INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

CURSO DE MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

ELEMENTOS DE ANÁLISE REAL

Volume 2

Por : ***Gregório Luís***

PREFÁCIO

O presente texto destina-se a apoiar a disciplina de Análise Matemática II do curso de Matemática Aplicada à Economia e Gestão do Instituto Superior de Economia e Gestão.

Para além da abordagem teórica dos temas em estudo, o texto inclui ainda, no final de cada capítulo, exercícios e respectivas soluções. Os exercícios marcados com * são de resolução mais difícil podendo ser ignorados pelos alunos médios. Aconselha-se contudo a sua resolução aos alunos mais interessados.

A maior parte dos exercícios incluídos têm sido utilizados nos últimos 30 anos nas aulas práticas das disciplinas de Matemática dos primeiros anos dos cursos ministrados no Instituto Superior de Economia e Gestão, tornando-se impossível referenciar a sua proveniência ; para além destes há ainda exercícios originais e outros que foram retirados ou adaptados da bibliografia indicada no final.

Cada capítulo tem uma numeração independente para os pontos, teoremas e propriedades. Nas referências feitas no texto subentende-se que os pontos, teoremas e propriedades pertencem ao próprio capítulo, salvo quando expressamente seja indicado o contrário .

Este prefácio não poderia terminar sem uma referência aos professores que ao longo dos últimos 60 anos contribuiram decisivamente para a tradição que o ensino da matemática tem nesta escola de economia e gestão. Correndo o risco de injustamente esquecer alguns, citam-se aqui os Profs. Mira Fernandes, Bento Caraça, Leite Pinto, Vicente Gonçalves, José Ribeiro de Albuquerque e Bento Murteira.

Lisboa, 22 de Maio de 2002

António Gregório Luís

ÍNDICE

CAPITULO I

PRIMITIVAS

1. Generalidades. Primitivação imediata e quase imediata

Sendo $f(x)$ uma função real de variável real definida no intervalo não degenerado I, chama-se *primitiva* de $f(x)$ em I a qualquer função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$ para todos os $x \in I$; nas extremidades do intervalo $a = Inf\, I$ e $b = Sup\, I$, caso lhe pertençam, a definição exige que $F'_d(a) = f(a)$ e que $F'_e(b) = f(b)$, respectivamente.

Vejamos alguns exemplos:

1) $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2\,x$ no intervalo $]-\infty, +\infty[$;

2) $F(x) = log\, x$ é uma primitiva de $f(x) = 1/x$ no intervalo $]\,0, +\infty[$;

3) $F(x) = log\,|\,x\,|$ é uma primitiva de $f(x) = 1/x$ no intervalo $]-\infty, 0\,[$;

4) $F(x) = e^x$ e $G(x) = e^x + 2$ são duas primitivas de $f(x) = e^x$ em $]-\infty, +\infty[$.

Note-se que sendo $F_0(x)$ uma particular primitiva de $f(x)$ em I, então qualquer função $F(x) = F_0(x) + k$, com k constante, é igualmente primitiva de $f(x)$ no intervalo I: se a derivada de $F_0(x)$ é $f(x)$ em I, então também a derivada de $F(x) = F_0(x) + k$ é $f(x)$ em I, porque a derivada de uma constante é zero.

Inversamente, é fácil provar, utilizando um corolário do teorema de Lagrange, que sendo $F_0(x)$ e $F(x)$ duas primitivas de uma mesma função $f(x)$ em I, então $F(x) - F_0(x) = k$ (constante), ou seja, $F(x) = F_0(x) + k$. Em particular, qualquer primitiva da função nula num intervalo é constante no intervalo em causa, porque $F_0(x) = 0$ é uma primitiva da função nula.

As considerações precedentes mostram que dada uma função $f(x)$ definida num intervalo I, desde que se conheça uma sua particular primitiva nesse intervalo, fica perfeitamente conhecida a família de todas as primitivas da função : designando por $F_0(x)$ uma particular primitiva de $f(x)$ em I, a expressão geral das primitivas de $f(x)$ em I é dada por $F(x) = F_0(x) + k$.

Uma particular primitiva de $f(x)$ que é usada em diversas aplicações é a primitiva que se anula em certo ponto do intervalo I: sendo $F_0(x)$ uma particular primitiva de $f(x)$ em I, da expressão geral das primitivas de $f(x)$ em I, $F(x) = F_0(x) + k$, resulta com $k = -F_0(a)$ a primitiva,

$$F_1(x) = F_0(x) - F_0(a) \, ,$$

que se anula quando $x = a$.

Vejamos alguns exemplos:

1) Sendo $f(x) = cos\ x$, uma sua particular primitiva no intervalo $]-\infty, +\infty[$ é a função $F_0(x) = sen\ x$. A família geral das primitivas é $F(x) = sen\ x + k$. Fixando, por exemplo $a = \pi/2$, a primitiva que se anula em $x = \pi/2$ é a função $F_1(x) = sen\ x - 1$.

2) Sendo $f(x) = 2\,x\,e^{x^2}$, uma sua particular primitiva em $]-\infty, +\infty[$ é a função $F_0(x) = e^{x^2}$. A família geral das primitivas é $F(x) = e^{x^2} + k$. Fixando , por exemplo $a = 0$, a primitiva que se anula em $x = 0$ é a função $F_1(x) = e^{x^2} - 1$.

No que se segue, deverão ser tidas em conta as seguintes convenções:

a) Usa-se geralmente o símbolo $P\,f(x)$ para designar a família das primitivas de $f(x)$. Por exemplo $P\,e^x = e^x + k$.

b) Normalmente suprime-se a referência à constante k , escrevendo-se por exemplo $P\,e^x = e^x$, devendo então subentender-se que a função indicada no segundo membro é uma das primitivas de $f(x)$.

c) Quando não se faz referência explícita ao intervalo em que se está a primitivar $f(x)$, deve subentender-se que se trata do intervalo ou dos intervalos onde $f(x)$ está definida. Por exemplo, quando se pede para calcular $P\ 1/x$, sem se explicitar qual o intervalo de primitivação , pressupõe-se que se pretende o cálculo em $]-\infty, 0[$ e também em $]0, +\infty[$: $P\ 1/x = log\,|\,x\,|$.

O teorema seguinte fundamenta regras de primitivação do produto de uma constante por uma função e de uma soma de funções:

Teorema 1 : ***a)*** *Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ em I , então $k \,.\, F(x)$ é uma primitiva de $k \,.\, f(x)$ no mesmo intervalo ;*
b) *Sendo $F_1(x)$, ... , $F_m(x)$, primitivas de , respectivamente , $f_1(x)$, ... , $f_m(x)$ no intervalo I , então $F_1(x) + \ldots + F_m(x)$ é uma primitiva de $f_1(x) + \ldots + f_m(x)$ no mesmo intervalo.*
<u>Simbolicamente</u>: ***a)*** $P\ k \,.\, f(x) = k \,.\, P\,f(x)$;
b) $P\,[\,f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)\,] = P\,f_1(x) + P\,f_2(x) + \ldots + P\,f_m(x)$

<u>Demonstração</u> : A afirmação da alínea a) resulta de $[\,k \,.\, F(x)\,]' = k \,.\, F'(x) = k \,.\, f(x)$, sendo a segunda igualdade justificada por ser $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.

Quanto à afirmação da alínea b) ela resulta de ser,

$$[\,F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_m(x)\,]' = F'_1(x) + F'_2(x) + \ldots + F'_m(x) =$$

$$= f_1(x) + f_2(x) + \ ... + f_m(x) \ ,$$

porque por hipótese $F_i\,(x)$ é uma primitiva de $f_i\,(x)$ $(i = 1\ , 2\ , ...\ , m\ )$.

Com o conhecimento das regras de derivação e das regras do teorema precedente, podem obter-se primitivas de um grande número de funções correntes nas aplicações. Vejamos alguns exemplos (na apresentação dos resultados omitiremos sempre a constante k , isto é, indicaremos sempre uma primitiva particular em vez da expressão geral das primitivas) :

1) $P\ c = c\ x$ (c constante) ;

2) $P\ x = P\ (1/2)\ .\ 2\ x = (1/2)\ .\ P\ 2\ x = x^2/2$;

3) $P\ (2x^2 + 3\ x + 4\ ) = P\ 2x^2 + P\ 3\ x + P\ 4 = \dfrac{2\,x^3}{3} + \dfrac{3\,x^2}{2} + 4\,x$;

4) $P\ (x + 1)^{\alpha} = \dfrac{(x+1)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$, se $\alpha \neq -1$,

$P\ (x + 1)^{-1} = P\ \dfrac{1}{1+x} = log\ |\ x + 1|$;

5) $P\ e^{2x+1} = P\ (1/2)\ .\ 2\ e^{2x+1} = (1/2).\ P\ 2\ e^{2x+1} = (1/2)\ .\ e^{2x+1}$;

6) $P\ (sen\ x + cos\ x) = -\ cos\ x + sen\ x$;

7) $P\ \dfrac{1}{1+x^2} = arc\ tg\ x$;

8) $P\ \dfrac{2\,x}{1+x^2} = log\ (1 + x^2)$;

9) $P\ \dfrac{2\,x}{1+x^4} = arc\ tg\ (x^2)$;

10) $P\ \dfrac{2}{\sqrt{1 - 4\,x^2}} = arc\ sen\ (2\ x)$;

11) $P\ \dfrac{1}{x.(x+1)} = P\ \dfrac{1}{x} - P\ \dfrac{1}{x+1} = \log\ |\ x\ |\ -\ log\ |\ x + 1|$.

2. Primitivação por partes

Sejam $H(x)$ e $K(x)$ funções deriváveis no intervalo I e representem-se por $H'(x)$ e $K'(x)$ as respectivas derivadas . Na condição de $H(x)\,.\,K'(x)$ ser primitivável no intervalo I , pode obter-se uma primitiva de $H'(x)\,.\,K(x)$, usando a fórmula:

$$P\, H'(x)\,.\,K(x) \;=\; H(x)\,.\,K(x) \;-\; P\, H(x)\,.\,K'(x)\,,$$

podendo tomar-se no segundo membro qualquer das primitivas da função $H(x)\,.\,K'(x)$. Com efeito, derivando o segundo membro da igualdade, obtém--se :

$$[\, H(x)\,.\,K(x) \;-\; P\, H(x)\,.\,K'(x)\,]' = H'(x)\,.\,K(x) + H(x)\,.\,K'(x) - H(x)\,.\,K'(x) =$$

$$= H'(x)\,.\,K(x)\;,$$

o que, por definição de primitiva, justifica a fórmula em causa.

É nesta fórmula que se baseia o chamado *método de primitivação por partes* que passamos a exemplificar :

1) $P\, x\,.\,log\, x \;=\; \dfrac{x^2}{2}\cdot log\, x \;-\; P\, \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x} \;=\; \dfrac{x^2}{2}\cdot log\, x \;-\; P\, \dfrac{x}{2} \;=$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot log\, x \;-\; \frac{x^2}{4}\;.$$

2) $P\, x\,.\,e^x \;=\; e^x\,.\,x \;-\; P\, e^x\,.\,1 \;=\; e^x\,.\,x \;-\; e^x\;.$

<u>NOTA</u>: Neste exemplo tomou-se $H'(x) = e^x$ e $K(x) = x$. Caso se tivesse optado por tomar $H'(x) = x$ e $K(x) = e^x$, a fórmula permitiria obter,

$$P\, x\,.\,e^x \;=\; \frac{x^2}{2}\cdot e^x \;-\; P\, \frac{x^2}{2}\cdot e^x\,,$$

e a primitiva que aparece no segundo membro não é imediata. Isto é, embora teoricamente qualquer dos factores possa ser tomado como sendo $H'(x)$, na prática uma das duas possibilidades pode ser preferível à outra.

3) $P\, cos^2 x \;=\; P\,(cos\, x\,.\,cos\, x) \;= sen\, x\,.\,cos\, x \;-\; P\,(-\, sen\, x\,.\,sen\, x) \;=$

$$= sen\, x\,.\,cos\, x \;+ P\, sen^2 x = sen\, x\,.\,cos\, x \;+ P\,(1 - cos^2 x) =$$

$$= sen\, x\,.\,cos\, x \;+\; x - P\, cos^2 x\;\;,$$

e considerando ter sido tomado no segundo membro a mesma primitiva de $cos^2 x$ que no primeiro membro, resulta,

$$2 \, . \, P \, cos^2 x \; = \; sen\, x \, . \, cos\, x \; + \; x \;\; \Rightarrow \; P \, cos^2 x \; = \; \frac{sen\, x \, . \, cos\, x \; + \; x}{2} \; .$$

4) $P \, log^2 x \; = \; x \, . \, log^2 x \; - \; P \, x \, . \, 2 \, . \, log\, x \, . \, (1/x) = \; x \, . \, log^2 x \; - \; P \, 2 \, log\, x =$

$$= \; x \, . \, log^2 x \; - \; [\, 2\, x \, . \, log\, x \; - \; P \, 2\, x \, . \, (1/x)] \; =$$

$$= \; x \, . \, log^2 x \; - 2\, x \, . \, log\, x + P \, 2 =$$

$$= \; x \, . \, log^2 x \; - 2\, x \, . \, log\, x + 2\, x \; .$$

3. Primitivação por substituição

Com base na regra de derivação de uma função composta, pode obter-se o método de *primitivação por substituição*.

Admita-se que $f\,(x)$ é primitivável no intervalo I e seja $x = g(t)$ uma bijecção do intervalo J no intervalo I . Construa-se a função $h\,(t) = f\,[g(t)] \, . \, g'(t)$, o que pressupõe a existência de $g'(t)$ em J . Nestas condições, vejamos em primeiro lugar que $h\,(t)$ é primitivável no intervalo J : sendo $F(x)$ uma primitiva de $f\,(x)$ no intervalo I (que existe por hipótese) , faça-se a composição $F\,[g(t)]$ e calcule-se a respectiva derivada,

$$\{F\,[g(t)]\}\,' = f\,[g(t)] \, . \, g'(t) \; = \; h(t) \, , \;\; \forall \; t \in J \;\; ,$$

resultado que mostra ser $F\,[g(t)]$ uma primitiva de $h(t)$ em J . Vejamos em segundo lugar que, sendo $H(t)$ uma qualquer primitiva de $h(t)$ em J - já vimos que $h(t)$ é primitivável - , a função que se obtém fazendo a composição $H\,[g^{-1}(x)]$ é uma primitiva de $f\,(x)$: basta notar que de,

$$\{F\,[g(t)]\}\,' = \; h(t) \; = H'(t) \;\; ,$$

resulta $F\,[g(t)] \; - \; H(t) = k$ (constante) em J ; e fazendo a composição de $F\,[g(t)] \; - \; H(t)$ com $t = g^{-1}(x)$, resulta,

$$F(x) - H\,[g^{-1}(x)] \;\; = \;\; k \;\; \text{(constante) em} \;\; I \, ,$$

e desta igualdade resulta que $H\,[g^{-1}(x)]$ é uma primitiva de $f\,(x)$ em I , por ser $F(x)$ supostamente uma primitiva de $f\,(x)$ no mesmo intervalo .

