ log\ \frac{1}{1-h}\ <\ \frac{h}{1-h}\quad .$$

22 - Utilize o teorema de Lagrange para provar que,

$$\frac{x-a}{x}\ <\ log\ \frac{x}{a}\ <\ \frac{x-a}{a}\quad ,\ \text{para}\ 0\ <\ a\ <\ x\ .$$

23 - Aplique o teorema de Lagrange a $y\ =\ log\,(\, log\, x)$ no intervalo $[\, n\, ,\, n{+}1\,]$, com $n \geq 2$, para provar que é divergente a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,.\,log\ n}$.

24 - Sendo $[\, a\, ,\, b\,]$ um intervalo a que não pertence zero e onde $f\,(x)$ é regular , mostre que,

$$f\,(b) - f\,(a)\ =\ \frac{b^2\ -\ a^2}{2}\cdot\frac{f\,'(d)}{d}\quad ,$$

para certo $d \in\ ]\, a\, ,\, b\, [$. (**Sugestão :** Aplique o teorema de Cauchy às funções $y = f\,(x)$ e $y = x^2$) .

25 - calcule os limites seguintes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x\ -\ a^{sen\, x}}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[log\,(1-x)\, .\, arc\ cos\ x \right]$; **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{sen^2\, x}\ -\ \frac{1}{x^2} \right)$;

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{log\, x}$; **e)** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{log^2\, x}$; **f)** $\lim\limits_{x \to \pi/4} (tg\ x)^{tg(2x)}$;

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{(x+a)(x+b)}\ -\ x \right]$; **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (1\ -\ 2^{-1/x})^{sen\,(1/x)}$; **i)** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{x^x - 1}$;

j) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x\ -\ b^x}{x}$; **k)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{log\,(x + e^x)}{x}$; **l)** $\lim\limits_{x \to 1} \left[log x\ .\ log\,(log\ x) \right]$;

m) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x} \cdot (1/x)$; **n)** $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/x} \cdot (1/x)$; **o)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2+x^4)}{x \cdot (e^x - 1)}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log\left[sen\,(x+a)\right] - \log(sen\,a)}{sen\,x}$; **q)** $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{sen\,\sqrt[3]{x-1}}{\log\left(\cos\,\sqrt[3]{x-1}\right)}$;

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log\left[tg\,(2x^2)\right]}{\log\left[tg\,(4x^2)\right]}$; **s)** $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\cos x)^{\cos x}$; **t)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\cos(a/x)\right]^x$;

u) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot (\, e^{1/x} - e^{1/(x+1)}\,)$;

v) $\lim\limits_{x\to 0} (\alpha\, a^x + \beta\, b^x + \cdots + \lambda\, l^x)^{1/x}$, com $\alpha+\beta+\ldots+\lambda = 1$;

x) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - 2^{\log x})$; **z)** $\lim\limits_{x\to a} \left[\log(2 - x/a) \cdot cotg\,(x-a)\right]$.

26 - Determine os intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (caso existam) para as funções:

a) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; **b)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$; **c)** $y = |\, x^2 - 5x + 6\,|$; **d)** $y = x \cdot \log x$;

e) $y = \dfrac{\cos x}{2 - sen\,x}$; **f)** $y = tg\,x - \dfrac{2}{\cos x}$; **g)** $y = e^{-x^2}$; **h)** $y = \dfrac{e^x}{x}$;

i) $y = x \cdot e^{-x}$; **j)** $y = \dfrac{1}{1 + sen^2\,x}$; **k)** $y = arc\,tg\,x - \log\sqrt{1+x^2}$;

l) $y = |\,x\,| \cdot e^{-|x-1|}$.

27* - Prove que sendo $f(x) = P(x)/Q(x)$, com $P(x)$ e $Q(x)$ polinómios, então existem constantes a e b tais que $f(x)$ é monótona nos intervalos, $]-\infty, a[$ e $]b, +\infty[$.

28 - Dados n números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, verifique que o valor de x que minimiza a soma $S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ é a média aritmética dos valores dados.

29 - Estude do ponto de vista da convexidade e concavidade as seguintes funções:

a) $y = \log(x^2 + 2x + 2)$; **b)** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$; **c)** $y = e^{-x^2+1}$; **d)** $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4x + 4}$.

RESPOSTAS:

1 - a) Não existe derivada : derivada à direita = 0 , derivada à esquerda = 2 ;
b) Não existe derivada : derivada à direita = 0 , derivada à esquerda = 1 ;
c) Existe derivada = 2 ; **d)** Em $x = 2$ existe derivada = 1/2 ; em $x = 1$ não existe derivada : derivada à direita = $+\infty$, derivada à esquerda não existe ;
e) Não existe derivada, nem derivadas laterais ; **f)** Existe derivada = 1 ;
g) Existe derivada = 0 ; **h)** Não existe derivada : derivada à direita = 0 , derivada à esquerda = $+\infty$; **i)** Não existe derivada : derivada à direita = 1 , derivada à esquerda = -1 .

2 - a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x + |x|)$; **b)** Impossível ; **c)** $f(x) = -\sqrt[3]{x}$; **d)** $f(x) = \sqrt[3]{x + |x|}$;

e) $f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \le 0 \\ 1 & , \ x > 0 \end{cases}$.

3 - a) $y' = sec^2 x - 1$; **b)** $y' = \dfrac{2 - 2\,sen\,x + x\,cos\,x}{(1 - sen\,x)^2}$; **c)** $y' = \dfrac{1}{1 + x^2} \cdot e^{arc\,tg\,x}$;

d) $y' = 2x$; **e)** $y' = 2\,sen\,x\ cos\,x$; **f)** $y' = (3 + 2\log x)\,x$; **g)** $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

h) $y' = [\,1 + \log x \,.\, \log(\log x)] \,.\, (\log x)^{x-1}$;

i) $y' = [\,sen\,(2x) + 2x \,.\, cos\,(2x) \,.\, \log x\,] \,.\, x^{sen\,(2x)\,-\,1}$;

j) $y' = [\,1 + (x - 1 + x \,.\, \log x) \,.\, \log x] \,.\, x^{x^{x-1} + x - 2}$;

k) $y' = [\,2(1 - x) - (1 + 2x) \,.\, \log(1 + 2x)] \,.\, (1 + 2x)^{-x}$; **l)** $y' = -\dfrac{2\,e^{x-1}}{(1 + 2e^{x-1})^2}$;

m) $y' = \dfrac{1}{x \,.\, \log x}$; **n)** $y' = [\,sen^2 (1/x)] \,.\, [\,sen\,(1/x) - (3/x) \,.\, cos\,(1/x)]$; **o)** $y' = n/x$;

p) $y' = \dfrac{2x}{\left[arc\,cos\left(\log \dfrac{1}{1 + x^2}\right)\right] \,.\, \sqrt{1 - \log^2 \dfrac{1}{1 + x^2}} \,.\, (1 + x^2)}$;

q) $y' = \left[\dfrac{\log(1 + x^2)}{x} + \dfrac{2x \,.\, \log x \,.\, \log(\log x)}{1 + x^2}\right] \cdot (\log x)^{\log(1 + x^2) - 1}$;

r) $y' = \dfrac{-x}{|x|} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; s) $y' = \dfrac{x + sen\,x}{x \,.\, sen\,x}$.

4 - $m = n = q = 1/2$.

5 - $\pi/4$.

6 - a) São ; **b)** $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

7 - $a = -4/\pi$ e $b = -1$.

8 - a) 1,0349 ; **b)** 0,01 ; **c)** 79/27 ; **d)** 2,323 .

10 - a) $dy = \dfrac{1}{x}\,dx$; **b)** $dy = \left(\dfrac{1}{x}\cdot sen\,x + cos\,x\,.\,log\,x\right)dx$;

c) $dy = \left[(cos\,x - sen\,x)\,.\,log\,\sqrt{x} + \dfrac{sen\,x + cos\,x}{2x}\right]dx$.

12 - b) Por exemplo a função, $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}\,.\,sen\,(1/x) & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$.

15 - O primeiro limite pode ser finito (caso de $y = e^{-x}$) ou infinito [caso de $y = (x - a)^{-1}$] .

16 - $c = 0$.