Exemplos de aplicação :

1) Para achar $P \; \dfrac{1}{e^x - 1}$ no intervalo $]\, 0 \, , +\infty \, [$, considere-se $x = log\; t$ com t no intervalo $]\, 1 \, , +\infty \, [$. Tem-se,

$$h(t) = \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \Rightarrow H(t) = P\, h(t) = log\,(t - 1) - log\, t = log\, \frac{t-1}{t} \ ,$$

donde, fazendo $t = e^x$, resulta,

$$P\ \frac{1}{e^x - 1} = H(e^x) = log\, \frac{e^x - 1}{e^x} \ \ , \text{ em }]\, 0\, , +\infty\, [\ .$$

Para achar a primitiva da mesma função, mas agora no intervalo $]\,-\infty\,, 0\,[$, pode usar-se a mesma substituição mas agora com t no intervalo $]\,0\,, 1[$. Tem-se,

$$h(t) = \frac{1}{t-1} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \Rightarrow H(t) = P\, h(t) = log\,|\, t - 1| - log\, t = log\, \frac{1-t}{t} \ ,$$

donde, fazendo $t = e^x$, resulta,

$$P\ \frac{1}{e^x - 1} = H(e^x) = log\, \frac{1 - e^x}{e^x} \ , \text{ em }]\,-\infty\,, 0\,[\ .$$

Os dois resultados obtidos podem resumir-se num só válido para os dois intervalos :

$$P\ \frac{1}{e^x - 1} = log\, \frac{|\, e^x - 1\,|}{e^x}$$

2) Para achar $P\, \sqrt{a^2 - x^2}$ em $[\,-a\,, a]$ ($a > 0$) , pode fazer-se $x = a\, sen\, t$, com t no intervalo $[\,-\pi/2\,, \pi/2]$:

$$h(t) = \sqrt{a^2 - a^2 .\ sen^2\, t}\ .\ a\, cos\, t = a^2\, cos^2\, t \ ,$$

$$H(t) = P\ a^2\, cos^2\, t = a^2 .\ \frac{sen\ t\, .\, cos\, t + t}{2} \qquad \text{(primitivando por partes)}\ ,$$

$$P\, \sqrt{a^2 - x^2} = H\,[\, arc\, sen\, (x/a)] = \frac{x\, .\, \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2\, .\, arc\, sen\, (x\,/\,a)}{2} \ ,$$

obtendo-se este último resultado após alguns cálculos trigonométricos elementares.

4 . Exercícios

1 - Determine uma primitiva para cada uma das seguintes funções:

a) $x^2 + x + 1$; **b)** e^{x+3} ; **c)** 2^{x-1} ; **d)** $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$; **e)** $\dfrac{x}{1+x^2}$; **f)** $\dfrac{2x+1}{1+x^2}$;

g) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}$; **h)** $\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^{\alpha}}$; **i)** $\dfrac{1}{(1+x)^{\alpha}}$; **j)** $\cos x \,.\, \operatorname{sen} x$; **k)** $e^{x^5} .\ x^4$;

l) $\dfrac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 + 1}$; **m)** $\dfrac{b}{a^2 + x^2}$ $(a\,,\, b \neq 0)$; **n)** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; **o)** $\dfrac{x}{a^2 + x^4}$;

p) $\sec x$; **q)** $\dfrac{\log x}{x}$; **r)** $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)}{\cos(x/2)}$; **s)** $\dfrac{2x \,.\, \log(x^2+1)}{1+x^2}$;

t) $\operatorname{tg} x$; **u)** $\operatorname{cotg} x$; **v)** $\dfrac{1}{x \,.\, \log x}$; **x)** $(a + bx)^n$ $(b \neq 0)$; **y)** $2^x \,.\, 4^{2x}$;

z) $\dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$; **aa)** $\dfrac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$.

2 - Calcule:

a) A primitiva que se anula para $x = 1$, da função $f(x) = \dfrac{x + 1/2}{x^2 + x}$;

b) A primitiva que toma o valor 1 para $x = 0$, da função $f(x) = \dfrac{1}{4 + 9x^2}$;

c) A função $g(x)$ que admite duas primitivas $G(x)$ e $H(x)$ tais que,

$$G(x) - H(x) = 2 \quad \text{e} \quad G(x) + H(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x) \,.\, \cos(2x)}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} \ ;$$

d) As funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que uma das primitivas da sua soma e uma das primitivas da sua diferença sejam, respectivamente, $e^x \,.\, \operatorname{sen} x$ e $x \,.\, \operatorname{sen} x$;

e) A função $g(x)$ com domínio em **R** - $\{1\}$, tal que, $g'(x) = 1/(x-1)$, $g(0) = 0$ e $g(2) = 3$.

3 - Primitive, por decomposição numa soma de funções, as seguintes funções:

a) $\cos^2 x$; **b)** $tg^3 x$; **c)** $\dfrac{1}{sen\, x \,.\, \cos^3 x}$; **d)** $\dfrac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^5}$; **e)** $\dfrac{2x + 3}{4 + (x - 1)^2}$;

f) $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{\sqrt[3]{x + 1}}$; g) $\dfrac{x + 1}{3 + (x - 1)^2}$; **h)** $\dfrac{3x + 1}{x(x + 2)(x - 1)}$;

i) $\dfrac{sen\,(2x) + sen\, x + \cos^2 x}{\cos x}$; **j)** $\dfrac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x - 1}}$; **k)** $tg^3 x + tg^4 x$.

4 - Primitive por partes as seguintes funções:

a) $\log x$; **b)** $sen^2 x$; **c)** $arc\,\cos x$; **d)** $arc\, tg\, x$; **e)** $\cos x \,.\, \log(1 + \cos x)$;

f) $x^2 \,.\, \log x$; **g)** $x \,.\, sen\, x$; **h)** $sen^3 x \,.\, \cos^4 x$; **i)** $x \,.\, \log |x|$; **j)** $x^2 \,.\, e^x$;

k) $\dfrac{x \,.\, e^x \,.\, \log x + e^x}{x}$; **l)** $2x \,.\, arc\, tg\,(x - 1)$; **m)** $e^x \,.\, (tg\, x + tg^2 x)$.

5 - Sendo $F(x) = P\, f(x)$, mostre que,

$$P\, f(x) \,.\, [\, \log F^2(x) + 2] = F(x) \,.\, \log F^2(x) \,.$$

6 - Deduza fórmulas de recorrência para o cálculo de :

a) $P\, \dfrac{1}{(x^2 + a)^\alpha}$ $(\, a \neq 0 \text{ e } \alpha \neq 1)$; **b)** $P\, sen^\alpha x$; **c)** $P \log^m x$; **d)** $P\, tg^m x$;

e) $P\, x^m \,.\, \log^n x$.

7 - Como aplicação das fórmulas do exercício anterior , primitive as seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{(x^2 + 1)^2}$; **b)** $sen^4 x$; **c)** $\log^2 x$; **d)** $\log^{-1} x - \log^{-2} x$; **e)** $tg^2 x$;

f) $tg^{-3} x$; **g)** $x^2 \,.\, \log^2 x$.

8* - Represente-se por $F_m(x)$ uma primitiva de $x^m . e^{-x}$ ($m \in \mathbf{N}$) no intervalo $[\, 0\, , +\infty\, [$. Prove por indução finita que,

$$\lim_{m \to +\infty} \left[F_m(x) - F_m(0) \right] = m\,! \ .$$

9 - Fazendo as substituições indicadas, calcule primitivas para as seguintes funções:

a) $\sqrt{1 - x^2}$ $(x = sen\ t)$; **b)** $\dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(x = sen\ t)$;

c) $\sqrt{e^x - 1}$ $[\, x = log\,(1 + t^2)]$; **d)** $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 12}{\left[4 + (x-1)^2\right]^2}$ $[\, x = 1 + 2\,t$ e usando depois a fórmula de recorrência do exercício 6 a)$]$;

e) $\dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ $(x = t^2)$; **f)** $\dfrac{1/x^2}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} - \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}}$ $\left(\dfrac{x+1}{x} = t^4 \right)$;

g) $\dfrac{e^{x/2} + e^x}{e^{x/2} - e^x}$ $(e^x = t^2)$; **h)** $\sqrt{x} \,.\, \sqrt{1 + \sqrt{x}}$ $(1 + \sqrt{x} = t^2)$;

i) $\dfrac{sen^2\, x + 2}{cos\, x + 1}$ $(\, x = 2\ arc\ tg\ t)$; **j)** $\dfrac{\sqrt{1 + log\, x}}{x}$ $(t^2 = 1 + log\, x)$;

k) $e^{\,arc\ sen\, x}$ $(\, t = arc\ sen\ x)$; **l)** $\dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ $(x = sen\ t\,)$;

m) $\dfrac{e^{2x} + 2e^{3x}}{1 - e^x}$ $(t = e^x)$.

<u>RESPOSTAS</u> :

1 - a) $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x$; **b)** e^{x+3} ; **c)** $\dfrac{2^{x-1}}{log\ 2}$; **d)** $-\dfrac{5}{8} \cdot (1 - 2x)^{4/5}$; **e)** $log\, \sqrt{1 + x^2}$;

f) $log\,(1 + x^2\,) + arc\ tg\, x$; **g)** $-2 \,.\, \sqrt{1 - e^x}$; **h)** Se $\alpha \neq 1$, $\dfrac{1}{2.(1-\alpha)} \cdot \dfrac{1}{(1 + x^2)^{\alpha - 1}}$;

Se $\alpha = 1$, $log\, \sqrt{1 + x^2}$;

i) Se $\alpha \neq 1$, $\dfrac{1}{1 - \alpha} \cdot \dfrac{1}{(1 + x)^{\alpha - 1}}$; Se $\alpha = 1$, $log\,(1 + x)$; **j)** $\dfrac{sen^2\, x}{2}$; **k)** $\dfrac{e^{x^5}}{5}$;

l) $2 \,.\, log\,|\, x^3 + x^2 + 1|$; **m)** $(b/a) \,.\, arc\ tg\,(x/a)$; **n)** $arc\ sen\,(x\,/\,|\,a|)$;
o) Se $a \neq 0$, $(1/2a) \,.\, arc\ tg\,(x^2\,/\,a)$; Se $a = 0$, $-1/2x^2$; **p)** $log\,|\,tg\,x + sec\,x\,|$;

q) $(1/2) \,.\, log^2\ x$; **r)** $-\dfrac{4}{3} \cdot cos\,(3x\,/\,2)$; **s)** $(1/2) \,.\, log^2\,(1 + x^2)$; **t)** $-\,log\,|\,cos\,x\,|$;

u) $log\,|\,sen\,x\,|$; **v)** $log\,|\,log\,x\,|$; **x)** $\dfrac{1}{(n+1)\,b} \cdot (a + b\,x)^{n+1}$; **y)** $\dfrac{2^{5x}}{5\,.\,log\,2}$;

z) $arc\ sen\,(x - 1)$; **aa)** $arc\ tg\,(sen\,x)$.

2 - a) $(1/2) \,.\, log\left|\dfrac{x^2 + x}{2}\right|$; **b)** $1 + (1/6) \,.\, arc\ tg\,(3x/2)$; **c)** $g(x) = -\,cos\,(2\,x)$;

d) $f(x) = \dfrac{(e^x + 1)\,.\,sen\ x + (e^x + x)\,.\,cos\ x}{2}$

$g\,(x) = \dfrac{(e^x - 1)\,.\,sen\ x + (e^x - x)\,.\,cos\ x}{2}$;

e) $g(x) = \begin{cases} log\,(1 - x) & , \quad x < 1 \\ 3 + log(x - 1) & , \quad x > 1 \end{cases}$.

3 - a) $\dfrac{x + sen\ x\,.\,cos\ x}{2}$; **b)** $(1/2) \,.\, tg^2\ x + log\,|\,cos\,x\,|$;

c) $(1/2) \,.\, tg^2\ x - log\,|\,cotg\,x\,|$; **d)** $-\dfrac{1}{2\,(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{3}{4\,(x-1)^4}$;

e) $log\,[\,4 + (x - 1)^2\,] + (10/4) \,.\, arc\ tg\,[\,(x - 1)/2\,]$;

f) $(3/8).(x + 1)^{8/3} + (3/2) \,.\, (x + 1)^{2/3}$;

g) $\dfrac{log\left[(x - 1)^2 + 3\right]}{2} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot arc\,tg\,\dfrac{x - 1}{\sqrt{3}}$;

h) $\dfrac{4}{3} \cdot log\,|x - 1| - \dfrac{5}{6} \cdot log\,|x + 2| - \dfrac{1}{2} \cdot log\,|x|$; **i)** $sen\,x - 2\,cos\,x - log\,|\,cos\,x\,|$;

j) $\dfrac{(2\,x^2 + 6\,x + 22)}{5} \cdot \sqrt{x - 1}$;

k) $(1/3) \,.\, tg^3\ x + (1/2) \,.\, tg^2\ x - tg\,x + x + log\,|\,cos\,x\,|$.

4 - a) $x \,.\, (log\,x - 1)$; **b)** $\dfrac{x - cos\ x\,.\,sen\ x}{2}$; **c)** $x \,.\, arc\ cos\,x - \sqrt{1 - x^2}$;

d) $x \,.\, arc\ tg\,x - (1/2) \,.\, log\,(1 + x^2)$; **e)** $sen\,x \,.\, log\,(1 + cos\,x) + x - sen\,x$;

f) $\dfrac{x^3\,.\,(log\ x - 1/3)}{3}$; **g)** $sen\,x - x \,.\, cos\,x$; **h)** $(1/7) \,.\, cos^7\ x - (1/5) \,.\, cos^5\ x$;

i) $(x^2/2) \,.\, (\,log\,|\,x\,| - 1/2)$; **j)** $e^x \,.\, (\,x^2 - 2\,x + 2)$; **k)** $e^x \,.\, log\,x$;

l) $x^2 \,.\, arc\ tg\,(x - 1) - x - log\,(\,x^2 - 2\,x + 2)$; **m)** $e^x \,.\, (tg\,x - 1)$.