25 - a) 0 ; **b)** 0 ; **c)** $1/3$; **d)** $+\infty$; **e)** 0 ; **f)** $1/e$; **g)** $(a+b)/2$; **h)** 1 ; **i)** 1 ; **j)** $log\,a - log\,b$; **k)** 1 ; **l)** 0 ; **m)** 0 ; **n)** $-\infty$; **o)** 1 ; **p)** $cotg\,a$; **q)** $-\infty$; **r)** 1 ; **s)** 1 ; **t)** 1 ; **u)** 1 ; **v)** $a^{\alpha}\,.\,b^{\beta}\,.\,\ldots\,.\,l^{\lambda}$; **x)** $+\infty$; **z)** $-1/a$.

26 - a) Decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$, crescente em $[-1, 1]$, mínimo absoluto = $= -1/2$ e máximo absoluto = $1/2$;

b) Decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $]0, +\infty[$, crescente em $[-2, 0[$, mínimo absoluto = $= -1/4$;

c) Decrescente em $]-\infty, 2]$ e em $[5/2, 3]$, crescente em $[2, 5/2]$ e em $[3, +\infty[$, mínimo absoluto = 0 e máximo local = $1/4$;

d) Decrescente em $]0, 1/e]$, crescente em $[1/e, +\infty[$, mínimo absoluto = $-1/e$;

e) Crescente em qualquer intervalo contido em $\{x : sen\,x \leq 1/2\}$, decrescente em qualquer intervalo contido em $\{x : sen\,x \geq 1/2\}$, mínimo absoluto = $-\sqrt{3}/3$ e máximo absoluto = $\sqrt{3}/3$;

f) Crescente em qualquer intervalo contido na intersecção do domínio com o conjunto $\{x : sen\,x \leq 1/2\}$, decrescente em qualquer intervalo contido na intersecção do domínio com $\{x : sen\,x \geq 1/2\}$, máximo local = $-\sqrt{3}$ e mínimo local = $\sqrt{3}$;

g) Crescente em $]-\infty, 0]$, decrescente em $[0, +\infty[$, máximo absoluto = 1 ;

h) Crescente em $[1, +\infty[$, decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, 1]$, mínimo local = e ;

i) Crescente em $]-\infty, 1]$, decrescente em $[1, +\infty[$, máximo absoluto = $1/e$;

j) Crescente em qualquer intervalo da forma $[k\pi + \pi/2\ ,\ (k+1)\pi]$, com k inteiro, decrescente em qualquer intervalo da forma $[k\pi\ ,\ k\pi + \pi/2]$, com k inteiro, máximo absoluto = 1 e mínimo absoluto = $1/2$;

k) Crescente em $]-\infty, 1]$, decrescente em $[1, +\infty[$, máximo absoluto = $\pi/4 - (log\,2)/2$;

l) Crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[0, 1]$, decrescente em $[-1, 0]$ e em $[1, +\infty[$, máximo absoluto = 1 , máximo local = $1/e^2$ e mínimo absoluto = 0 .

29 - a) Côncava em $]-\infty, -2]$ e em $[0, +\infty[$, convexa em $[-2, 0]$, $x = 0$ e $x = -2$ são abcissas de pontos de inflexão ;

b) Convexa em $]1, +\infty[$, côncava em $]-\infty, 1[$;

c) Convexa em $]-\infty\ ,\ -\sqrt{2}/2[$ e em $[\sqrt{2}/2\ ,\ +\infty[$, côncava em $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$, $x = \pm\sqrt{2}/2$ são abcissas de pontos de inflexão ;

d) Convexa em $[0, 2[$ e em $]2, +\infty[$, côncava em $]-\infty, 0]$, $x = 0$ é abcissa de ponto de inflexão .

CAPÍTULO VIII

APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE FUNÇÕES

1. Polinómios de Taylor

Seja $f(x)$ uma função real de variável real com domínio no conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ e considere--se um ponto a interior do domínio. Suponha-se que a função admite derivadas até à ordem n -1 em todos os pontos de certa $V_\varepsilon(a)$ e derivada de ordem n em $x = a$ (com n = 1 esta hipótese traduz-se na existência de primeira derivada para a função no ponto $x = a$). Nestas condições, chama-se *polinómio de Taylor de ordem n* (ou *n-ésimo polinómio de Taylor*) de $f(x)$ com origem no ponto a, ao polinómio em $x - a$,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n \ ,$$

que verifica as seguintes condições:

$$P_n(a) = f(a)\ ,\ \ P_n{}'(a) = f'(a)\ ,\ \ P_n{}''(a) = f''(a)\ ,\ \ldots\ ,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\ .$$

Estas condições permitem determinar univocamente os coeficientes do polinómio $P_n(x)$. Com efeito,

$$P_n(a) = f(a) \Rightarrow a_0 = f(a)$$

$$\begin{aligned} P_n{}'(a) &= [\, a_1 + 2\,a_2(x-a) + 3\,a_3(x-a)^2 + \ldots + n\,a_n(x-a)^{n-1}\,]_{x=a} = \\ &= f'(a) \Rightarrow a_1 = f'(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n{}''(a) &= [\, 2\,a_2 + 6\,a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)\,a_n(x-a)^{n-2}\,]_{x=a} = \\ &= f''(a) \Rightarrow 2\,a_2 = f''(a) \Rightarrow a_2 = f''(a)/(2!) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n{}'''(a) &= [\, 6\,a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)\,a_n(x-a)^{n-3}\,]_{x=a} = \\ &= f'''(a) \Rightarrow 6\,a_3 = f'''(a) \Rightarrow a_3 = f''(a)/(3!) \end{aligned}$$

...

$$P_n^{(n)}(a) = (n!)\,a_n = f^{(n)}(a) \Rightarrow a_n = f^{(n)}(a)/(n!)\ .$$

Tem-se assim que o n-ésimo polonómio de Taylor de $f(x)$ com origem no ponto $x = a$ é ,

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)\,.\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a)\ .$$

2. Fórmula de Taylor

Seja $f\,(x)$ uma função real de variável real com domínio $A \subseteq \mathbf{R}$ e seja a um ponto interior de A . Suponha-se que a função admite derivadas até à ordem n - 1 em todos os pontos de certa $V_\varepsilon(a)$ e derivada de ordem n em $x = a$. Nestas condições, vamos ver que a diferença,

$$r_n(x) = f(x) - [\, f(a) + (x-a)\,.\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a)\,]\ ,$$

entre $f\,(x)$ e o respectivo polinómio de Taylor de ordem n é um infinitésimo de ordem superior a $(x - a)^n$ quando x tende para a , ou seja,

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0\ .$$

Note-se que o cálculo do limite precedente pela regra do quociente conduz a uma indeterminaçãodo tipo 0/0 . Sendo $n = 1$, a função $f\,(x)$ admite primeira derivada no ponto $x = a$ e a aplicação da regra de L'Hospital permite imediatamente levantar a indeterminação:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_1(x)}{(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - (x-a)\,.\,f'(a)}{(x-a)} = \frac{f'(a) - f'(a)}{1} = 0\ .$$

Para $n > 1$, como $r_n(x)$ e $(x - a)^n$ admitem primeiras derivadas em certa $V_\varepsilon(a)$,

$$r_n'(x) = f'(x) - [\,.\,f'(a) + 2\cdot\frac{(x-a)}{2!}\cdot f''(a) + \cdots + n\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{n!}\cdot f^{(n)}(a)\,]\ ,$$

$$\left[(x-a)^n\right]' = n\,(x-a)^{n-1}\ ,$$

podemos então usar a regra de Cauchy para tentar levantar a indeterminação:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n'(x)}{n\,.\,(x-a)^{n-1}}\ ,$$

mas somos de novo conduzidos a uma indeterminação do tipo 0/0 , como facilmente se conclui observando a expressão que dá $r_n'(x)$; podemos prosseguir sucessivamente com derivadas de ordem superior, até à ordem n - 1, porque até esta ordem $r_n(x)$ e $(x - a)^n$ possuem derivadas em $V_\varepsilon(a)$ as quais tendem sempre para zero quando x tende para a :

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n.(n-1)\,.\,\ldots\,.\,2\,.\,(x-a)}\ ,$$

em que,

$$r_n^{(n-1)}(x) \;=\; f^{(n-1)}(x) \;-\; f^{(n-1)}(a) \;-\; (x-a)\,.\,f^{(n)}(a)\,.$$

Mas nova indeterminação tipo 0/0 surge ao tentarmos calcular o limite do segundo membro pela regra do quociente. Dada a existência da derivada $f^{(n)}(a)$, tem-se,

$$[\,r_n^{(n-1)}(x)\,]'_{x=a} \;=\; f^{(n)}(a) \;-\; f^{(n)}(a) = 0$$

$$[\,n(n\text{-}1)\ \ldots\ 2(x\ \text{-}\ a)]'_{x=a} = n! \quad ,$$

podendo portanto usar-se a regra de L'Hospital para levantar a última indeterminação :

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n.(n-1)\,.\ldots.\,2\,.\,(x-a)} = \frac{f^{(n)}(a) \;-\; f^{(n)}(a)}{n!} = 0\,,$$

como se queria provar.