6 - a) $P\,\dfrac{1}{(x^2 + a)^{\alpha}} = \dfrac{x}{2\,a\,.(\alpha - 1)\,.(x^2 + a)^{\alpha - 1}} + \dfrac{2\,\alpha - 3}{a\,.\,(2\,\alpha - 2)} \cdot P\,\dfrac{1}{(x^2 + a)^{\alpha - 1}}$;

b) $P\, sen^{\alpha}\, x = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot P\, sen^{\alpha - 2}\, x \; - \; \dfrac{1}{\alpha} \cdot sen^{\alpha - 1}\, x \,.\, cos\, x \quad (\alpha \neq 0)$;

c) $P\, log^m\, x = x \,.\, log^m\, x - m \,.\, P\, log^{m-1}\, x$;

d) $P\, tg^m\, x = \dfrac{1}{m-1} \cdot tg^{m-1}\, x - P\, tg^{m-2}\, x \quad (m \neq 1)$;

e) $P\, x^m \,.\, log^n\, x = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} \cdot log^n\, x \; - \; \dfrac{n}{m+1} \cdot P\, x^m \,.\, log^{n-1} x \quad (m \neq -1)$.

7 - a) $\dfrac{x}{2 \,.\, (x^2+1)} + (1/2) \,.\, arc\; tg\; x$; **b)** $(3/8).(x - sen\, x \,.\, cos\, x) - (1/4) \,.\, sen^3\, x \,.\, cos\, x$;

c) $x \,.\, log^2\, x - 2\, x \,.(log\, x - 1)$; **d)** $x \,.\, log^{-1}\, x$; **e)** $tg\, x - x$;

f) $(-1/2) \,.\, tg^{-2}\, x - log\, |\, sen\, x\, |$; **g)** $(2/27) \,.\, x^3 + (1/3) \,.\, x^3 \,.\, log^2\, x - (2/9) \,.\, x^3 \,.\, log\, x$.

9 - a) $\dfrac{arc\; sen\; x + x \,.\, \sqrt{1 - x^2}}{2}$; **b)** $(3/2) \,.\, arc\; sen\, x - \dfrac{x \,.\, \sqrt{1-x^2}}{2}$;

c) $2 \,.\, \sqrt{e^x - 1} - 2 \,.\, arc\; sen\; \sqrt{e^x - 1}$;

d) $(1/2) \,.\, log\, [(x-1)^2 + 4] + (5/8) \,.\, arc\; tg\; \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{15x - 11}{4 \,.\left[(x-1)^2 + 4\right]}$;

e) $x - 2 \,.\, \sqrt{x} + 2 \,.\, log\, |\, \sqrt{x} + 1|$;

f) $-4 \,.\left[(1/2) \,.\, \sqrt{1 + 1/x} + \sqrt[4]{1 + 1/x} + log \left| \sqrt[4]{1 + 1/x} - 1 \right| \right]$;

g) $x - 4 \,.\, log\, |\, e^{x/2} - 1\, |$;

h) $(4/7) \,.\, (1 + \sqrt{x}\,)^{7/2} - (8/5) \,.\, (1 + \sqrt{x}\,)^{5/2} + (4/3) \,.\, (1 + \sqrt{x}\,)^{3/2}$;

i) $2 \,.\, tg\, (x/2) + x - sen\, x$; **j)** $(2/3) \,.\, (1 + log\, x) \,.\, \sqrt{1 + log\, x}$;

k) $\dfrac{x + \sqrt{1-x^2}}{2} \,.\; e^{arc\; sen\; x}$; **l)** $\dfrac{arc\; sen\; x - x \,.\, \sqrt{1-x^2}}{2}$;

m) $- e^{2x} - 3\, e^x - 3 \,.\, log\, |\, 1 - e^x\, |$.

CAPÍTULO II

INTEGRAL DE RIEMANN EM R

1. Definição e primeiras propriedades

Considere-se a função $f(x)$ limitada no intervalo $I = [a\,,\,b]$ $(a < b)$ limitado e fechado . Fixando pontos $x_0\,, x_1\,, \dots, x_{n-1}\,, x_n$, em número finito, tais que,

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ \dots\ < x_{n-1} < x_n = b\,,$$

ao conjunto $D = \{\, x_0\,, x_1\,, \dots, x_{n-1}\,, x_n \,\}$ chama-se *decomposição* do intervalo $I = [a\,,\,b]$. Esta designação atribuída ao conjunto D resulta do facto de os pontos x_i determinarem a decomposição de $[a\,,\,b]$ nos seguintes subintervalos:

$$[a\,, x_1]\ \ ,\ [x_1\,, x_2]\ \ ,\ \dots\ ,\ [x_{n-1}\,, b]\ \ ,$$

cuja união dá o intervalo $[a\,,\,b]$.

Note-se que há uma infinidade de modos possíveis de fixar os pontos x_i nas condições referidas e assim surgem naturalmente infinitas decomposições possíveis para o intervalo $[a\,,\,b]$.

O *diâmetro* de uma decomposição $D = \{\, x_0\,, x_1\,, \dots, x_{n-1}\,, x_n \,\}$ do intervalo $[a\,,\,b]$ é a maior das diferenças $x_{i+1} - x_i$, ou seja, a maior das amplitudes dos subintervalos em que o intervalo fica decomposto pelos pontos $x_i \in D$. Representaremos por $d(D)$ o diâmetro da decomposição D.

Tomando em cada subintervalo $[\, x_i\,, x_{i+1}\,]$ um ponto y_i , defina-se,

$$\sigma(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\, f(y_i)\,,$$

expressão que se designa por *soma sigma* ou *soma de Riemann* da função $f(x)$ para a decomposição $D = \{\, x_0\,, x_1\,, \dots, x_{n-1}\,, x_n \,\}$ considerada . Conclui-se com facilidade que $\sigma(D)$ é uma função infinívoca quando considerada, quer como função de D, quer como função do diâmetro da decomposição,

$$d = Máx\ \{\, x_{i+1} - x_i\ :\ i = 0\,, 1\,, 2\,, \dots, n\text{-}1 \,\}\ .$$

De facto, a cada decomposição D corresponde uma infinidade de somas sigma, variáveis com a escolha dos pontos y_i ; e há também infinitas decomposições D com o mesmo diâmetro d .

Diz-se que $\lambda = \lim\limits_{d \to 0} \sigma(D)$ se e só se,

$$\forall\ \delta > 0 \ \ , \ \ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta) \ : \ \ d(D) < \varepsilon \ \Rightarrow \ \sigma(D) \in \mathrm{V}_{\delta}(\lambda) \, ;$$

quando λ seja finito, a condição precedente pode escrever-se do seguinte modo:

$$\forall\ \delta > 0 \ \ , \ \ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta) \ : \ \ d(D) < \varepsilon \ \Rightarrow \ |\sigma(D) - \lambda| < \delta \ \ ,$$

e nesse caso:

a) A função $f(x)$ diz-se *integrável à Riemann* no intervalo $[a\,,b]$;

b) Ao limite finito λ chama-se integral de $f(x)$ no intervalo $[a\,,b]$ e representa-se pelo símbolo,

$$\int_a^b f(x)\ dx \ \ ,$$

símbolo este que evidencia : **1)** As extremidades a e b do intervalo de integração; **2)** A função integranda $f(x)$; **3)** A variável de integração x .

Quando o intervalo de integração seja degenerado ($a = b$) , a função considera-se sempre como integrável por definição e convenciona-se que é nulo o valor do integral.

Convém observar que o valor do integral, caso a função seja integrável, depende do intervalo de integração e da função integranda, mas não da variável de integração, isto é,

$$\int_a^b f(x)\ dx \ = \int_a^b f(u)\ du \ = \int_a^b f(t)\ dt \ = \ \dots \ .$$

Vamos estudar seguidamente algumas propriedades elementares do integral de Riemann .

P1 : *Se $f(x)$ e $g(x)$ definidas no intervalo $[a\,,b]$ diferem apenas pelo valor assumido em certo $c \in [a\,,b]$, então ambas as funções são conjuntamente integráveis ou não integráveis no intervalo e em caso de integrabilidade,* $\int_a^b f(x)\ dx \ = \int_a^b g(x)\ dx$

<u>Demonstração</u> : Seja $D = \{\, x_0 \ , x_1 \ , \dots \ , x_{n-1} \ , x_n \,\}$ uma qualquer decomposição do intervalo $[a\,,b]$. As somas

$$\sigma_g(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \, . \, g(y_i) \quad \text{e} \quad \sigma_f(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \, . \, f(y_i)$$

só diferem no caso especial de um dos y_α escolhidos ser precisamente o valor c onde as funções assumem valor distinto; nesse caso especial,

$$\sigma_f(D) \; - \; \sigma_g(D) = (x_{\alpha+1} - x_\alpha) \, . \, [\, f(c) - g(c)] \; .$$

Portanto, em geral, seja como for que se escolham os y_α , tem-se,

$$| \, \sigma_f(D) \; - \; \sigma_g(D) \, | \; \leq \; d \, . \, | \, f(c) - g(c) \, | \; ,$$

em que d é o diâmetro da decomposição D . Admita-se agora que $\lambda \; = \; \lim_{d \to 0} \; \sigma_f(D)$ é finito, ou seja, que $f(x)$ é integrável em $[a \, , b]$. Fixando um valor $\delta > 0$, existe então um $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que,

$$d < \varepsilon \;\; \Rightarrow \; |\sigma_f(D) - \; \lambda \,| < \; \delta/2 \quad \text{e} \quad d < \; \frac{\delta}{2 \, . \, |f(c) - g(c)|} \quad .$$

Então , para $d < \varepsilon$ tem-se,

$$| \, \sigma_g(D) \; - \; \lambda \, | \; \leq \; | \, \sigma_g(D) \; - \; \sigma_f(D) \, | \; + \; | \, \sigma_f(D) \; - \; \lambda \, | \quad <$$

$$< \; d \, . \, | \, f(c) - g(c) \, | \; + \delta/2 \; < \; \delta/2 \; + \; \delta/2 \; = \; \delta \; ,$$

ou seja, $\lambda \; = \; \lim_{d \to 0} \; \sigma_g(D)$, assim se concluindo que $g(x)$ é também integrável em $[a \, , b]$ e que o seu integral nesse intervalo coincide com o de $f(x)$.

Trocando na demonstração os papeis de $f(x)$ e $g(x)$, conclui-se que se $g(x)$ é integrável no intervalo $[a \, , b]$ também o é $f(x)$ e tem o mesmo integral.

A propriedade que acaba de ser demonstrada admite o seguinte,

Corolário : *Se $f(x)$ e $g(x)$ definidas no intervalo $[a \, , b]$ diferem apenas pelos valores assumidos em certos pontos $c_j \in [a \, , b]$ ($j = 1 \, , 2 \, , \ldots \, , m$) , em número finito , então ambas as funções são conjuntamente integráveis ou não integráveis no intervalo e, em caso de integrabilidade,*

$$\int_a^b f(x) \; dx \; = \int_a^b g(x) \; dx$$

<u>Demonstração</u> : Basta aplicar repetidamente (um número finito de vezes) a propriedade anterior .

A propriedade precedente e o seu corolário permitem alargar a noção de integral de uma função $f(x)$ num intervalo $[a \, , b]$ ao caso em que ela não esteja definida num número finito de pontos do intervalo. Para tal considera-se a função $g(x)$ coincidente com $f(x)$ nos pontos do intervalo onde esta esteja definida e com valores arbitrários nos pontos $c_j \in [a \, , b]$ onde $f(x)$ não esteja definida. A integrabilidade e o valor do integral de $g(x)$ no intervalo não dependem dos valores arbitrários utilizados para definir $g(x)$ nos pontos c_j (em número finito) e então diz-se que $f(x)$ é integrável em $[a\ ,\ b]$ se e só se $g(x)$ o for e, em caso de integrabilidade, define-se,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b g(x)\ dx\ .$$

P2 : *Sendo* $f(x) = k$ *(constante) em* $[a\ ,\ b]$ *,* $f(x)$ *é integrável nesse intervalo e tem-se* $\int_a^b k\ dx = k\ .\ (b - a)$

Demonstração : Para qualquer decomposição do intervalo $[a\ ,\ b]$, tem-se,

$$\sigma(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ F(y_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ k = k\ .\ (b - a)\ ,$$

e, portanto, $\int_a^b k\ dx = \lim_{d \to 0} \sigma(D) = k\ .\ (b - a)$, que é o que se pretendia provar.

P3 : *Sendo* $f(x) \geq 0$ *em* $[a\ ,\ b]$ *e sendo* $f(x)$ *integrável nesse intervalo, tem-se,*

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

Demonstração : Resulta imediatamente do facto de ser, para qualquer decomposição D , $\sigma(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ f(y_i) \geq 0$.

P4 : *Sendo* $f(x)$ *e* $g(x)$ *integráveis em* $[a\ ,\ b]$ *então* $f(x) + g(x)$ *é igualmente integrável nesse intervalo e tem-se,*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

Demonstração : Sejam λ_f e λ_g , respectivamente, os integrais de $f(x)$ e de $g(x)$ no intervalo em causa . Dado um qualquer $\delta > 0$, existe então um $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que,

$$d = d(D) < \varepsilon \Rightarrow |\ \sigma_f(D) - \lambda_f| < \delta/2 \ \wedge |\ \sigma_g(D) - \lambda_g| < \delta/2\ .$$

Para uma decomposição D de diâmetro inferior a $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tem-se então,

$$\sigma_{f+g}(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ [f(y_i) + g(y_i)] = \sigma_f(D) + \sigma_g(D)\ ,$$

donde resulta,

$$|\ \sigma_{f+g}(D) - (\lambda_f + \lambda_g)\ | \leq |\ \sigma_f(D) - \lambda_f| + |\ \sigma_g(D) - \lambda_g| < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

o que mostra ser $\lim_{d \to 0} \sigma_{f+g}(D) = \lambda_f + \lambda_g$, que é o que se pretendia provar.