Podemos portanto enunciar:

Teorema 1 : *Sendo* $f\,(x)$ *derivável até à ordem* n - 1 *em certa* $V_\varepsilon\,(a)$ *contida no seu domínio e existindo a derivada de ordem* n *no ponto* $x = a$ *, tem-se:*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,.f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a) \;+ r_n(x)$$

com,

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Demonstração: O teorema é evidente tendo em conta as considerações que o precedem . Da definição de $r_n(x)$ como sendo a diferença entre $f\,(x)$ e o n-ésimo polinómio de Taylor com origem em $x = a$, resulta logo a conclusão.

A igualdade do enunciado designa-se por *fórmula de Taylor* de ordem n para $f\,(x)$ com origem no ponto a . A parte polinomial da fórmula designa-se por *parte principal* ; a parcela $r_n(x)$ designa-se por *parte complementar* ou *resto* da fórmula de Taylor.

De notar que o aspecto mais relevante da fórmula do teorema 1 não está na igualdade em si, a qual, dado o modo como se definiu $r_n(x)$ é mesmo uma identidade em A , mas na afirmação de que o resto é um infinitésimo de ordem superior a $(x\text{ - }a)^n$ quando x tende para a . Ou seja, o que é fundamental no teorema é a afirmação de que o resto da fórmula, quando x tende para a , tende mais rapidamente para zero do que a parcela de mais elevado expoente que figura na parte polinomial. Este facto permite aproximar $f\,(x)$

pelo polinómio de grau n do segundo membro da fórmula, com um erro negligenciável quando x está suficientemente próximo de a.

Quando o ponto a assumido como origem da fórmula de Taylor for $a = 0$, a correspondente fórmula é designada em particular por fórmula de *Mac-Laurin* :

$$f(x) = f(0) + x \,.f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(0) + r_n(x)$$

com,

$$\lim_{x \to 0} \frac{r_n(x)}{x^n} = 0 \,.$$

Como aplicação, vejamos o cálculo de *sen* 0,3 usando a quarta fórmula de Mac-Laurin para $f(x) = sen\, x$. Tem-se:

$$f(0) = 0 \;,\; f'(0) = 1 \;,\; f''(0) = 0 \;,\; f'''(0) = -1 \;\text{ e }\; f^{(IV)}(0) = 0 \;,$$

donde,

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{3!} + r_4(x) \quad , \text{ com } \lim_{x \to 0} \frac{r_4(x)}{x^4} = 0 \,.$$

Então, negligenciando $r_4(0{,}3)$, tem-se,

$$sen\, 0{,}3 \approx 0{,}3 - \frac{0{,}3^3}{3!} = 0{,}2955 \,,$$

devendo referir-se para comparação que o valor de *sen* 0,3 com seis decimais exactas é 0,295520 .

3. Formas especiais do resto

O resto da fórmula de Taylor de ordem n foi referido como sendo um infinitésimo de ordem superior a $(x - a)^n$ quando x tende para a . Assumindo hipóteses adicionais podem obter-se para o resto formas especiais que se revelam de grande utilidade em algumas aplicações.

A primeira dessas formas especiais é o *resto de Peano* , a que se refere o teorema seguinte:

Teorema 2 : *Sendo* $f(x)$ *derivável até à ordem n em certa* $V_\varepsilon(a)$ *contida no seu domínio e existindo a derivada de ordem* $n+1$ *no ponto* $x = a$ *, o resto da fórmula de Taylor de ordem* n *pode assumir a seguinte forma:*

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left[f^{(n+1)}(a) + \alpha_n(x) \right] \;,\; com \;\; \lim_{x \to a} \alpha_n(x) = 0$$

Demonstração : As hipóteses do teorema permitem escrever as fórmulas de Taylor de ordens n e $n+1$:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,.\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a) + r_n(x)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,.\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a) +$$
$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(a) + r_{n+1}(x)\,.$$

Subtraindo ordenadamente, resulta:

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(a) + r_{n+1}(x)\,,$$

e como $r_{n+1}(x)$ é um infinitésimo de ordem superior a $(x - a)^{n+1}$ quando x tende para a , tem-se :

$$r_{n+1}(x) = (x - a)^{n+1}\,.\,\beta_n(x)\ \ ,\ \text{com}\ \ \lim_{x\to a}\beta_n(x) = 0\ \ ,$$

e então:

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(a) + (x - a)^{n+1}\,.\,\beta_n(x) =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left[f^{(n+1)}(a) + (n+1)!\,\beta_n(x)\right] = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left[f^{(n+1)}(a) + \alpha_n(x)\right]\,,$$

com, $\lim\limits_{x\to a}\alpha_n(x) = \lim\limits_{x\to a}\left[(n+1)!\,\beta_n(x)\right] = 0$ como se queria provar.

A segunda das formas especiais do resto que vamos estudar é dada no teorema seguinte:

Teorema 3 : *Admitindo $f(x)$ derivada finita até à ordem $n + 1$ em todos os pontos de um intervalo I e sendo a um ponto interior de I , então o resto $r_n(x)$ da fórmula de Taylor de ordem n pode escrever-se , para cada $x \in I - \{a\}$ (para $x = a$ o resto é nulo), do seguinte modo:*

$$r_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot f^{(n+1)}(x^*)\ ,$$

com x^* estritamente compreendido entre a e x

<u>Demonstração</u> : Considere-se um particular $x_0 \in I - \{a\}$ e defina-se a seguinte função auxiliar:

$$\varphi(x) = f(x_0) - f(x) - (x_0 - x)\,.\,f'(x) - \frac{(x_0 - x)^2}{2!}\cdot f''(x) -$$

$$- \cdots - \frac{(x_0 - x)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(x) - \frac{(x_0 - x)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \lambda \ ,$$

com λ (constante) a determinar . Supondo que $x_0 > a$, tem-se $[\, a \,, x_0 \,] \subseteq I$ e devido às hipóteses do teorema fica garantido que a função $\varphi(x)$ é regular no intervalo $[\, a \,, x_0 \,]$; caso seja $x_0 < a$, a função $\varphi(x)$ é regular no intervalo $[\, x_0 \,, a \,]$.

Por outro lado, $\varphi(x_0) = 0$ e pode determinar-se a constante λ de forma que seja também $\varphi(a) = 0$: basta determinar λ pela condição,

$$0 = f(x_0) - f(a) - (x_0 - a)\,.\,f'(a) - \frac{(x_0 - a)^2}{2!}\cdot f''(a) -$$

$$- \cdots - \frac{(x_0 - a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a) - \frac{(x_0 - a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \lambda \ ,$$

o que é sempre possível em virtude de $x_0 \in I - \{a\} \Rightarrow x_0 - a \neq 0$. A constante λ verifica pois a igualdade,

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a)\,.\,f'(a) + \frac{(x_0 - a)^2}{2!}\cdot f''(a) +$$

$$+ \cdots + \frac{(x_0 - a)^n}{n!}\cdot f^{(n)}(a) + \frac{(x_0 - a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot \lambda \ .$$

O teorema de Rolle aplicado à função $\varphi(x)$ no intervalo de extremidades a e x_0 garante a existência de um valor c compreendido entre tais extremidades tal que $\varphi'(c) = 0$; e como,

$$\varphi'(x) = -f'(x) - \left[-f'(x) + (x_0 - x)\,.\,f''(x)\right] -$$

$$-\left[-(x_0 - x)\,.\,f''(x) + \frac{(x_0 - x)^2}{2!}\cdot f'''(x)\right] - \cdots -$$

$$-\left[-\frac{(x_0 - x)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n)}(x) + \frac{(x_0 - x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x)\right] + \frac{(x_0 - x)^n}{n!}\cdot \lambda =$$

$$= -\frac{(x_0 - x)^n}{n!}\cdot f^{(n+1)}(x) + \frac{(x_0 - x)^n}{n!}\cdot \lambda = \frac{(x_0 - x)^n}{n!}\cdot \left[\lambda - f^{n+1)}(x)\right] ,$$

tem-se, $\varphi'(c) = 0 \ \wedge \ c \neq x_0 \Rightarrow \lambda = f^{(n+1)}(c)$. Assim se conclui que,

$$f(x_0) = f(a) + (x_0 - a) \,.\, f'(a) + \frac{(x_0 - a)^2}{2!} \cdot f''(a) +$$

$$+ \cdots + \frac{(x_0 - a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + \frac{(x_0 - a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \lambda =$$

$$= f(a) + (x_0 - a) \,.\, f'(a) + \frac{(x_0 - a)^2}{2!} \cdot f''(a) +$$

$$+ \cdots + \frac{(x_0 - a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + \frac{(x_0 - a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(c)$$

com certo c estritamente compreendido entre a e x_0 .