O seguinte corolário é imediato por aplicação repetida da propriedade anterior:

Corolário : *Sendo $f_i(x)$, $i = 1 , 2 , \ldots , m$, em número finito, funções integráveis no intervalo $[a \, , \, b]$, então $\sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ é igualmente integrável no intervalo e tem-se ,* $\int_a^b \sum_{i=1}^{m} f_i(x) \, dx = \sum_{i=1}^{m} \int_a^b f_i(x) \, dx$

P5 : *Sendo $f(x)$ integrável em $[a \, , b]$ e $\underline{k}$ constante , então $k \, . \, f(x)$ é também integrável nesse intervalo e* $\int_a^b k \, . \, f(x) \, dx = k \, . \int_a^b f(x) \, dx$

Demonstração : Para uma qualquer decomposição D do intervalo, tem-se,

$$\sigma_{k.f}(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \, . \, [\, k \, . \, f(y_i)\,] = k \, . \, \sigma_f(D) \, .$$

Sendo $f(x)$ integrável no intervalo em causa e λ_f o respectivo integral, tem-se,

$$\forall \, \delta > 0 \quad , \quad \exists \, \varepsilon = \varepsilon(\delta) \; : \quad d(D) < \varepsilon \;\Rightarrow |\sigma_f(D) - \lambda_f| < \delta / |\, k \,| \quad ,$$

admitindo que $k \neq 0$ (com $k = 0$ a igualdade do teorema é evidente).

Considerando então uma qualquer decomposição de diâmetro inferior a ε, tem-se,

$$|\sigma_{k.f}(D) - k \, . \, \lambda_f| = |\, k \, . \, \sigma_f(D) - k \, . \, \lambda_f| = |\, k \,| \, . \, |\sigma_f(D) - \lambda_f| < \delta \; ,$$

o que mostra ser $\lim_{d \to 0} \sigma_{k.f}(D) = k \, . \lambda_f$, que é o que se pretendia provar.

P6 : *Sendo $f(x)$ e $g(x)$ integráveis em $[a \, , \, b]$ e $f(x) \leq g(x)$ nesse intervalo, então* $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$

Demonstração: Fazendo $h(x) = g(x) - f(x) = g(x) + [\, -f(x)\,]$, tem-se $h(x) \geq 0$ e $h(x)$ integrável no intervalo em causa por ser a soma de duas funções integráveis. Pela propriedade P3, tem-se $\int_a^b h(x) \, dx \geq 0$; as propriedades P4 e P5 permitem então escrever,

$$\int_a^b h(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \geq 0 \; ,$$

donde se tira imediatamente a desigualdade do enunciado.

2. Nova definição de integral. Equivalência com a anterior

Seja $f(x)$ limitada no intervalo limitado e fechado $[a\,,\,b]$ e considere-se uma qualquer decomposição $D = \{\, x_0\,,\, x_1\,,\, \dots\,,\, x_{n-1}\,,\, x_n \,\}$ desse intervalo. Construam-se as somas,

$$S(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.\,L_i \;\;, \text{ com } \;\; L_i = Sup\,\{\, f(x) \,:\, x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\}$$

$$s(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.\,l_i \;\;, \text{ com } \;\; l_i = Inf\,\{\, f(x) \,:\, x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\} \;\;,$$

as quais se designam, respectivamente, por *soma superior de Darboux* e *soma inferior de Darboux* de $f(x)$, relativas à decomposição D considerada.

Dado que ,

$$L = Sup\,\{\, f(x) \,:\, a \leq x \leq b \,\} \;\geq\; L_i = Sup\,\{\, f(x) \,:\, x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\}$$

$$l = Inf\,\{\, f(x) \,:\, a \leq x \leq b \,\} \leq l_i = inf\,\{\, f(x) \,:\, x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\},$$

e sendo, por outro lado, $l_i \;\leq\; L_i$ e $\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \;=\; b - a$, tira-se sem dificuldade que,

$$l\,.\,(b - a) \;\leq\; s(D) \;\leq\; S(D) \;\leq\; L\,.\,(b - a)\,.$$

Portanto, as somas inferiores são majoradas por $L\,.\,(b - a)$ e as somas superiores são minoradas por $l\,.\,(b - a)$ existindo então finitos o supremo do conjunto das somas inferiores e o ínfimo do conjunto das somas superiores, simbolicamente , $Sup\,\{s(D)\}$ e $Inf\,\{S(D)\}$, designando-se tais valores, respectivamente, por *integral inferior de Darboux* e *integral superior de Darboux* de $f(x)$ no intervalo $[a\,,\,b]$:

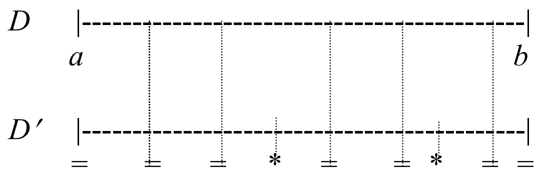
$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} = Sup\,\{s(D)\} \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b f(x)\,dx} = Inf\,\{S(D)\}\,.$$

(*Integral inferior de Darboux*) (*Integral superior de Darboux*)

No teorema seguinte estabelece-se uma relação de desigualdade entre os dois integrais de Darboux:

Teorema 1 : *Tem-se a seguinte desigualdade,* $\underline{\int_a^b f(x)\,dx} \;\leq\; \overline{\int_a^b f(x)\,dx}$

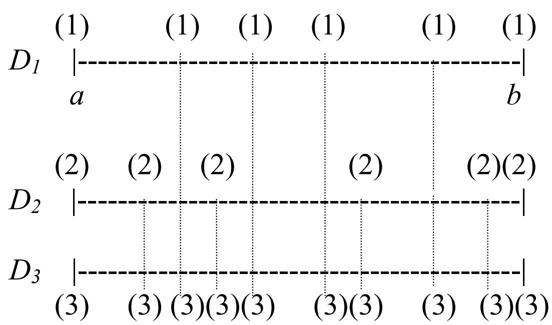
Demonstração : A demonstração da desigualdade baseia-se no conceito de decomposição mais fina. Diz-se que uma decomposição D' de um intervalo $[a\,,\,b]$ é mais fina que outra decomposição D do mesmo intervalo se e só se a primeira é formada por todos os pontos da segunda e pelo menos mais um adicional, ou seja, se e só se $D \subset D'$, como sucede no esquema que a seguir se apresenta:



= *Pontos comuns de D e D′*

* *Pontos adicionais de D′*

Dadas duas decomposições D_1 e D_2 do intervalo $[a\ ,\ b]$ é sempre possível construir uma decomposição D_3 mais fina que as primeiras, usando todos os pontos de ambas, ou seja, $D_3 = D_1 \cup D_2$, como se exemplifica no esquema seguinte :



(1) *Pontos de* D_1

(2) *Pontos de* D_2

(3) *Pontos de* D_3

É fácil concluir que, sendo D_3 construída como se indicou a partir de D_1 e D_2 , são verificadas as seguintes desigualdades:

$$s(D_1) \leq s(D_3) \leq S(D_3) \leq S(D_1) \quad \text{e} \quad s(D_2) \leq s(D_3) \leq S(D_3) \leq S(D_2)\ ,$$

donde resulta, $s(D_1) \leq S(D_2)$, quaisquer que sejam as decomposições D_1 e D_2 do intervalo.

Não pode ter-se, portanto, $\underline{\int_a^b f(x)\,dx} > \overline{\int_a^b f(x)\,dx}$ porque se assim fosse, dado $\delta > 0$ tal que,

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} - \delta > \overline{\int_a^b f(x)\,dx} + \delta\ ,$$

existiriam (por definição de supremo e ínfimo) decomposições D_1 e D_2 tais que,

$$s(D_1) > \underline{\int_a^b f(x)\,dx} - \delta > \overline{\int_a^b f(x)\,dx} + \delta > S(D_2)\ ,$$

o que seria contra a desigualdade $s(D_1) \leq S(D_2)$ antes estabelecida. Só pode ser portanto $\underline{\int_a^b f(x)\,dx} \leq \overline{\int_a^b f(x)\,dx}$, como se queria provar.

Quando os integrais superior e inferior de $f(x)$ no intervalo $[a\ ,\ b]$ sejam iguais, a função diz-se *integrável no sentido de Darboux*, sendo então o valor comum o *integral da função segundo Darboux* no intervalo em causa. Vamos seguidamente estabelecer a equivalência das duas definições de integral, segundo Riemann e segundo Darboux, começando por provar o,

Teorema 2 : *Representando por d o diâmetro da decomposição D , tem-se,*

$$\underline{\int_a^b f(x)\,dx} = \lim_{d\to 0} s(D) \quad e \quad \overline{\int_a^b f(x)\,dx} = \lim_{d\to 0} S(D)$$

<u>Demonstração</u> : **a)** Considere-se primeiro o caso do integral superior e admita-se que $f(x) \geq 0$ no intervalo de integração. Seja λ o valor do integral superior e considere-se um qualquer $\delta > 0$. Como λ é o ínfimo das somas superiores de Darboux, existe uma decomposição D_0 do intervalo de integração para a qual, $S(D_0) < \lambda + \delta/2$. Seja q o número de pontos de D_0 interiores do intervalo de integração e faça-se,

$$L = Sup\ \{f(x)\ :\ a \leq x \leq b\} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \delta/2qL\ .$$

Estamos a admitir que $L > 0$, pois com $L = 0$ e $f(x) \geq 0$ tem-se a função identicamente nula no intervalo de integração e então a tese do teorema é trivial porque todas as somas de Darboux são nulas.

Seja agora D uma qualquer decomposição do intervalo de integração com diâmetro d inferior a $\varepsilon = \delta/2qL$ e na expressão que define $S(D)$ separem-se as parcelas em dois grupos: **1)** o grupo das parcelas correspondentes aos subintervalos da decomposição do intervalo de integração por D que estejam contidos em subintervalos da decomposição do mesmo intervalo por D_0 , designando-se por S_1 a soma dessas parcelas (será $S_1 = 0$ se nenhuma das parcelas estiver nas condições exigidas) ; **2)** o grupo das parcelas correspondentes aos subintervalos da decomposição do intervalo de integração por D que tenham no seu interior um ou mais pontos de D_0 , designando-se por S_2 a soma dessas parcelas (será $S_2 = 0$ se nenhuma das parcelas estiver nas condições exigidas) . Claro que $S(D) = S_1 + S_2$.

Por ser $f(x) \geq 0$ resulta $S_1 \leq S(D_0)$ e, por outro lado, $S_2 \leq L\,q\,d$, porque cada parcela de S_2 é majorada por $L\,d$ e há no máximo q dessas parcelas.

Então,

$$\lambda \leq S(D) = S_1 + S_2 \leq S(D_0) + L\,q\,d \leq S(D_0) + L\,q\,(\delta/2L\,q) < \lambda + \delta/2 + \delta/2 = \\ = \lambda + \delta ,$$

ou seja , $|\,S(D) - \lambda\,| < \delta$, desde que o diâmetro $d = d(D)$ seja inferior ao número $\varepsilon = \varepsilon(\delta) = \delta/2qL$. Tal significa que,

$$\overline{\int_a^b f(x)\,dx} = \lambda = \lim_{d\to 0} S(D) ,$$

como se queria provar.

b) Continuando a considerar o caso do integral superior, elimine-se agora a hipótese de ser $f(x) \geq 0$ no intervalo de integração. Como a função $f(x)$ é limitada no intervalo, existe uma constante k tal que $g(x) = f(x) + k \geq 0$. Então, pelo demonstrado em a),

$$\overline{\int_a^b g(x)\, dx} = \lim_{d \to 0} S_g(D) .$$

Dada a relação existente entre $f(x)$ e $g(x)$, obtém-se sem dificuldade,

$$S_g(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \,.\, L_i^g = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \,.\, (L_i^f + k) = S_f(D) + k \,.\, (b - a) ,$$

donde resulta logo,

$$\overline{\int_a^b g(x)\, dx} = \overline{\int_a^b f(x)\, dx} + k \,.\, (b - a) = \lim_{d \to 0} S_g(D) .$$

Dado $\delta > 0$, existe então um $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que,

$$d = d(D) < \varepsilon \Rightarrow | S_g(D) - \overline{\int_a^b f(x)\, dx} - k \,.\, (b - a) | < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | S_f(D) + k \,.\, (b - a) - \overline{\int_a^b f(x)\, dx} - k \,.\, (b - a) | < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow | S_f(D) - \overline{\int_a^b f(x)\, dx} | < \delta ,$$

assim se concluindo, neste caso geral quanto a $f(x)$, que,

$$\overline{\int_a^b f(x)\, dx} = \lim_{d \to 0} S_f(D) .$$

c) Podemos agora provar com facilidade o teorema para o caso do integral inferior. Notando que,

$$Inf \{ f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1} \} = - Sup \{ -f(x) : x_i \leq x \leq x_{i+1} \} ,$$

tira-se $s_f(D) = - S_{-f}(D)$ para qualquer decomposição D ; esta igualdade permite obter,

$$\underline{\int_a^b f(x)\, dx} = Sup \{ s_f(D) \} = - inf \{ S_{-f}(D) \} = - \overline{\int_a^b [-f(x)]\, dx} .$$

Ora, como se demonstrou em a) e b),

$$\overline{\int_a^b \left[-f(x)\right] dx} = \lim_{d \to 0} S_{-f}(D) \,,$$

donde resulta imediatamente,

$$\underline{\int_a^b f(x)\, dx} = - \overline{\int_a^b \left[-f(x)\right] dx} = - \lim_{d \to 0} S_{-f}(D) = \lim_{d \to 0} s_f(D) \,,$$

como se queria demonstrar.

Pode agora provar-se o teorema que dá a equivalência das definições de integral segundo Riemann e segundo Darboux.

Teorema 3 : *A condição necessária e suficiente para que $f(x)$ seja integrável à Riemann no intervalo $[a\,,\,b]$ é que seja integrável segundo Darboux no mesmo intervalo. Em caso de integrabilidade, os dois integrais (segundo Riemann e segundo Darboux) são iguais*

Demonstração: a) A condição é necessária. Admita-se que $f(x)$ é integrável segundo Riemann no intervalo $[a\,,\,b]$ e designe-se por λ o integral. Dadas as definições de $s(D)$, $\sigma(D)$ e $S(D)$, tem-se, $s(D) \leq \sigma(D) \leq S(D)$. Para cada decomposição D , $s(D)$ é o ínfimo das somas sigma $\sigma(D)$ que podem calcular-se para essa decomposição mediante as infinitas escolhas dos pontos intermédios $y_i \in [x_i\,,\,x_{i+1}]$; de facto, $s(D)$ é claramente um minorante do conjunto dessas somas $\sigma(D)$ e como $f(y_i)$ pode fazer-se - por escolha conveniente de y_i - arbitrariamente próximo de $l_i = Inf\,\{\, f(x) \;:\; x_i \leq x \leq x_{i+1} \,\}$, também $\sigma(D)$ pode fazer-se arbitrariamente próximo de $s(D)$.