O argumento precedente pode aplicar-se a qualquer $x \in I - \{a\}$, dependendo naturalmente o valor c encontrado do particular x em causa , ou seja, nas condições do enunciado, tem-se:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \,.\, f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + r_n(x)$$

com,

$$r_n(x) = \frac{(x - a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x^*) \ ,$$

e x^* estritamente compreendido entre a e x .

4. Aplicação da fórmula de Taylor no estudo dos máximos e mínimos

Uma aplicação notável da fórmula de Taylor é a que se faz no estudo dos máximos e mínimos. Quando $f'(x)$ se anula em $x = a$, ponto interior do domínio da função, esse ponto é como sabemos um possível extremante relativo da função. Sendo possível estudar o comportamento de $f(x)$ antes e depois de a , é fácil dizer se o ponto é ou não extremante. Mas, sendo difícil esse estudo, a questão pode esclarecer-se recorrendo a um resultado que provém da fórmula de Taylor.

Considere-se então a função $f(x)$, seja a um ponto interior do respectivo domínio e suponha-se que $f'(a) = 0$. Seja m a ordem da primeira das derivadas sucessivas que não se anula para $x = a$:

$$f'(a) = 0 \ , \ f''(a) = 0 \ , \ \ldots \ , \ f^{(m-1)}(a) = 0 \ \text{ e } \ f^{(m)}(a) \neq 0 \ .$$

Escreva-se a fórmula de Taylor de ordem m - 1 , com origem em $x = a$ e resto na forma de Peano :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^m}{m!} \cdot \left[f^{(m)}(a) + \alpha_{m-1}(x) \right] \quad , \text{ com } \lim_{x \to a} \alpha_{m-1}(x) = 0 \, .$$

Como $f^{(m)}(a) \neq 0$ e $\alpha_{m\text{-}1}(x)$ é um infinitésimo quando x tende para a, existe uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ na qual a expressão $f^{(m)}(a) + \alpha_{m\text{-}1}(x)$ tem o sinal da derivada $f^{(m)}(a)$. Então:

a) Se m for par, a segunda parcela do segundo membro da igualdade tem o sinal de $f^{(m)}(a)$; assim, se for $f^{(m)}(a) > 0$, essa segunda parcela será positiva para todo o $x \neq a$ pertencente a certa vizinhança de a e assim teremos a desigualdade $f(x) > f(a)$ na referida vizinhança ($x \neq a$), ou seja, em $x = a$ a função tem um mínimo relativo (a é então minimizante relativo) ; se, pelo contrário, $f^{(m)}(a) < 0$, teremos $f(x) < f(a)$ em certa vizinhança de a ($x \neq a$), ou seja, em $x = a$ a função tem um máximo relativo (a é então maximizante relativo).

b) Se m for ímpar, a segunda parcela do segundo membro da igualdade tem o sinal de $f^{(m)}(a)$ na semivizinhança direita de a e o sinal contrário na semivizinhança esquerda de a ; assim sendo, a diferença $f(x) - f(a)$ muda de sinal quando x passa do lado esquerdo de a para o seu lado direito, ou seja, em $x = a$ a função não tem máximo nem mínimo.

Por exemplo, com $f(x) = x^3 \, . \, sen\, x$, tem-se $f'(0) = 0$. Calculando as sucessivas derivadas de $f(x)$ em $x = 0$, obtém-se,

$$f''(0) = f'''(0) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(IV)}(0) = 24 > 0 \, ,$$

assim se concluindo que em $x = 0$ a função tem um mínimo relativo.

5. <u>Exercícios</u>

1 - Utilizando para cada caso a conveniente fórmula de Taylor, desenvolva os polinómios:

a) $x^3 - 8x^2 + 5x + 3$, segundo as potências de $x - 2$;

b) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, segundo as potências de $x - 1$;

c) $2x^5 + 3$, segundo as potências de $x - 2$.

2 - Escreva a segunda fórmula de Mac-Laurin com resto de Peano para a função $f(x) = \log(1 + x)$. Negligenciando o infinitésimo $\alpha_2(x)$ que aparece no resto, calcule um valor aproximado para $\log 1{,}1$.

3 - Escreva a terceira fórmula de Taylor para $f(x) = x^{1/2}$, com $a = 1$, apresentando o resto na forma de Peano.

4 - Escreva a n-ésima fórmula de Taylor para $f(x) = e^x$, com $a = 1$, apresentando o resto na forma de Lagrange. Calcule o limite do resto quando n tende para $+\infty$.

5 - Utilizando as segundas fórmulas de Mac-Laurin para as funções $f(x) = \log(x + 1)$ e $g(x) = \cos x$, calcule,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x + 1) - x}{1 - \cos x} .$$

6 - Utilize a primeira fórmula de Taylor para $f(x) = \operatorname{sen} x$, com $a = \pi/2$, para provar que,

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} x - 1}{x - \pi/2} = 0 .$$

7 - Utilize a primeira fórmula de Mac-Laurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$, para provar que,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 .$$

8 - Utilize a fórmula de Mac-Laurin para provar a fórmula do binómio de Newton:

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} . x + \binom{n}{2} . x^2 + \cdots + \binom{n}{n} . x^n .$$

9 - Utilizando os sinais das derivadas de ordem superior à primeira, investigue os máximos e mínimos relativos de :

a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 72x + 18$; **b)** $g(x) = x^{-1} . \log x$; **c)** $h(x) = x^4 . e^x$;

d) $s(x) = \log(x^2 + 2x + 2)$.

10* - Dada a função $f(x)$, suponha que para cada $h \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$, se tem,

$$f(a+h) = f(a) + h . f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a + \theta h) \quad , \text{ com } 0 < \theta < 1 .$$

Em geral θ depende de h : prove que se existe finita e não nula a terceira derivada de $f(x)$ em $x = a$, então $h \to 0 \Rightarrow \theta \to 1/3$.

11* - Dada a função $f(x)$, suponha que para cada $h \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[$, se tem,

$$f(a+h) = f(a) + h . f'(a) + \frac{h^2}{2!} \cdot f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a + \theta h) \quad ,$$

com $0 < \theta < 1$. Em geral θ depende de h : prove que se existe finita e não nula $f^{(n+1)}(a)$, então $h \to 0 \Rightarrow \theta \to 1/(n+1)$.

RESPOSTAS :

1 - a) $-11 - 15(x-2) - 2(x-2)^2 + (x-2)^3$;

b) $5 + 10(x-1) + 10(x-1)^2 + 5(x-1)^3 + (x-1)^4$;

c) $67 + 160(x-2) + 160(x-2)^2 + 80(x-2)^3 + 20(x-2)^4 + 2(x-2)^5$.

2 - $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \cdot [2 + \alpha_2(x)]$, com $\lim_{x \to 0} \alpha_2(x) = 0$; log 1,1 ≈ 0,09533 .

3 - $x^{1/2} = 1 + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{(x-1)^3}{16} + \frac{(x-1)^4}{24} \cdot [-15/16 + \alpha_3(x)]$,

com $\lim_{x \to 1} \alpha_3(x) = 0$.

4 - $e^x = e + (x-1) . e + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot e + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} \cdot e + \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{w_x}$,

com w_x entre 1 e x ; o resto tende para zero quando n tende para $+\infty$.

5 - O limite é igual a -1 .

9 - a) Máximo relativo $= f(3) = 99$, Mínimo relativo $= f(4) = 98$;

b) Máximo relativo $= g(e) = 1/e$;

c) Mínimo relativo = $h(0) = 0$, Máximo relativo = $h(-4) = 256\, e^{-4}$;

d) Mínimo relativo = $s(-1) = 0$.

CAPITULO IX

PRIMITIVAS

1. Generalidades. Primitivação imediata e quase imediata

Sendo $f(x)$ uma função real de variável real definida no intervalo não degenerado I, chama-se *primitiva* de $f(x)$ em I a qualquer função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todos os $x \in I$; nas extremidades do intervalo $a = Inf\, I$ e $b = Sup\, I$, caso lhe pertençam, a definição exige que $F'_d(a) = f(a)$ e que $F'_e(b) = f(b)$, respectivamente.

Vejamos alguns exemplos:

1) $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2\,x$ no intervalo $]-\infty, +\infty[$;

2) $F(x) = log\, x$ é uma primitiva de $f(x) = 1/x$ no intervalo $]\,0, +\infty[$;

3) $F(x) = log\,|\,x\,|$ é uma primitiva de $f(x) = 1/x$ no intervalo $]-\infty, 0\,[$;

4) $F(x) = e^x$ e $G(x) = e^x + 2$ são duas primitivas de $f(x) = e^x$ em $]-\infty, +\infty[$.

Note-se que sendo $F_0(x)$ uma particular primitiva de $f(x)$ em I, então qualquer função $F(x) = F_0(x) + k$, com k constante, é igualmente primitiva de $f(x)$ no intervalo I: se a derivada de $F_0(x)$ é $f(x)$ em I, então também a derivada de $F(x) = F_0(x) + k$ é $f(x)$ em I, porque a derivada de uma constante é zero.

Inversamente , é fácil provar , utilizando um corolário do teorema de Lagrange , que sendo $F_0(x)$ e $F(x)$ duas primitivas de uma mesma função $f(x)$ em I, então $F(x) - F_0(x) = k$ (constante) , ou seja, $F(x) = F_0(x) + k$. Em particular, qualquer primitiva da função nula num intervalo é constante no intervalo em causa, porque $F_0(x) = 0$ é uma primitiva da função nula.

As considerações precedentes mostram que dada uma função $f(x)$ definida num intervalo I , desde que se conheça uma sua particular primitiva nesse intervalo, fica perfeitamente conhecida a família de todas as primitivas da função : designando por $F_0(x)$ uma particular primitiva de $f(x)$ em I, a expressão geral das primitivas de $f(x)$ em I é dada por $F(x) = F_0(x) + k$.

Uma particular primitiva de $f(x)$ que é usada em diversas aplicações é a primitiva que se anula em certo ponto do intervalo I: sendo $F_0(x)$ uma particular primitiva de $f(x)$ em I, da expressão geral das primitivas de $f(x)$ em I , $F(x) = F_0(x) + k$, resulta com $k = -F_0(a)$ a primitiva,

$$F_1(x) = F_0(x) - F_0(a)\,,$$

que se anula quando $x = a$.

Vejamos alguns exemplos:

1) Sendo $f(x) = cos\, x$, uma sua particular primitiva no intervalo $]-\infty, +\infty[$ é a função $F_0(x) = sen\, x$. A família geral das primitivas é $F(x) = sen\, x + k$. Fixando, por exemplo $a = \pi/2$, a primitiva que se anula em $x = \pi/2$ é a função $F_1(x) = sen\, x - 1$.

2) Sendo $f(x) = 2\,x\,e^{x^2}$, uma sua particular primitiva em $]-\infty, +\infty[$ é a função $F_0(x) = e^{x^2}$. A família geral das primitivas é $F(x) = e^{x^2} + k$. Fixando , por exemplo $a = 0$, a primitiva que se anula em $x = 0$ é a função $F_1(x) = e^{x^2} - 1$.

No que se segue, deverão ser tidas em conta as seguintes convenções:

a) Usa-se geralmente o símbolo $P\,f(x)$ para designar a família das primitivas de $f(x)$. Por exemplo $P\,e^x = e^x + k$.

b) Normalmente suprime-se a referência à constante k , escrevendo-se por exemplo $P\,e^x = e^x$, devendo então subentender-se que a função indicada no segundo membro é uma das primitivas de $f(x)$.

c) Quando não se faz referência explícita ao intervalo em que se está a primitivar $f(x)$, deve subentender-se que se trata do intervalo ou dos intervalos onde $f(x)$ está definida. Por exemplo, quando se pede para calcular $P\ 1/x$, sem se explicitar qual o intervalo de primitivação , pressupõe-se que se pretende o cálculo em $]-\infty, 0[$ e também em $]0, +\infty[$: $P\ 1/x = log\,|\,x\,|$.

O teorema seguinte fundamenta regras de primitivação do produto de uma constante por uma função e de uma soma de funções:

Teorema 1 : ***a)*** *Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ em I , então $k\,.\,F(x)$ é uma primitiva de $k\,.\,f(x)$ no mesmo intervalo ;*
b) *Sendo $F_1(x)$, ... , $F_m(x)$, primitivas de , respectivamente , $f_1(x)$, ... , $f_m(x)$ no intervalo I , então $F_1(x) + \ldots + F_m(x)$ é uma primitiva de $f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ no mesmo intervalo.*
Simbolicamente: ***a)*** $P\,k\,.\,f(x) = k\,.\,P\,f(x)$ *;*
b) $P\,[\,f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)\,] = P\,f_1(x) + P\,f_2(x) + \ldots + P\,f_m(x)$

Demonstração : A afirmação da alínea a) resulta de $[\,k\,.\,F(x)\,]' = k\,.\,F'(x) = k\,.\,f(x)$, sendo a segunda igualdade justificada por ser $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Quanto à afirmação da alínea b) ela resulta de ser,

$$[F_1(x) + F_2(x) + \; ... + F_m(x)]' = F'_1(x) + F'_2(x) + \; ... + F'_m(x) =$$

$$= f_1(x) + f_2(x) + \; ... + f_m(x) \; ,$$

porque por hipótese $F_i(x)$ é uma primitiva de $f_i(x)$ $(i = 1 , 2 , ... , m)$.

Com o conhecimento das regras de derivação e das regras do teorema precedente, podem obter-se primitivas de um grande número de funções correntes nas aplicações. Vejamos alguns exemplos (na apresentação dos resultados omitiremos sempre a constante k , isto é, indicaremos sempre uma primitiva particular em vez da expressão geral das primitivas) :

1) $P\, c = c\, x$ (c constante) ;

2) $P\, x = P\,(1/2)\,.\,2\,x = (1/2)\,.\,P\,2\,x = x^2/2$;

3) $P\,(2x^2 + 3\,x + 4\,) = P\,2x^2 + P\,3\,x + P\,4 = \dfrac{2\,x^3}{3} + \dfrac{3\,x^2}{2} + 4\,x$;

4) $P\,(x + 1)^{\alpha} = \dfrac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$, se $\alpha \neq -1$,

$P\,(x + 1)^{-1} = P\,\dfrac{1}{1+x} = log\,|\,x + 1|$;

5) $P\, e^{2x+1} = P\,(1/2)\,.\,2\,e^{2x+1} = (1/2).\,P\,2\,e^{2x+1} = (1/2)\,.\,e^{2x+1}$;

6) $P\,(sen\,x + cos\,x) = -\,cos\,x + sen\,x$;

7) $P\,\dfrac{1}{1+x^2} = arc\;tg\,x$;

8) $P\,\dfrac{2\,x}{1+x^2} = log\,(1 + x^2)$;

9) $P\,\dfrac{2\,x}{1+x^4} = arc\;tg\,(x^2)$;

10) $P\,\dfrac{2}{\sqrt{1 - 4\,x^2}} = arc\;sen\,(2\,x)$;

11) $P\,\dfrac{1}{x\,.(x+1)} = P\,\dfrac{1}{x} - P\,\dfrac{1}{x+1} = \log|\,x\,| - log\,|\,x + 1|$.