Do mesmo modo, para cada decomposição D , $S(D)$ é o supremo das somas sigma $\sigma(D)$ que podem calcular-se para essa decomposição mediante as infinitas escolhas dos pontos intermédios $y_i \in [\, x_i\,,\,x_{i+1}]$.

Dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que ,

$$d = d(D) < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lambda - \delta/2 < \sigma(D) < \lambda + \delta/2 \,,$$

em que como se disse λ designa o valor do integral (segundo Riemann) da função $f(x)$ no intervalo $[a\,,\,b]$; então para uma qualquer decomposição D com diâmetro inferior a ε , as infinitas somas sigma possíveis são majoradas por $\lambda+\delta/2$ e minoradas por $\lambda-\delta/2$ e como $s(D)$ e $S(D)$ são como vimos, respectivamente, o ínfimo e o supremo dessas somas sigma, tem-se,

$$\lambda - \delta/2 \leq s(D) \leq \sigma(D) \leq S(D) \leq \lambda + \delta/2 \,,$$

ou seja, $|\, s(D) - \lambda \,| < \delta$ e $|\, S(D) - \lambda \,| < \delta$, donde,

$$\lambda = \lim_{d\to 0} s(D) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \lambda = \lim_{d\to 0} S(D) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \ ,$$

ou ainda , $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lambda$, como se queria provar.

b) A condição é suficiente. Sendo $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lambda$, tem-se,

$$\lim_{d\to 0} s(D) = \lim_{d\to 0} S(D) = \lambda \ ,$$

ou seja,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta)\ :\ d = d(D) < \varepsilon \Rightarrow \lambda - \delta < s(D) \le S(D) < \lambda + \delta\ ,$$

e como $s(D) \le \sigma(D) \le S(D)$, resulta,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta)\ :\ d = d(D) < \varepsilon \Rightarrow \lambda - \delta < \sigma(D) < \lambda + \delta\ ,$$

o que traduz ser, $\lim_{d\to 0} \sigma(D) = \lambda$. Logo, $f(x)$ é integrável à Riemann no intervalo em causa e o valor do integral coincide com o do integral segundo Darboux.

Vejamos como aplicação deste teorema o estudo da integrabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,\ x \ \ racional \\ 0 & ,\ x \ \ irracional \end{cases} \ ,$$

no intervalo $[0\ ,\ 1]$. Dada uma qualquer decomposição D do intervalo com os pontos, $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ \dots\ < x_{n-1} < x_n = 1$, tem-se

$$\forall\ i = 0\ ,1\ ,\dots\ ,n\text{-}1\ \ ,\ \ l_i = 0 \ \wedge\ L_i = 1\ \ ,$$

donde resulta,

$$s(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ l_i = 0 \quad \text{e} \quad S(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ L_i = 1\ ,$$

o que permite concluir que, $\underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0$ e $\overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$, ou seja, a função dada não é integrável segundo Darboux, logo também não o é segundo Riemann no intervalo $[0\ ,\ 1]$.

3. <u>Condições de integrabilidade</u>

3.1 - Introdução

O estudo da integrabilidade e o cálculo do integral de uma função recorrendo directamente à definição é tarefa em regra impraticável, salvo em alguns casos triviais.

É pois conveniente dispor de condições que permitam, por simples observação da função, concluir pela sua integrabilidade ou não integrabilidade e, por outro lado, dispor de regras práticas de cálculo dos integrais pelo menos para as funções que mais correntemente surgem nas aplicações.

No presente ponto trataremos apenas das condições de integrabilidade, deixando para estudo posterior as regras práticas para o cálculo dos integrais.

A título de introdução pode desde já adiantar-se que a questão de uma função limitada num intervalo $[a\,,\,b]$ ser ou não ser aí integrável está ligada ao número de descontinuidades que a função apresenta no referido intervalo. Num sentido que adiante será esclarecido, a função será integrável se e apenas se não apresenta um "*número excessivo*" de descontinuidades no intervalo.

3.2 - Conjuntos com medida nula segundo Lebesgue

Diz-se que um conjunto $B \subset \mathbf{R}$ tem *medida nula* segundo Lebesgue se e só se qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem intervalos I_i limitados (de qualquer tipo) em número finito ou infinidade numerável, de amplitudes $\Delta(I_i)$ tais que : **1)** $B \subseteq \bigcup_i I_i$; **2)** $\sum_i \Delta(I_i) < \varepsilon$.

Vejamos alguns exemplos de conjuntos com medida nula segundo Lebesgue :

1) Desde logo o conjunto $B = \emptyset$:

2) Qualquer conjunto finito $B = \{\, r_1 , r_2 , \ \dots\ , r_k \,\}$. Com efeito, fixado qualquer $\varepsilon > 0$, para os intervalos $I_i = \,]\, r_i - \varepsilon/3k\,,\ r_i + \varepsilon/3k\,[$ tem-se que $B \subseteq \bigcup_i I_i$ e por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta(I_i) \;=\; k \cdot \frac{2\varepsilon}{3k} \;=\frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \ .$$

3) Qualquer conjunto numerável $B = \{ r_1 , r_2 , \ \dots \ , r_n , \dots \}$. Com efeito, fixado qualquer $\varepsilon > 0$, para os intervalos $I_i = \left] r_i - \varepsilon /3.(2^n) \ , \ r_i + \varepsilon /3.(2^n) \right[$ tem-se que $B \subseteq \bigcup_i I_i$ e por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Delta(I_i) \ = \ 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3} \cdot (1/2)^n \ = \frac{2\varepsilon}{3} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{2\varepsilon}{3} \ < \ \varepsilon \ .$$

Não se julgue que só os conjuntos finitos ou numeráveis têm medida nula. Existem subconjuntos de **R** muito mais complexos que têm potência do contínuo (são equipotentes a **R**) e no entanto têm medida nula. É o caso do conjunto ternário de Cantor:

$$C = [0 \, , 1] \ - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad , \text{ com } \ E_n = \bigcup_{r=1}^{3^n/3} \left] (3r-2).3^{-n} \ , \ (3r-1).3^{-n} \right[\ .$$

3.3 - <u>Condições de integrabilidade</u>

O conceito de conjunto com medida segundo Lebesgue nula permite enunciar o seguinte teorema, cuja demonstração não se apresenta por ultrapassar o âmbito do presente texto.

Teorema 4 : *A condição necessária e suficiente para que $f(x)$ (limitada) seja integrável à Riemann em $[a \, , b]$ é que o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ nesse intervalo tenha medida nula segundo Lebesgue*

O teorema precedente permite desde logo afirmar que são integráveis em $[a \ , \ b]$ as funções contínuas nesse intervalo ou que, sendo limitadas nesse intervalo, aí tenham no máximo uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade. Estão nessas condições , entre outras as funções limitadas que :

a) Sejam monótonas no intervalo porque, como sabemos, não podem ter no intervalo de monotonia mais que uma infinidade numerável de descontinuidades ;

b) Sejam limitadas e monótonas por troços no intervalo ; uma função diz-se *monótona por troços* no intervalo $[a \, , b]$ se e só se existem reais,

$$a_0 = a < \ a_1 < \ a_2 < \ \dots \ < \ a_k = b \ ,$$

tais que $f(x)$ é monótona em cada um dos intervalos $\left] a_i \, , a_{i+1} \right[$.

4. <u>Interpretação geométrica do conceito de integral</u>

Considere-se a função $f(x) \geq 0$ em $[a \, , b]$ e seja ,

$$D = \{ \ x_0 = a \ , x_1 \ , \dots , x_{n\text{-}1} \ , x_n \ = b \ \} \ ,$$

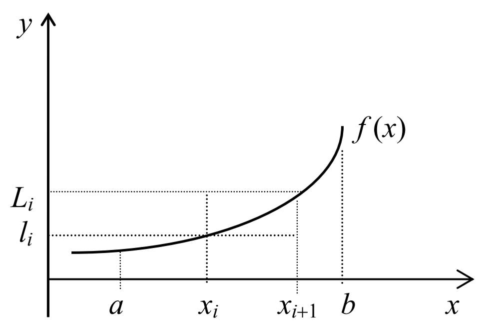
uma decomposição do intervalo. As somas inferior e superior de Darboux de $f(x)$ relativas à decomposição D,

$$s(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot l_i \ , \text{ com } \ l_i = Inf\,\{ f(x) \ : \ x_i \leq x \leq x_{i+1} \}$$

$$S(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot L_i \ , \text{ com } \ L_i = Sup\,\{ f(x) \ : \ x_i \leq x \leq x_{i+1} \} \ ,$$

admitem uma interpretação geométrica interessante:

a) Cada parcela $(x_{i+1} - x_i) .\ l_i$ é a área de um rectângulo de base $x_{i+1} - x_i$ e de altura l_i e, por outro lado, cada parcela $(x_{i+1} - x_i) .\ L_i$ é a área de um rectângulo de base $x_{i+1} - x_i$ e de altura L_i como se ilustra na figura seguinte:



b) As somas $s(D)$ e $S(D)$ são, portanto, respectivamente, aproximações por defeito e por excesso da área da figura plana que representa o conjunto,

$$\Delta = \{(x\,,\,y) \ : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\} \ ;$$

c) Quando *f(x)* seja integrável em $[a\,,\,b]$, tem-se :

$$\int_a^b f(x)\ dx = \underline{\int_a^b f(x)\ dx} = Sup\ \{s(D)\} = Inf\ \{S(D)\} = \overline{\int_a^b f(x)\ dx} \ ,$$

ou seja , o supremo das aproximações por defeito da área da figura plana que representa o conjunto Δ coincide com o ínfimo das aproximações por excesso da mesma área, sendo então o valor comum - ou seja, o integral da função - a área da figura referida. Isto é,

Teorema 5 : *Sendo* $f(x) \geq 0$ *em* $[a\,,\,b]$ *, o integral* $\int_a^b f(x)\ dx$ *, caso exista, dá a área da figura plana que representa o conjunto,*

$$\Delta = \{(x\,,\,y) \ : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\} \ ,$$

ou seja , a área da figura plana delimitada superiormente pela curva que representa $f(x)$*, inferiormente pelo eixo Ox e lateralmente pelas rectas de equações* $x = a$ *e* $x = b$

Verifica-se facilmente que , com $f(x) \leq 0$ em $[a\ ,\ b]$, a área da figura plana que representa o conjunto $\Delta = \{(x\ ,\ y)\ :\ a \leq x \leq b\ \wedge\ f(x) \leq y \leq 0\}$ é dada por $-\int_a^b f(x)\ dx$, caso o integral exista.

No caso de ser, por exemplo, $f(x) \geq 0$ em $[\ a\ ,\ c]$ e $f(x) \leq 0$ em $[\ c\ ,\ b]$, a área da figura plana que representa o conjunto,

$$\Delta = \{(x\ ,y):\ a \leq x \leq c\ \wedge\ 0 \leq y \leq f(x)\} \cup \{(x\ ,y): c\ \leq\ x\ \leq\ b\ \wedge f(x) \leq y \leq 0\}\ ,$$

é dada por $\int_a^c f(x)\ dx\ -\int_c^b f(x)\ dx$.

Por composições convenientes é possível calcular áreas de figuras planas mais complexas.

5. <u>Novas propriedades do integral de Riemann</u>

Estudam-se seguidamente propriedades adicionais do integral de Riemann:

P7 : *Sendo $f(x)$ integrável em $[a\ ,\ b]$ e tomando $c \in [a\ ,\ b]$, tem-se $f(x)$ integrável em cada um dos intervalos $[a\ ,\ c]$ e $[c\ ,\ b]$ e*

$$\int_a^b f(x)\ dx\ =\ \int_a^c f(x)\ dx\ +\ \int_c^b f(x)\ dx$$

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar note-se que, tendo em conta a condição necessária e suficiente de integrabilidade expressa no teorema 4, a integrabilidade de $f(x)$ em $[a\ ,\ b]$ garante a sua integrabilidade em qualquer subintervalo deste, ficando assim provado que $f(x)$ é integrável em cada um dos intervalos $[a\ ,\ c]$ e $[c\ ,\ b]$.

Vejamos agora a igualdade do enunciado. Fixando as decomposições,

$$D_1 = \{\ x_0 = a\ , x_1\ , \dots\ , x_{n-1}\ , x_n\ = c\ \}\ \text{ de }\ [a\ ,\ c]\ \ ,$$

$$D_2 = \{\ y_0 = c\ , y_1\ , \dots\ , y_{m-1}\ , y_m\ = b\ \}\ \text{ de }\ [c\ ,\ b]\ \ ,$$

com os pontos x_i e y_j obtém-se uma decomposição,

$$D_{12}\ = \{\ x_0 = a\ , x_1\ , \dots\ , x_{n-1}\ , x_n\ = c\ = y_0\ , y_1\ , \dots\ , y_{m-1}\ , y_m\ = b\ \}\ ,$$

do intervalo $[a\ ,\ b]$ e claro que , para as somas sigma correspondentes tem-se a seguinte relação: $\sigma_f\ (D_1\ ) + \sigma_f\ (D_2\ ) =\ \sigma_f\ (D_{12}\ )$. Representando por d_1 e d_2 os diâmetros de D_1 e D_2 e por λ_1 e λ_2 os integrais de $f(x)$ em $[a\ ,\ c]$ e em $[c\ ,\ b]$, tem-se que para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon' = \varepsilon'(\delta)$ tal que,

$$d_1 < \varepsilon' \Rightarrow |\, \sigma_f\,(D_1) - \lambda_1 \,| < \delta/2$$

$$d_2 < \varepsilon' \Rightarrow |\, \sigma_f\,(D_2) - \lambda_2 \,| < \delta/2\ ,$$

ou seja, por ser $d_{12} = Máx\ \{d_1\,, d_2\}$,

$$d_{12} < \varepsilon' \Rightarrow |\, \sigma_f\,(D_{12}) - (\lambda_1 + \lambda_2)| = |\, \sigma_f\,(D_1) + \sigma_f\,(D_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)| \leq$$

$$\leq |\, \sigma_f\,(D_1) - \lambda_1 \,| + |\, \sigma_f\,(D_2) - \lambda_2 \,| < \delta\ .$$

Representando agora por λ o integral de $f\,(x)$ em $[a\ ,\ b]$ e sendo D uma qualquer decomposição deste intervalo, não necessariamente obtida como se indicou a partir de D_1 e D_2 , então dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon'' = \varepsilon''(\delta)$ tal que,

$$d = d(D) < \varepsilon'' \Rightarrow |\, \sigma_f\,(D) - \lambda \,| < \delta\ .$$

Tomando em particular $D = D_{12}$, com as decomposições D_1 e D_2 escolhidas de modo que $d_1 < \varepsilon = Mín\ \{\varepsilon', \varepsilon''\}$ e $d_2 < \varepsilon = Mín\ \{\varepsilon', \varepsilon''\}$, tem-se,

$$d_{12} < \varepsilon \Rightarrow d_{12} < \varepsilon' \Rightarrow |\, \sigma_f\,(D_{12}) - (\lambda_1 + \lambda_2)| < \delta$$

$$d_{12} < \varepsilon \Rightarrow d_{12} < \varepsilon'' \Rightarrow |\, \sigma_f\,(D_{12}) - \lambda \,| < \delta\ ,$$

donde,

$$|\, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda \,| = |\, \lambda_1 + \lambda_2 - \sigma_f\,(D_{12}) + \sigma_f\,(D_{12}) - \lambda \,| \leq$$

$$\leq |\, \sigma_f\,(D_{12}) - (\lambda_1 + \lambda_2)| + |\, \sigma_f\,(D_{12}) - \lambda \,| < \delta + \delta = 2\delta\ ;$$

devido à arbitrariedade de δ, tem-se necessariamente $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx\ ,$$

como se queria provar.