2. <u>Primitivação por partes</u>

Sejam $H(x)$ e $K(x)$ funções deriváveis no intervalo I e representem-se por $H'(x)$ e $K'(x)$ as respectivas derivadas . Na condição de $H(x)\,.\,K'(x)$ ser primitivável no intervalo I , pode obter-se uma primitiva de $H'(x)\,.\,K(x)$, usando a fórmula:

$$P\,H'(x)\,.\,K(x) \;=\; H(x)\,.\,K(x) \;-\; P\,H(x)\,.\,K'(x)\,,$$

podendo tomar-se no segundo membro qualquer das primitivas da função $H(x)\,.\,K'(x)$. Com efeito, derivando o segundo membro da igualdade, obtém--se :

$$[\,H(x)\,.\,K(x) \;-\; P\,H(x)\,.\,K'(x)\,]' = H'(x)\,.\,K(x) + H(x)\,.\,K'(x) - H(x)\,.\,K'(x) =$$

$$= H'(x)\,.\,K(x)\;,$$

o que, por definição de primitiva, justifica a fórmula em causa.

É nesta fórmula que se baseia o chamado *método de primitivação por partes* que passamos a exemplificar :

1) $$P\,x\,.\,log\,x \;=\; \frac{x^2}{2}\cdot log\,x \;-\; P\,\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x} \;=\; \frac{x^2}{2}\cdot log\,x \;-\; P\,\frac{x}{2} \;=$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot log\,x \;-\; \frac{x^2}{4}\;.$$

2) $P\,x\,.\,e^x \;=\; e^x\,.\,x \;-\; P\,e^x\,.\,1 \;=\; e^x\,.\,x \;-\; e^x$.

<u>NOTA</u>: Neste exemplo tomou-se $H'(x) = e^x$ e $K(x) = x$. Caso se tivesse optado por tomar $H'(x) = x$ e $K(x) = e^x$, a fórmula permitiria obter,

$$P\,x\,.\,e^x \;=\; \frac{x^2}{2}\cdot e^x \;-\; P\,\frac{x^2}{2}\cdot e^x\,,$$

e a primitiva que aparece no segundo membro não é imediata. Isto é, embora teoricamente qualquer dos factores possa ser tomado como sendo $H'(x)$, na prática uma das duas possibilidades pode ser preferível à outra.

3) $$P\,cos^2\,x \;=\; P\,(cos\,x\,.\,cos\,x) \;= sen\,x\,.\,cos\,x \;-\; P\,(-\,sen\,x\,.\,sen\,x) \;=$$

$$= sen\,x\,.\,cos\,x \;+ P\,sen^2\,x = sen\,x\,.\,cos\,x \;+ P\,(1 - cos^2\,x) =$$

$$= sen\,x\,.\,cos\,x \;+\; x - P\,cos^2\,x\;,$$

e considerando ter sido tomado no segundo membro a mesma primitiva de $cos^2\,x$ que no primeiro membro, resulta,

$$2\,.\,P\,cos^2\,x \;=\; sen\,x\,.\,cos\,x \;+\; x \;\;\Rightarrow\;\; P\,cos^2\,x \;=\; \frac{sen\,x\,.\,cos\,x \;+\; x}{2}\;.$$

4) $P\ log^2 x\ =\ x\ .\ log^2 x\ -\ P\ x\ .\ 2\ .\ log\ x\ .\ (1/x) =\ x\ .\ log^2 x\ -\ P\ 2\ log\ x =$

$$=\ x\ .\ log^2 x\ -\ [\ 2\,x\ .\ log\,x\ -\ P\ 2\,x\ .\ (1/x)]\ =$$

$$=\ x\ .\ log^2 x\ - 2\,x\ .\ log\,x + P\ 2 =$$

$$=\ x\ .\ log^2 x\ - 2\,x\ .\ log\,x + 2\,x\ .$$

3. Primitivação por substituição

Com base na regra de derivação de uma função composta, pode obter-se o método de *primitivação por substituição*.

Admita-se que $f\,(x)$ é primitivável no intervalo I e seja $x = g(t)$ uma bijecção do intervalo J no intervalo I. Construa-se a função $h\,(t) = f\,[g(t)]\ .\ g'(t)$, o que pressupõe a existência de $g'(t)$ em J. Nestas condições, vejamos em primeiro lugar que $h\,(t)$ é primitivável no intervalo J : sendo $F(x)$ uma primitiva de $f\,(x)$ no intervalo I (que existe por hipótese) , faça-se a composição $F\,[g(t)]$ e calcule-se a respectiva derivada,

$$\{F\,[g(t)]\}' = f\,[g(t)]\ .\ g'(t)\ =\ h(t)\ ,\ \ \forall\ t \in J\ ,$$

resultado que mostra ser $F\,[g(t)]$ uma primitiva de $h(t)$ em J. Vejamos em segundo lugar que, sendo $H(t)$ uma qualquer primitiva de $h(t)$ em J - já vimos que $h(t)$ é primitivável - , a função que se obtém fazendo a composição $H\,[g^{-1}(x)]$ é uma primitiva de $f\,(x)$: basta notar que de,

$$\{F\,[g(t)]\}' =\ h(t)\ = H'(t)\ ,$$

resulta $F\,[g(t)]\ -\ H(t) = k$ (constante) em J ; e fazendo a composição de $F\,[g(t)]\ -\ H(t)$ com $t = g^{-1}(x)$, resulta,

$$F(x) - H\,[g^{-1}(x)]\ =\ k\ \ \text{(constante) em}\ I\,,$$

e desta igualdade resulta que $H\,[g^{-1}(x)]$ é uma primitiva de $f\,(x)$ em I, por ser $F(x)$ supostamente uma primitiva de $f\,(x)$ no mesmo intervalo .

Exemplos de aplicação :

1) Para achar $P\ \dfrac{1}{e^x - 1}$ no intervalo $]\,0\ ,+\infty\,[$, considere-se $x = log\ t$ com t no intervalo $]\,1\ ,+\infty\,[$. Tem-se,

$$h(t) = \frac{1}{t-1}\cdot\frac{1}{t}\ =\ \frac{1}{t-1}\ -\ \frac{1}{t}\ \Rightarrow H(t) = P\ h(t) = log\ (t\ \text{-}\ 1)\ \text{-}\ log\ t\ = log\ \frac{t-1}{t}\ ,$$

donde, fazendo $t = e^x$, resulta,

$$P \; \frac{1}{e^x - 1} \; = \; H(e^x) \; = \; log \; \frac{e^x - 1}{e^x} \quad , \text{ em } \;]\, 0 \, , +\infty \, [\; .$$

Para achar a primitiva da mesma função, mas agora no intervalo $]\, -\infty \, , 0 \, [$, pode usar-se a mesma substituição mas agora com t no intervalo $]\, 0 \, , 1 [$. Tem-se,

$$h(t) = \frac{1}{t - 1} \cdot \frac{1}{t} \; = \; \frac{1}{t - 1} \; - \; \frac{1}{t} \; \Rightarrow H(t) = P \; h(t) = log \, | \, t - 1 | - \; log \, t \; = log \; \frac{1 - t}{t} \; ,$$

donde, fazendo $t = e^x$, resulta,

$$P \; \frac{1}{e^x - 1} \; = \; H(e^x) \; = \; log \; \frac{1 \, - \, e^x}{e^x} \; , \text{ em } \;]\, -\infty \, , 0 \, [\; .$$

Os dois resultados obtidos podem resumir-se num só válido para os dois intervalos :

$$P \; \frac{1}{e^x - 1} \; = \; log \; \frac{| \, e^x \, - \, 1 \, |}{e^x}$$

2) Para achar $P \, \sqrt{a^2 \, - \, x^2}$ em $[\, -a \, , a \,]$ ($a > 0$) , pode fazer-se $x = a \; sen \; t$, com t no intervalo $[\, -\pi/2 \, , \pi/2 \,]$:

$$h(t) = \sqrt{a^2 \, - \, a^2 \, . \, sen^2 \, t} \; . \, a \; cos \; t \; = \; a^2 \, cos^2 \, t \;\; ,$$

$$H(t) = P \;\; a^2 \, cos^2 \, t \; = \; a^2 \, . \; \frac{sen \;\, t \; . \, cos \; t \; + \; t}{2} \qquad \text{(primitivando por partes)} \; ,$$

$$P \, \sqrt{a^2 \, - \, x^2} \; = \; H \, [\; arc \; sen \; (x/a)] \; = \; \frac{x \; . \; \sqrt{a^2 \, - \, x^2}}{2} \; + \; \frac{a^2 \; . \; arc \; sen \; (x \, / \, a)}{2} \; ,$$

obtendo-se este último resultado após alguns cálculos trigonométricos elementares.