A propriedade que acaba de ser demonstrada admite o seguinte,

Corolário : *Sendo $f\,(x)$ função integrável em $[a\,, b]$ e considerando os pontos $a \leq c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{m-1} \leq c_m \leq b$, então a função é integrável nos intervalos $[a\,, c_1]$, $[\,c_1\,, c_2]$, ... , $[\,c_{m-1}\,, c_m]$, $[\,c_m\,, b]$ e tem-se,*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^{c_1} f(x)\ dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx + \ldots + \int_{c_{m-1}}^{c_m} f(x)\ dx + \int_{c_m}^{b} f(x)\ dx$$

<u>Demonstração</u> : Basta aplicar repetidamente a propriedade P7 .

A propriedade P7 pode adaptar-se de forma a abranger situações mais gerais em que o ponto c possa estar à esquerda de a ou à direita de b . De facto, sendo $c < a$ e supondo $f(x)$ integrável em $[c\,,\,b]$, tem-se,

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \ ,$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ ;$$

por outro lado, sendo $c > b$ e supondo $f(x)$ integrável em $[a\,,\,c]$, tem-se,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ ,$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

Os segundos membros das igualdades que dão o valor do integral $\int_a^b f(x)\,dx$ nos casos em que $c < a$ ou $c > b$ podem ser formalmente apresentados como a igualdade da propriedade P7, a qual foi estabelecida para o caso em que $a \le c \le b$. Basta para isso fazer a seguinte,

<u>CONVENÇÃO SIMBÓLICA</u> : *Sendo $f(x)$ integrável em $[x_1\,,\,x_2]$ ($x_1 \le x_2$) o símbolo $\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx$ representa o simétrico do integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, isto é,*

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \ .$$

Com esta convenção, o enunciado da propriedade P7 pode apresentar-se em termos mais gerais, como seguidamente se indica:

P8 : *Sendo $f(x)$ integrável em $[a_1\,,\,a_2]$, com $a_1 = Mín\,\{\,a\,,c\}$ e $a_2 = Máx\,\{\,b\,,c\}$ ($a \le b$) , então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

<u>Demonstração</u>: Com $a \le c \le b$, estamos no caso da propriedade P7 já demonstrada. Sendo $c < a \le b$, temos, como se viu nas considerações que imediatamente seguem a demonstração do corolário da propriedade P7,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \ ,$$

e, com a convenção referida, resulta, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
Finalmente, sendo $a \leq b < c$, temos,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx \ ,$$

e, de novo com a convenção referida, resulta também a igualdade do enunciado.

A propriedade seguinte é normalmente conhecida por *teorema da média*:

P9 : *Sendo* $f(x)$ *integrável em* $[a\,,b]$ *, existe um valor* k *entre o ínfimo* l *e o supremo* L *de f(x) no intervalo, tal que:* $\int_a^b f(x)\,dx = k\,.(b - a)$

<u>Demonstração</u>: Dado que $l \leq f(x) \leq L$ em $[a\,,b]$, a propriedade P6 permite escrever,

$$\int_a^b l\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b L\,dx \ ,$$

e, pela propriedade P2, $l\,.\,(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq L\,.\,(b - a)$. Admitindo que $a < b$ (no caso de ser $a = b$, a igualdade do enunciado é trivial) , tem-se,

$$l \leq k = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a} \leq L \ ,$$

donde resulta $\int_a^b f(x)\,dx = k\,.(b - a)$, com $l \leq k \leq L$, como se queria provar.

Desta propriedade tira-se o seguinte corolário,

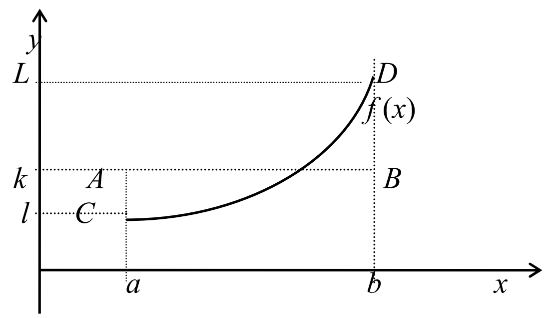
Corolário : *Sendo* $f(x)$ *contínua em* $[a\,,b]$ *, existe um* $x' \in [a\,,b]$ *tal que* $\int_a^b f(x)\,dx =$
$= f(x')\,.(b - a)$

<u>Demonstração</u>: Resulta imediatamente da propriedade P9, notando que uma função $f(x)$ continua em $[a\,,b]$ assume qualquer valor *k* entre o seu ínfimo e o seu supremo nesse intervalo, em certo $x' \in [a\,,b]$.

O teorema da média (propriedade P9) e o seu corolário admitem uma interpretação geométrica interessante, no caso em que $f(x) \geq 0$ no intervalo $[a\,,b]$.

Como se sabe, o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área da figura plana que representa o conjunto $\Delta = \{(x\,,y) \ : \ a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x)\}$; por outro lado, o produto $(b - a).\,k$, com

$0 \leq l \leq k \leq L$, é a área de um rectângulo de base $b - a$ e altura k . O teorema da média significa portanto que existe um valor $k \in [l\ ,\ L]$ para o qual são iguais as áreas referidas, como se ilustra na figura seguinte:



Área da figura $CabD$ = Área da figura $AabB$

Observe-se ainda que o teorema da média pode aplicar-se a $\int_b^a f(x)\, dx$ com $a < b$:

$$\int_b^a f(x)\, dx = - \int_a^b f(x)\, dx = - k\,.(b - a) = k\,.(a - b)\ ,$$

com k entre o ínfimo e o supremo de $f(x)$ em $[a\ ,\ b]$. Ou seja,

P10 : *Sendo a e b quaisquer e* $f(x)$ *integrável em* $[a_1\ ,\ a_2]$ *, com* $a_1 = Mín\ \{a\ ,\ b\}$ *e* $a_2 = Máx\ \{a\ ,\ b\}$ *, então* $\int_a^b f(x)\, dx = k\,.(b - a)$*, com* <u>*k*</u> *entre o ínfimo e o supremo de* $f(x)$ *em* $[a_1\ ,\ a_2]$

Tem-se também, em correspondência com o corolário da propriedade P9, o seguinte,

Corolário : *Sendo a e b quaisquer e* $f(x)$ *contínua em* $[a_1\ ,\ a_2]$ *, com* $a_1 = Mín\ \{a\ ,\ b\}$ *e* $a_2 = Máx\ \{a\ ,\ b\}$ *, então* $\int_a^b f(x)\, dx = f(x')\,.(b - a)$*, para certo* $x' \in [a_1\ ,\ a_2]$

Para terminar o presente ponto, estuda-se na propriedade seguinte a importante *desigualdade de Schwarz* :

P11 : *Sendo* $f(x)$ *e* $g(x)$ *integráveis em* $[a\ ,\ b]$ *, tem-se que as funções* $f^2(x)$ *,* $g^2(x)$ *e* $f(x).\, g(x)$ *são igualmente integráveis no mesmo intervalo e ,*

$$\left[\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\, dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x)\, dx\right]\,.\left[\int_a^b g^2(x)\, dx\right] \quad \text{(Schwarz)}$$

<u>Demonstração</u>: Face ao teorema 4 (condição necessária e suficiente de integrabilidade) , da integrabilidade das funções $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[a\ ,\ b]$ decorre

imediatamente a integrabilidade das funções $f^2(x)$, $g^2(x)$ e $f(x).\, g(x)$ no mesmo intervalo porque estas funções têm no máximo as descontinuidades daquelas .

Sendo $\alpha \in \mathbf{R}$, a função $[\,f(x) + \alpha\, g(x)]^2$ é igualmente integrável e tem-se, por se tratar de uma função não negativa,

$$0 \leq \int_a^b [f(x) + \alpha\; g(x)]^2\, dx \;=\; [\int_a^b g^2(x)\; dx\,] \,.\, \alpha^2 \;+ 2\,.[\int_a^b f(x)\,.\, g(x)\; dx\,].\; \alpha \;+$$

$$+\, [\int_a^b f^2(x)\; dx\,]\,.$$

O trinómio do 2º grau em α a que se chegou só poderá ser não negativo para todo o valor $\alpha \in \mathbf{R}$ se for,

$$\Delta = 4\,.[\int_a^b f(x)\,.\, g(x)\; dx\,]^2 \;-\; 4\,.[\int_a^b f^2(x)\; dx\,] \;\,.\, [\int_a^b g^2(x)\; dx\,] \;\leq\; 0\,,$$

donde resulta imediatamente a desigualdade do enunciado.

6. <u>Fórmula fundamental do cálculo integral</u>

Seja $f(x)$ ao mesmo tempo integrável e primitivável no intervalo $[a\,,\,b]$. Nestas condições o cálculo do integral pode fazer-se utilizando uma das primitivas da função, nos termos do teorema seguinte,

Teorema 6 : *Sendo $f(x)$ integrável e primitivável em $[a\,,\,b]$ e $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$ no intervalo, então $\int_a^b f(x)\; dx \;=\; F(b) - F(a)$*

<u>Demonstração</u> : Sendo $D = \{\, x_0 = a\;,\, x_1\;,\; \dots\;,\, x_{n-1}\;,\, x_n \;= b\;\}$ uma decomposição do intervalo de integração, tem-se,

$$F(b) - F(a) \;=\; F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \;\dots\; + F(x_n) - F(x_{n-1})\,,$$

e, aplicando o teorema de Lagrange a cada uma das diferenças $F(x_i) - F(x_{i-1})$, obtém-se,

$$F(b) - F(a) \;= (x_1 \;- x_0).\, f(y_0) + (x_2 - x_1)\,.\, f(y_1) + \;\dots\; + (x_n \;- x_{n-1})\,.\, f(y_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.\, f(y_i)\;,$$

com certos y_i pertencentes aos intervalos $[x_i\,,\, x_{i+1}]$ $(i = 0\;,\,1\;,\;\dots\;,\, n\text{-}1)$. Ou seja, para qualquer decomposição D do intervalo de integração é sempre possível escolher pontos intermédios y_i nos subintervalos $[x_i\,,\, x_{i+1}]$ de modo que $F(b) - F(a) = \sigma(D)$. Mas, por ser $f(x)$ integrável em $[a\,,\,b]$, tem-se,

$$\lim_{d \to 0} \sigma(D) = \int_a^b f(x)\, dx \ ,$$

donde necessariamente, $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.

É usual representar a diferença $F(b)$ - $F(a)$ pelo símbolo $\left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b}$, de modo que a igualdade do teorema escreve-se habitualmente do seguinte modo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x)\right]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \ .$$

A fórmula de cálculo do teorema e conhecida pelo nome de *fórmula fundamental do cálculo integral* ou *fórmula de Barrow*.

Vejamos alguns exemplos de aplicação:

1) $\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$;

2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left[arc\, tg\, x\right]_{x=0}^{x=1} = \pi/4$;

3) $\int_1^2 \frac{1}{2+x}\, dx = \left[log\,(2+x)\right]_{x=1}^{x=2} = log\, 4 - log\, 3 = log\,(4/3)$.

A fórmula fundamental do teorema 6, conjugada com o corolário da propriedade P7, permite ainda obter o integral quando, embora a função integranda não tenha primitiva no intervalo de integração, este se possa decompor em dois ou mais subintervalos (em número finito) em cada um dos quais a função integranda seja primitivável. É o caso de $\int_{-1}^{2} f(x)\, dx$, quando seja por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x & , \ x < 0 \\ 1 - x & , \ 0 \le x < 1 \\ 2x & , \ x \ge 1 \end{cases} \ .$$

Tem-se,

$$\int_{-1}^{2} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x\, dx + \int_{0}^{1} (1-x)\, dx + \int_{1}^{2} 2x\, dx =$$

$$= \left[x^2/2\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[x - x^2/2\right]_{x=0}^{x=1} + \left[x^2\right]_{x=1}^{x=2} =$$

$$= (0 - 1/2) + (1/2 - 0) + (4 - 1) = 3\,.$$

7. Integral indefinido

Considere-se $f(x)$ definida em I (intervalo qualquer) e admita-se que é integrável em qualquer intervalo fechado contido em I o que, antes de mais, pressupõe que $f(x)$ seja limitada em qualquer $[a\,,b] \subset I$. Fixe-se $c \in I$ e defina-se a função,

$$\varphi(z) = \int_{c}^{z} f(x)\, dx \quad (\, z \in I\,)\,,$$

devendo notar-se que o símbolo do segundo membro representa o integral de $f(x)$ em $[c\,,z]$ quando seja $z \geq c$; e representa o simétrico do integral de $f(x)$ em $[z\,,c]$ quando seja $c > z$. Isto é,

$$\varphi(z) = \begin{cases} \int_{c}^{z} f(x)dx \quad , \; z \in I \;\wedge\; z \geq c \\ -\int_{z}^{c} f(x)dx \,, \; z \in I \;\wedge\; z < c \end{cases} .$$

A função $\varphi(z)$ toma o nome de *integral indefinido* de $f(x)$ no intervalo I, com *origem* no ponto $c \in I$.

Na prática usa-se a letra x para designar a variável independente da função φ, o que obriga a alterar a letra que representa a variável independente da função integranda:

$$\varphi(x) = \int_{c}^{x} f(t)\, dt \;\;,\;\; \varphi(x) = \int_{c}^{x} f(u)\, du \;\;, \text{ etc.}$$

Vejamos algumas propriedades do integral indefinido.

P12 : *Dois integrais indefinidos da mesma função, no mesmo intervalo, diferem por uma constante*

<u>Demonstração</u> : Sendo $\varphi(x) = \int_{c}^{x} f(t)\, dt$ e $\psi(x) = \int_{d}^{x} f(t)\, dt$, tem-se, para $x \in I$, pela propriedade P8 ,

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{c}^{x} f(t)\, dt - \int_{d}^{x} f(t)\, dt = \int_{c}^{d} f(t)\, dt \;\;,$$

o que mostra que a diferença $\varphi(x)$ - $\psi(x)$ não depende do valor de x considerado em I, ou seja, os dois integrais indefinidos de $f(x)$ diferem por uma constante .

P13 : *O integral indefinido $\varphi(x)$ é função contínua no intervalo I onde está definida*

<u>Demonstração</u> : Utilizando a propriedade P8 e o teorema da média (na versão geral contida na propriedade P10), com $x, x_0 \in I$, tem-se,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = (x - x_0) . k(x, x_0) ,$$

com $k(x, x_0)$ compreendido entre o ínfimo e o supremo de $f(x)$ no intervalo de extremidades x_0 e x. Quando se faz $x \to x_0$, $k(x, x_0)$ mantém-se limitado, donde resulta que,

$$\lim_{x \to x_0} [\varphi(x) - \varphi(x_0)] = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) . k(x, x_0) = 0 ,$$

ou seja, $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$, o que traduz a continuidade de $\varphi(x)$ em qualquer $x_0 \in I$ (note-se que quando x_0 seja uma das extremidades de I, a continuidade obtida é a continuidade lateral).

P14 : *O integral indefinido tem por derivada a função integranda nos pontos em que esta seja contínua*

<u>Demonstração</u> : Como na demonstração da propriedade P13, tem-se,

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt ,$$

donde resulta, para $x \in I$ e $x \neq x_0$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} . \int_{x_0}^x f(t)\,dt .$$

Sendo $f(t)$ contínua em x_0, tem-se $f(t) = f(x_0) + \alpha(t)$, com $\lim_{t \to x_0} \alpha(t) = 0$. Por se obter de $f(t)$ subtraindo a constante $f(x_0)$, $\alpha(t)$ é integrável no intervalo de extremidades x_0 e x e assim,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} . \int_{x_0}^x [f(x_0) + \alpha(t)]\,dt =$$

$$= \frac{1}{x - x_0} . \left[(x - x_0) . f(x_0) + \int_{x_0}^x \alpha(t)\,dt\right] =$$

$$= f(x_0) + \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt \right].$$

Vejamos agora que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt \right] = 0\,,$$

o que provará ser,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi\,(x) - \varphi\,(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)\,,$$

que é o que se pretende mostrar.

Como $\lim\limits_{t \to x_0} \alpha(t) = 0$, dado $\delta > 0$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, tal que,

$$|\, t - x_0 \,| < \varepsilon \;\wedge\; t \in I \;\Rightarrow\; |\alpha(t)| < \delta \;\Rightarrow\; -\delta < \alpha(t) < \delta\;;$$

quando se tenha $|x - x_0| < \varepsilon$ e $x \in I$, qualquer t do intervalo de extremidades x_0 e x verificará as condições $|\, t - x_0 \,| < \varepsilon$ e $t \in I$, pelo que será,

$$-\delta.(x - x_0) < \int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt < \delta.(x - x_0) \quad , \quad \text{se } x \geq x_0$$

$$-\delta.(x_0 - x) < \int_{x}^{x_0} \alpha\,(t)\;dt < \delta.(x_0 - x) \quad , \quad \text{se } x < x_0\;;$$

ou ainda,

$$-\delta < \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt \right] < \delta \quad , \quad \text{se } x \geq x_0$$

$$-\delta < \frac{1}{x_0 - x} \cdot \left[\int_{x}^{x_0} \alpha\,(t)\;dt \right] = \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt \right] < \delta \quad , \quad \text{se } x < x_0\,,$$

podendo portanto escrever-se, quer para $x \geq x_0$, quer para $x < x_0$,

$$-\delta < \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt \right] < \delta$$

desde que $|x - x_0| < \varepsilon$ e $x \in I$. Tal significa que,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} \alpha\,(t)\;dt \right] = 0\,,$$

como se queria provar.

<u>OBSERVAÇÃO</u>: Nas extremidades do intervalo I onde $\varphi(x)$ está definida, caso pertençam ao intervalo e nelas seja contínua $f(x)$, os valores da função $f(x)$ são as derivadas laterais do integral indefinido.

A propriedade que acaba de ser demonstrada admite dois corolários importantes:

Corolário 1 : *A derivada do integral indefinido $\varphi(x)$ coincide com $f(x)$ excepto, quando muito, nos pontos de um conjunto $X \subset I$ com medida à Lebesgue nula*

<u>Demonstração</u>: Para que o integral indefinido $\varphi(x)$ exista em I é necessário e suficiente que $f(x)$ seja integrável em qualquer subintervalo limitado e fechado de I . Então, de acordo com o teorema 4, o conjunto dos pontos de descontinuidade de $f(x)$ em qualquer desses subintervalos, logo em I , tem de ter medida à Lebesgue nula. Como nos pontos de continuidade de $f(x)$ se tem $\varphi'(x) = f(x)$ conclui-se então que esta igualdade só não se verifica, quando muito, para os pontos de um conjunto $X \subset I$ com medida à Lebesgue nula .

Corolário 2 : *Qualquer função $f(x)$ contínua num intervalo I é primitivável nesse intervalo*

<u>Demonstração</u> : Fixando um qualquer $c \in I$, a função é contínua em qualquer intervalo fechado de extremidades c e x . Logo é limitada e integrável em qualquer desses intervalos, existindo portanto o integral indefinido,

$$\varphi(x) = \int_c^x f(t)\, dt \, .$$

Pela propriedade P14 , $\varphi'(x) = f(x)$ nos pontos de continuidade de $f(x)$; como por hipótese este função é contínua em todos os pontos $x \in I$, em todos eles se verifica $\varphi'(x) = f(x)$, donde resulta que $\varphi(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ no intervalo I .

8. <u>Integração por partes</u>

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções integráveis no intervalo $[a\, , b]$. Considerando uma decomposição D do intervalo de integração, a soma $\sigma(D)$ de $f(x) . g(x)$ para a decomposição em causa é,

$$\sigma(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \, . \, f(y_i) \, . \, g(y_i) \, .$$

A função $f(x) . g(x)$ é também integrável no intervalo em causa e, por definição,

$$\int_a^b f(x) \, . \, g(x) \, dx = \lim_{d \to 0} \sigma(D) \, .$$

Considerem-se agora as somas,

$$\tau(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(y_i) \cdot k_i \,,$$

em que os k_i designam valores compreendidos entre o ínfimo e o supremo de $g(x)$ em $[x_i, x_{i+1}]$.

Como $f(x)$ é integrável , é limitada no intervalo $[a, b]$, ou seja , $|\, f(x) \,| \le M$ para $x \in [a, b]$, com certa constante M . Então,

$$|\, \sigma(D) - \tau(D) | = |\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot f(y_i) \cdot [g(y_i) - k_i] \,| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot |f(y_i)| \cdot |g(y_i) - k_i| \le \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot M \cdot |\Lambda_i - \lambda_i| \,,$$

em que Λ_i e λ_i designam, respectivamente, o supremo e o ínfimo de $g(x)$ no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$. Notando agora que,

$$S(D) - s(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot [\Lambda_i - \lambda_i] \,,$$

em que $S(D)$ e $s(D)$ designam as somas superior e inferior de Darboux de $g(x)$ relativas à decomposição D e atendendo à integrabilidade de $g(x)$ no intervalo $[a, b]$, os teoremas 2 e 3 permitem concluir que,

$$\lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot [\Lambda_i - \lambda_i] = \lim_{d \to 0} [\, S(D) - s(D)] = 0 \,,$$

donde se tira que, $\lim_{d \to 0} \tau(D) = \lim_{d \to 0} \sigma(D) = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$. Estas considerações e o resultado a que se chegou vão permitir demonstrar o teorema seguinte, o qual traduz o chamado *método de integração por partes* :

Teorema 7 : *Sendo $u(x)$ e $v(x)$ integráveis em $[a, b]$ e designando por $U(x)$ e $V(x)$ os seus integrais indefinidos (quaisquer) naquele intervalo, tem-se:*

$$\int_a^b u(x) \cdot V(x)\, dx = [U(x) \cdot V(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b U(x) \cdot v(x)\, dx$$

Demonstração : Note-se em primeiro lugar que as hipóteses do teorema garantem a existência dos integrais que figuram na igualdade. Com efeito, $u(x)$ é integrável e $V(x)$ contínua no intervalo em causa ; por outro lado, $v(x)$ é integrável e $U(x)$ contínua no mesmo intervalo.

Tome-se uma qualquer decomposição D do intervalo $[a, b]$ e faça-se $\Phi(x) = U(x).V(x)$. Tem-se,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) \Big] = \sum_{i=0}^{n-1} \Big[U(x_{i+1}) \,.\, V(x_{i+1}) - U(x_i) \,.\, V(x_i) \Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} U(x_{i+1}) \,.\, \Big[V(x_{i+1}) - V(x_i) \Big] + \sum_{i=0}^{n-1} V(x_i) \,.\, \Big[U(x_{i+1}) - U(x_i) \Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} U(x_{i+1}) \,.\, \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)\, dx + \sum_{i=0}^{n-1} V(x_i) \,.\, \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x)\, dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} U(x_{i+1}) \,.\, (x_{i+1} - x_i) \,.\, k_i + \sum_{i=0}^{n-1} V(x_i) \,.\, (x_{i+1} - x_i) \,.\, k_i^* \ ,$$

com k_i entre o ínfimo e o supremo de $v(x)$ em $[x_i \, , x_{i+1}]$ e k_i^* entre o ínfimo e o supre-mo de $u(x)$ em $[x_i \, , x_{i+1}]$. Então,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} U(y_i) \,.\, (x_{i+1} - x_i) \,.\, k_i + \sum_{i=0}^{n-1} V(w_i) \,.\, (x_{i+1} - x_i) \,.\, k_i^* \ ,$$

com $y_i = x_{i+1}$ e $w_i = x_i$. Os dois somatórios obtidos são somas $\tau\,(D)$ referentes à decomposição D , respectivamente, para os produtos $U(x).v(x)$ e $V(x).\, u(x)$, pelo que, nos termos das considerações que precedem o teorema,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} U(y_i) \,.\, (x_{i+1} - x_i) \,.\, k_i + \lim_{d \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} V(w_i) \,.\, (x_{i+1} - x_i) \,.\, k_i^* =$$

$$= \int_a^b U(x) \,.\, v(x)\, dx + \int_a^b u(x) \,.\, V(x)\, dx \ ,$$

donde resulta atendendo à definição de $\Phi(x)$,

$$\int_a^b u(x) \,.\, V(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) - \int_a^b U(x) \,.\, v(x)\, dx =$$

$$= \Big[U(x) \,.\, V(x) \Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b U(x) \,.\, v(x)\, dx \ ,$$

que é a fórmula de integração a demonstrar.

<u>OBSERVAÇÃO</u> : Fórmula semelhante, envolvendo primitivas em vez de integrais indefinidos, pode ser obtida utilizando o método de primitivação por partes e a fórmula fundamental do cálculo integral do teorema 6. No entanto, esse procedimento obriga a admitir que as funções $u(x)$ e $v(x)$, além de integráveis, sejam também primitiváveis no intervalo $[a \, , b]$; e tem ainda de assumir-se que $U(x).v(x)$ seja primitivável no mesmo intervalo. Nessas condições,

a) A fórmula de primitivação por partes permite obter,

$$P\, u(x).V(x) \;=\; U(x).V(x) \;-\; P\, U(x).v(x)\ ;$$

b) A fórmula de cálculo do teorema 6 dá, por seu lado,

$$\int_a^b u(x)\,.\,V(x)\ dx = \big[U(x)\,.\,V(x) \;-\; P\, U(x)\,.\,v(x)\big]_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \big[U(x)\,.\,V(x)\big]_{x=a}^{x=b} \;-\; \int_a^b U(x)\,.\,v(x)\ dx\ ,$$

fórmula semelhante à do teorema 7, mas em que $U(x)$ e $V(x)$ representam primitivas (e não necessariamente integrais indefinidos) de $u(x)$ e $v(x)$.

9. Integração por substituição

Tal como o método de primitivação por substituição, com o qual tem grandes semelhanças, também o método de integração por substituição permite em muitos casos simplificar o cálculo de integrais. O teorema em que se fundamenta o método é o seguinte.