4 . <u>Exercícios</u>

1 - Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

a) $x^2 + x + 1$; **b)** e^{x+3} ; **c)** 2^{x-1} ; **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$; **e)** $\dfrac{x}{1+x^2}$; **f)** $\dfrac{2x+1}{1+x^2}$;

g) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$; **h)** $\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^{\alpha}}$; **i)** $\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha}}$; **j)** $cos\,x \,.\, sen\,x$; **k)** $e^{x^5} \,.\, x^4$;

l) $\dfrac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 + 1}$; **m)** $\dfrac{b}{a^2 + x^2}$ $(a\,,\,b \neq 0)$; **n)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; **o)** $\dfrac{x}{a^2 + x^4}$;

p) $sec\,x$; **q)** $\dfrac{log\,x}{x}$; **r)** $\dfrac{sen\,x + sen\,(2x)}{cos\,(x/2)}$; **s)** $\dfrac{2x\,.\,log(x^2+1)}{1+x^2}$;

t) $tg\,x$; **u)** $cotg\,x$; **v)** $\dfrac{1}{x\,.\,log\,x}$; **x)** $(a + b\,x)^n$ $(b \neq 0)$; **y)** $2^x \,.\, 4^{2x}$;

z) $\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$; **aa)** $\dfrac{cos\,x}{2 - cos^2 x}$.

2 - Calcule:

a) A primitiva que se anula para $x = 1$, da função $f(x) = \dfrac{x + 1/2}{x^2 + x}$;

b) A primitiva que toma o valor 1 para $x = 0$, da função $f(x) = \dfrac{1}{4 + 9x^2}$;

c) A função $g(x)$ que admite duas primitivas $G(x)$ e $H(x)$ tais que,

$$G(x) - H(x) = 2 \quad \text{e} \quad G(x) + H(x) = \frac{sen\,(2x)\,.\,cos\,(2x)}{sen^2 x - cos^2 x} \;;$$

d) As funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que uma das primitivas da sua soma e uma das primitivas da sua diferença sejam, respectivamente, $e^x \,.\, sen\,x$ e $x \,.\, sen\,x$;

e) A função $g(x)$ com domínio em **R** - $\{1\}$, tal que, $g'(x) = 1/(x-1)$, $g(0) = 0$ e $g(2) = 3$.

3 - Primitive, por decomposição numa soma de funções, as seguintes funções:

a) $cos^2 x$; **b)** $tg^3 x$; **c)** $\dfrac{1}{sen\,x \,.\, cos^3 x}$; **d)** $\dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^5}$; **e)** $\dfrac{2x+3}{4 + (x-1)^2}$;

f) $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{\sqrt[3]{x+1}}$; g) $\dfrac{x+1}{3+(x-1)^2}$; **h)** $\dfrac{3x+1}{x(x+2)(x-1)}$;

i) $\dfrac{sen\,(2x) + sen\,x + cos^2 x}{cos\,x}$; **j)** $\dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x-1}}$; **k)** $tg^3 x + tg^4 x$.

4 - Primitive por partes as seguintes funções:

a) $log\,x$; **b)** $sen^2 x$; **c)** $arc\,cos\,x$; **d)** $arc\,tg\,x$; **e)** $cos\,x \,.\, log\,(1 + cos\,x)$;

f) $x^2 \,.\, log\,x$; **g)** $x \,.\, sen\,x$; **h)** $sen^3 x \,.\, cos^4 x$; **i)** $x \,.\, log\,|\,x\,|$; **j)** $x^2 \,.\, e^x$;

k) $\dfrac{x \,.\, e^x \,.\, log\,x + e^x}{x}$; **l)** $2x \,.\, arc\,tg\,(x - 1)$; **m)** $e^x \,.\, (tg\,x + tg^2 x)$.

5 - Sendo $F(x) = P\,f\,(x)$, mostre que,

$$P\,f\,(x) \,.\, [\,log\,F^2(x) + 2] = F(x) \,.\, log\,F^2(x) \,.$$

6 - Deduza fórmulas de recorrência para o cálculo de :

a) $P\,\dfrac{1}{(x^2 + a)^{\alpha}}$ $(\,a \neq 0$ e $\alpha \neq 1)$; **b)** $P\,sen^{\alpha} x$; **c)** $P\,log^m x$; **d)** $P\,tg^m x$;

e) $P\,x^m \,.\, log^n x$.

7 - Como aplicação das fórmulas do exercício anterior , primitive as seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$; **b)** $sen^4 x$; **c)** $log^2 x$; **d)** $log^{-1} x - log^{-2} x$; **e)** $tg^2 x$;

f) $tg^{-3} x$; **g)** $x^2 .\, log^2 x$.

8* - Represente-se por $F_m(x)$ uma primitiva de $x^m .\, e^{-x}$ ($m \in \mathbf{N}$) no intervalo $[\,0\,, +\infty\,[$. Prove por indução finita que,

$$\lim_{m \to +\infty} \left[F_m(x) - F_m(0)\right] = m\,! \;.$$

9 - Fazendo as substituições indicadas, calcule primitivas para as seguintes funções:

a) $\sqrt{1-x^2}$ $(x = sen\ t)$; **b)** $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x = sen\ t)$;

c) $\sqrt{e^x - 1}$ $[\,x = log\,(1+t^2)\,]$; **d)** $\dfrac{x^3+2x^2-x-12}{\left[4+(x-1)^2\right]^2}$ $[\,x = 1 + 2\,t$ e usando depois a fórmula de recorrência do exercício 6 a)$]$;

e) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ $(x = t^2)$; **f)** $\dfrac{1/x^2}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} - \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}}$ $\left(\dfrac{x+1}{x} = t^4\right)$;

g) $\dfrac{e^{x/2}+e^x}{e^{x/2}-e^x}$ $(e^x = t^2)$; **h)** $\sqrt{x}\,.\,\sqrt{1+\sqrt{x}}$ $(1+\sqrt{x} = t^2)$;

i) $\dfrac{sen^2\,x + 2}{cos\,x + 1}$ $(\,x = 2\ arc\ tg\ t)$; **j)** $\dfrac{\sqrt{1+log\,x}}{x}$ $(t^2 = 1 + log\,x)$;

k) $e^{\,arc\ sen\,x}$ $(\,t = arc\ sen\,x)$; **l)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x = sen\ t\,)$;

m) $\dfrac{e^{2x}+2e^{3x}}{1-e^x}$ $(t = e^x)$.

<u>RESPOSTAS</u> :

1 - a) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x$; **b)** e^{x+3} ; **c)** $\dfrac{2^{x-1}}{log\,2}$; **d)** $-\dfrac{5}{8}\cdot(1-2x)^{4/5}$; **e)** $log\,\sqrt{1+x^2}$;

f) $log\,(1+x^2) + arc\ tg\,x$; **g)** $-2\,.\,\sqrt{1-e^x}$; **h)** Se $\alpha \neq 1$, $\dfrac{1}{2.(1-\alpha)}\cdot\dfrac{1}{(1+x^2)^{\alpha-1}}$;

Se $\alpha = 1$, $log\,\sqrt{1+x^2}$;

i) Se $\alpha \neq 1$, $\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha-1}}$; Se $\alpha = 1$, $log\,(1+x)$; **j)** $\dfrac{sen^2\,x}{2}$; **k)** $\dfrac{e^{x^5}}{5}$;

l) $2\,.\,log\,|\,x^3+x^2+1|$; **m)** $(b/a)\,.\,arc\ tg\,(x/a)$; **n)** $arc\ sen\,(x\,/\,|\,a|)$;

o) Se $a \neq 0$, $(1/2a)\,.\,arc\ tg\,(x^2/a)$; Se $a = 0$, $-1/2x^2$; **p)** $log\,|\,tg\,x + sec\,x\,|$;

q) $(1/2)\,.\,log^2\,x$; **r)** $-\dfrac{4}{3}\cdot cos\,(3x/2)$; **s)** $(1/2)\,.\,log^2\,(1+x^2)$; **t)** $-\,log\,|\,cos\,x\,|$;

u) $log \mid sen\, x \mid$; **v)** $log \mid log\, x \mid$; **x)** $\dfrac{1}{(n+1)b} \cdot (a + b\,x)^{n+1}$; **y)** $\dfrac{2^{5x}}{5\,.\,log\,2}$;

z) $arc\,sen\,(x - 1)$; **aa)** $arc\,tg\,(sen\,x)$.

2 - a) $(1/2)\,.\,log\left|\dfrac{x^2 + x}{2}\right|$; **b)** $1 + (1/6)\,.\,arc\,tg\,(3x/2)$; **c)** $g(x) = -\,cos\,(2\,x)$;

d) $f(x) = \dfrac{(e^x + 1)\,.\,sen\,x + (e^x + x)\,.\,cos\,x}{2}$

$g(x) = \dfrac{(e^x - 1)\,.\,sen\,x + (e^x - x)\,.\,cos\,x}{2}$;

e) $g(x) = \begin{cases} log\,(1 - x) & , \ x < 1 \\ 3 + log(x - 1) & , \ x > 1 \end{cases}$.

3 - a) $\dfrac{x + sen\,x\,.\,cos\,x}{2}$; **b)** $(1/2)\,.\,tg^2\,x + log \mid cos\,x \mid$;

c) $(1/2)\,.\,tg^2\,x - log \mid cotg\,x \mid$; **d)** $-\dfrac{1}{2(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{3}{4(x-1)^4}$;

e) $log\,[\,4 + (x - 1)^2\,] + (10/4)\,.\,arc\,tg\,[\,(x - 1)/2\,]$;

f) $(3/8).(x + 1)^{8/3} + (3/2)\,.\,(x + 1)^{2/3}$;

g) $\dfrac{log\left[(x-1)^2 + 3\right]}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot arc\,tg\,\dfrac{x - 1}{\sqrt{3}}$;

h) $\dfrac{4}{3} \cdot log\,|x - 1| - \dfrac{5}{6} \cdot log\,|x + 2| - \dfrac{1}{2} \cdot log\,|x|$; **i)** $sen\,x - 2\,cos\,x - log \mid cos\,x \mid$;

j) $\dfrac{(2x^2 + 6x + 22)}{5} \cdot \sqrt{x - 1}$;

k) $(1/3)\,.\,tg^3\,x + (1/2)\,.\,tg^2\,x - tg\,x + x + log \mid cos\,x \mid$.

4 - a) $x\,.\,(log\,x - 1)$; **b)** $\dfrac{x - cos\,x\,.\,sen\,x}{2}$; **c)** $x\,.\,arc\,cos\,x - \sqrt{1 - x^2}$;

d) $x\,.\,arc\,tg\,x - (1/2)\,.\,log\,(1 + x^2)$; **e)** $sen\,x\,.\,log\,(1 + cos\,x) + x - sen\,x$;

f) $\dfrac{x^3\,.\,(log\,x - 1/3)}{3}$; **g)** $sen\,x - x\,.\,cos\,x$; **h)** $(1/7)\,.\,cos^7\,x - (1/5)\,.\,cos^5\,x$;

i) $(x^2/2)\,.\,(\,log \mid x \mid - 1/2)$; **j)** $e^x\,.\,(\,x^2 - 2\,x + 2)$; **k)** $e^x\,.\,log\,x$;

l) $x^2\,.\,arc\,tg\,(x - 1) - x - log\,(\,x^2 - 2\,x + 2)$; **m)** $e^x\,.\,(tg\,x - 1)$.

6 - a) $P\,\dfrac{1}{(x^2 + a)^{\alpha}} = \dfrac{x}{2a.(\alpha - 1).(x^2 + a)^{\alpha - 1}} + \dfrac{2\alpha - 3}{a\,.\,(2\alpha - 2)} \cdot P\,\dfrac{1}{(x^2 + a)^{\alpha - 1}}$;

b) $P\,sen^{\alpha}\,x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot P\,sen^{\alpha - 2}\,x - \dfrac{1}{\alpha} \cdot sen^{\alpha - 1}\,x\,.\,cos\,x \quad (\,\alpha \neq 0)$;

c) $P\,log^m\,x = x\,.\,log^m\,x - m\,.\,P\,log^{m-1}\,x$;

d) $P\,tg^m\,x = \dfrac{1}{m - 1} \cdot tg^{m-1}\,x - P\,tg^{m-2}\,x \quad (m \neq 1)$;

e) $P\, x^m \,.\, log^n\, x = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \cdot log^n\, x - \dfrac{n}{m+1} \cdot P\, x^m \,.\, log^{n-1}\, x \quad (m \neq -1)$.

7 - a) $\dfrac{x}{2\,.\,(x^2+1)} + (1/2)\,.\,arc\,tg\,x$; **b)** $(3/8).(x - sen\,x\,.\,cos\,x) - (1/4)\,.\,sen^3\,x\,.\,cos\,x$;

c) $x\,.\,log^2\,x - 2\,x\,.(log\,x - 1)$; **d)** $x\,.\,log^{-1}\,x$; **e)** $tg\,x - x$;

f) $(-1/2)\,.\,tg^{-2}\,x - log\,|\,sen\,x\,|$; **g)** $(2/27)\,.\,x^3 + (1/3)\,.\,x^3\,.\,log^2\,x - (2/9)\,.\,x^3\,.\,log\,x$.

9 - a) $\dfrac{arc\,sen\,x + x\,.\sqrt{1-x^2}}{2}$; **b)** $(3/2)\,.\,arc\,sen\,x - \dfrac{x\,.\sqrt{1-x^2}}{2}$;

c) $2\,.\sqrt{e^x - 1} - 2\,.\,arc\,sen\,\sqrt{e^x - 1}$;

d) $(1/2)\,.\,log\,[(x-1)^2 + 4] + (5/8)\,.\,arc\,tg\,\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{15x - 11}{4\,.\left[(x-1)^2 + 4\right]}$;

e) $x - 2\,.\sqrt{x} + 2\,.\,log\,|\sqrt{x} + 1|$;

f) $-4\,.\left[\,(1/2)\,.\sqrt{1 + 1/x} + \sqrt[4]{1 + 1/x} + log\left|\sqrt[4]{1 + 1/x} - 1\right|\,\right]$;

g) $x - 4\,.\,log\,|\,e^{x/2} - 1\,|$;

h) $(4/7)\,.\,(1 + \sqrt{x})^{7/2} - (8/5)\,.\,(1 + \sqrt{x})^{5/2} + (4/3)\,.\,(1 + \sqrt{x})^{3/2}$;

i) $2\,.\,tg\,(x/2) + x - sen\,x$; **j)** $(2/3)\,.\,(1 + log\,x)\,.\sqrt{1 + log\,x}$;

k) $\dfrac{x + \sqrt{1-x^2}}{2}\,.\,e^{arc\,sen\,x}$; **l)** $\dfrac{arc\,sen\,x - x\,.\sqrt{1-x^2}}{2}$;

m) $-e^{2x} - 3\,e^x - 3\,.\,log\,|\,1 - e^x\,|$.

BIBLIOGRAFIA

[1] **FERREIRA** , J. Campos
Introdução à Análise Matemática (3^a *Edição*)
Fundação Calouste Gulbenkian

[2] **APOSTOL** , Tom M.
Calculus – Vol I (*2nd Edition*)
John Wiley & Sons

[3] **AGUDO** , F. R. Dias
Análise Real – Vol. I
Escolar Editora

[4] **SARRICO** , Carlos
Análise Matemática (3^a *Edição*)
Gradiva

[5] **STEIN** , Sherman K.
Calculus and Analytic Geometry (*2nd Edition*)
McGraw – Hill

[6] **SWOKOWSKI** , Earl W.
Calculo com Geometria Analítica
McGraw – Hill

[7] **RUDIN** , W.
Principles of Mathematical Analysis
McGraw – Hill

[8] **JESUS** , Fernando de
Matemáticas Gerais (1964/1965)
AE – ISCEF/ISEG

[9] **ANTON** , Howard
Calculus – A New Horizon (*2nd Edition*)
John Wiley & Sons, Inc.

[10] **REINHARDT** , Fritz e **SOEDER** , Heinrich
Atlas de Matemáticas (Edição Espanhola)
Alianza Editorial