Teorema 8 : *Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a\,,\,b]$, $\varphi(t)$ uma função estritamente crescente e derivável com domínio em $[\alpha\,,\,\beta]$ e admita-se que $a = \varphi(\alpha)$ e $b = \varphi(\beta)$. Nessas condições, sendo $\varphi'(t)$ integrável em $[\alpha\,,\,\beta]$, tem-se:*

$$\int_a^b f(x)\ dx \;=\; \int_\alpha^\beta f\,\big[\varphi\,(t)\big]\,.\,\varphi\,'(t)\ \ dt$$

<u>Demonstração</u> : **a)** Por ser $\varphi(t)$ estritamente crescente, a cada decomposição,

$$D = \{\ t_0 = \alpha\ ,\ t_1\ ,\ t_2\ ,\ \dots\ ,\ t_{n-1}\ ,\ t_n = \beta\,\}\ ,$$

do intervalo $[\alpha\,,\,\beta]$ corresponde, fazendo $x_i = \varphi(t_i)$, uma decomposição,

$$D^* = \{\ x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,\ x_{n-1}\ ,\ x_n = b\ \}\ ,$$

do intervalo $[a\ ,\ b]$. O teorema de Lagrange e o facto de $\varphi'(t)$ ser limitada (por ser integrável) em $[\alpha\,,\,\beta]$ permitem concluir que,

$$x_{i+1} - x_i \;=\; \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\ .\ \varphi'(t_i{}^*) \;\le\; (t_{i+1} - t_i)\ .\ M\quad ,$$

$$(\ i = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \dots\ ,\ n\text{-}1)\ ,$$

com certo $t_i^* \in \,]\, t_i\,,\, t_{i+1} [\,$, em que M é o supremo (finito) de $\varphi'(t)$ em $[\alpha\,,\,\beta\,]$. Esta desigualdade permite concluir que: sendo d o diâmetro de D e d^* o diâmetro de D^*, então,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \delta/M\ :\ d = d(D) < \varepsilon\ \Rightarrow\ d^* = d(D^*) < \delta\ ;$$

de facto,

$$d = d(D) < \varepsilon = \delta/M \ \Rightarrow\ t_{i+1} - t_i < \varepsilon = \delta/M\ \ (\,i = 0\,,1\,,2\,,\ldots\,,n\text{-}1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (t_{i+1} - t_i).\, M < \delta\ \ (\,i = 0\,,1\,,2\,,\ldots\,,n\text{-}1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_{i+1} - x_i < \delta\ \ (\,i = 0\,,1\,,2\,,\ldots\,,n\text{-}1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ d^* = d(D^*) < \delta\ .$$

b) Continuando a considerar as decomposições D e D^* da alínea anterior, sejam:

$$\sigma_g(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\ .\ f\,\big[\varphi\,(u_i)\big]\,.\,\varphi\,'(u_i)\ ,$$

com $u_i \in [t_i\,,\,t_{i+1}]$, uma soma sigma de $g(t) = f\,[\varphi\,(t)]\ .\ \varphi'(t)$ relativa à decomposição D ; e, por outro lado,

$$\sigma_f(D^*) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ f\,(y_i)\ ,$$

com $y_i = \varphi\,(u_i) \in [x_i\,,\,x_{i+1}]$, uma soma sigma de $f\,(x)$ relativa à decomposição D^* . O teorema de Lagrange permite escrever,

$$\sigma_f(D^*) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\ .\ f\,(y_i)\ = \sum_{i=0}^{n-1} \Big[\varphi\,(t_{i+1}) - \varphi\,(t_i)\Big].\ f\,\big[\varphi\,(u_i)\big]\ =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\ .\ \varphi\,'(t_i^*)\ .\ f\big[\varphi\,(u_i)\big]\ ,$$

com $t_i^* \in \,]\, t_i\,,\, t_{i+1} [\,$; e então,

$$|\,\sigma_f(D^*) - \sigma_g(D)\,| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\ .\ f\big[\varphi\,(u_i)\big].\big[\varphi\,'(t_i^*) - \varphi\,'(u_i)\big]\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\ .\left|\ f\big[\varphi\,(u_i)\big]\right|.\,\big[\,L_i - l_i\big] \le \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\ .\ K\,.\,\big[\,L_i - l_i\big]\ ,$$

em que L_i e l_i são , respectivamente , o supremo e o ínfimo de $\varphi'(t)$ no intervalo $[\, t_i , t_{i+1}]$ e K um majorante positivo de $|\, f(x) \,|$ em $[a , b]$. Representando por $S_{\varphi'}(D)$ e $s_{\varphi'}(D)$, respectivamente, as somas superior e inferior de Darboux de $\varphi'(t)$ relativas à decomposição D , tem-se ainda,

$$|\sigma_f(D^*) - \sigma_g(D)\,| \;\le\; K\,.[\, S_{\varphi'}(D) - s_{\varphi'}(D)] \;.$$

Como por hipótese $\varphi'(t)$ é integrável em $[\alpha , \beta\,]$, dado um qualquer $\eta > 0$, existe um $\varepsilon' = \varepsilon'(\eta)$ tal que,

$$d = d(D) < \varepsilon' \Rightarrow S_{\varphi'}(D) - s_{\varphi'}(D) < \eta/2K \,.$$

Do mesmo modo, como $f(x)$ é integrável em $[a , b]$, para o referido $\eta > 0$, existe um $\delta = \delta(\eta)$ tal que ,

$$d^* = d(D^*) < \delta \;\Rightarrow |\sigma_f(D^*) - \lambda\,| < \eta/2 \,,$$

em que $\lambda = \int_a^b f(x)\, dx$; a partir deste $\delta > 0$ pode, nos termos da propriedade referida na parte final da alínea **a)** da presente demonstração, determinar-se $\varepsilon'' = \delta/M$ tal que,

$$d = d(D) < \varepsilon'' \;\Rightarrow\; d^* = d(D^*) < \delta \;.$$

Então, tomando $\varepsilon = Mín\, \{\varepsilon', \varepsilon''\}$, tem-se:

$$d = d(D) < \varepsilon \quad\Rightarrow\quad |\sigma_f(D^*) - \lambda\,| < \eta/2 \;\;\wedge\;\; S_{\varphi'}(D) - s_{\varphi'}(D) < \eta/2K \;,$$

ou seja, para $d = d(D) < \varepsilon$, tem-se,

$$\begin{aligned} |\sigma_g(D) - \lambda\,| \;&\le\; |\sigma_g(D) - \sigma_f(D^*)| + |\sigma_f(D^*) - \lambda\,| \le \\ &\le\; K\,.[\, S_{\varphi'}(D) - s_{\varphi'}(D)] \;+ |\sigma_f(D^*) - \lambda\,| \;<\; \eta/2 + \eta/2 = \eta \;, \end{aligned}$$

assim se concluindo que,

$$\lim_{d \to 0} \sigma_g(D) \;= \lambda \;=\; \int_a^b f(x)\, dx \;,$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta g(t)\, dt \;=\; \int_\alpha^\beta f\,[\varphi(t)]\,.\,\varphi'(t)\; dt \;,$$

como queríamos provar.

Nos casos em que $\varphi(t)$ seja estritamente decrescente, tem-se o seguinte:

Corolário : *Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a\,,\,b]$, $\varphi\,(t)$ uma função estritamente decrescente e derivável definida em $[\alpha\,,\,\beta\,]$ e admita-se que $a = \varphi\,(\beta\,)$ e $b = \varphi\,(\alpha\,)$. Nessas condições, sendo $\varphi'(t)$ integrável em $[\alpha\,,\,\beta\,]$, tem-se:*

$$\int_a^b f(x)\;dx \;=\; -\int_\alpha^\beta f\left[\varphi\,(t)\right] . \,\varphi\,'(t)\;\;dt$$

<u>Demonstração</u> : **a)** Note-se em primeiro lugar que,

$$\int_a^b f(x)\;dx \;=\; \int_{-b}^{-a} f(-x)\;dx\,.$$

Com efeito, à decomposição $D = \{\, x_0 = a\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, ...\,,\, x_{n-1}\,,\, x_n = b \,\}$ do intervalo $[a\,,\,b]$ corresponde a seguinte decomposição do intervalo $[-b\,,\,-a]$:

$$D^* = \{\, u_0 = -b\,,\, u_1\,,\, u_2\,,\, ...\,,\, u_{n-1}\,,\, u_n = -\,a \,\}\,,$$

em que $u_i = -\,x_{n-i}$ para os valores $i = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,...\,,\,n\text{-}1\,,\,n$. Ambas as decomposições têm o mesmo diâmetro.

A cada soma $\sigma_f\,(D) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.\,f(y_i)$ de $f\,(x)$ relativa à decomposição D do intervalo $[a\,,\,b]$ corresponde uma soma,

$$\sigma_g\,(D^*) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\,.\,g(w_i)\;\;,\;\;\text{com}\;\;\; u_{i+1} - u_i = -\,x_{n\text{-}i\text{-}1} + x_{n-i}\;\;\;\text{e}\;\;\; w_i = -y_{n\text{-}i\text{-}1}\;,$$

de $g\,(x) = f\,(-x)$ relativa à decomposição D^* do intervalo $[\,-b\,,\,-a]$. E como,

$$\sigma_g\,(D^*) = \sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)\,.\,g(w_i) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (-x_{n-i-1} + x_{n-i})\,.\,f(y_{n-i-1}) \;=$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{n-i} - x_{n-i-1})\,.\,f(y_{n-i-1}) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,.\,f(y_i) = \sigma_f(D)\;\;\;,$$

e $d = d(D) = d^* = d(D^*)$, conclui-se facilmente que ,

$$\lim_{d \to 0} \sigma_f(D) \;=\; \lim_{d^* \to 0} \sigma_g\,(D^*)\;\;,$$

ou seja, $\int_a^b f(x)\;dx \;=\; \int_{-b}^{-a} f(-x)\;dx\,.$

b) A demonstração do corolário é agora imediata . Nas condições do enunciado , $\psi\,(t) = -\,\varphi\,(t)$ é estritamente crescente e o resultado da alínea a) conjugado com o teorema 8, permitem escrever :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right].\left[-\varphi'(t)\right]\,dt =$$

$$= -\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt\ .$$

<u>OBSERVAÇÕES</u> : 1) Os resultados do teorema 8 e seu corolário podem reunir-se numa só fórmula aplicável, quer quando $\varphi(t)$ seja crescente, quer quando seja decrescente. Basta notar que,

$\varphi(t)$ crescente $\Rightarrow \varphi'(t) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(t)| = \varphi'(t)$

$\varphi(t)$ decrescente $\Rightarrow \varphi'(t) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi'(t)| = -\varphi'(t)$,

para se concluir que a fórmula $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right].\left|\varphi'(t)\right|\,dt$ compreende as fórmulas do teorema e do corolário. De notar ainda que , quando $\varphi(t)$ seja crescente , $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$; quando $\varphi(t)$ seja decrescente, $\alpha = \varphi^{-1}(b)$ e $\beta = \varphi^{-1}(a)$.

2) Uma alternativa ao uso do módulo de $\varphi'(t)$ para reunir numa só fórmula os dois casos, consiste em fazer,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt\ ,$$

com $\alpha^* = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta^* = \varphi^{-1}(b)$. De facto, no caso de $\varphi(t)$ ser crescente, $\alpha^* = \varphi^{-1}(a) = \alpha$ e $\beta^* = \varphi^{-1}(b) = \beta$ e, portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt\ ;$$

no caso de $\varphi(t)$ ser decrescente, $\alpha^* = \varphi^{-1}(a) = \beta$ e $\beta^* = \varphi^{-1}(b) = \alpha$ e, portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha^*}^{\beta^*} f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt = \int_\beta^\alpha f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt =$$
$$= -\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right].\varphi'(t)\,dt\ .$$

10. <u>Segundo teorema da média</u>

O teorema seguinte é conhecido por segundo teorema da média:

Teorema 9 : *Seja $\varphi(x) \geq 0$ e decrescente em $\left[a\ ,\ b\right]$. Sendo $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ integráveis em $\left[a\ ,\ b\right]$, então,*

$$\int_a^b \varphi(x).\psi(x)\,dx = \varphi(a).\int_a^c \psi(x)\,dx\ ,$$

com certo $c \in \left[a\ ,\ b\right]$

Demonstração : Sendo $\varphi(a) = 0$, o facto de ser $\varphi(x) \geq 0$ e decrescente em $[a , b]$ implica $\varphi(x) = 0$ em todo o intervalo e, nessas condições, a igualdade do enunciado é evidente. Assumiremos portanto que $\varphi(a) > 0$.

Para uma qualquer decomposição D façamos,

$$a_i = \varphi(x_i) \quad \text{e} \quad b_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)\, dx \qquad (i = 0 , 1 , 2 , \dots , n\text{-}1) .$$

Pelo teorema da média (propriedade P9) os b_i podem ser representados do seguinte modo: $b_i = (x_{i+1} - x_i) . k_i$, com k_i compreendido entre o ínfimo e o supremo de $\psi(x)$ no intervalo $[x_{i+1} , x_i]$. Por ser $\pi(x) = \int_a^x \psi(t)\, dt$ função contínua em $[a , b]$ - por se tratar de integral indefinido - então a função $\pi(x)$ tem nesse intervalo mínimo $\pi(\alpha)$ e máximo $\pi(\beta)$ e claro que ,

$$\pi(\alpha) \leq b_0 = \int_a^{x_1} \psi(x)\, dx \leq \pi(\beta)$$

$$\pi(\alpha) \leq b_0 + b_1 = \int_a^{x_2} \psi(x)\, dx \leq \pi(\beta)$$

$$\dots$$

$$\pi(\alpha) \leq b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1} = \int_a^b \psi(x)\, dx \leq \pi(\beta) .$$

A identidade de Abel,

$$\begin{aligned} a_0 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} = {} & (a_0 - a_1) . b_0 + \\ & + (a_1 - a_2) . (b_0 + b_1) + \\ & + (a_2 - a_3) . (b_0 + b_1 + b_2) + \\ & \dots \\ & + (a_n - 0) . (b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}) \end{aligned}$$

e o facto de ser $a_i \geq a_{i+1}$ (φ é decrescente) , permite então obter,

$$\pi(\alpha) . [\, a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + \dots + a_{n-1} \,] \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \leq$$

$$\leq [\, a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + \dots + a_{n-1} \,] . \pi(\beta) ,$$

ou seja, após simplificação óbvia, $\pi(\alpha) . a_0 \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_i \leq \pi(\beta) . a_0$. Atendendo à definição dos a_i e dos b_i resulta então,

$$\varphi(a)\,.\,\pi(\alpha) \le \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(x_i)\,.\,k_i\,.\,(x_{i+1}-x_i) \le \varphi(a)\,.\pi(\beta)\,.$$

O somatório precedente não é mais que uma soma $\tau(D)$ para o produto $\varphi(x)\,.\,\psi(x)$ relativa à decomposição D e, nos termos das considerações que no ponto 8 precedem o teorema 7, tem-se,

$$\lim_{d\to 0} \tau(D) = \int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx\ .$$

Então necessariamente ,

$$\varphi(a)\,.\,\pi(\alpha) \le \int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx \le \varphi(a)\,.\pi(\beta)\,,$$

donde, por ser $\varphi(a) > 0$

$$\pi(\alpha) \le \frac{\int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx}{\varphi(a)} \le \pi(\beta)\,.$$

Mas $\pi(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$ é função contínua em $[a\,,\,b]$, logo assume todos os valores entre o seu mínimo $\pi(\alpha)$ e o seu máximo $\pi(\beta)$, ou seja, existe um $c \in [a\,,\,b]$ tal que,

$$\pi(c) = \int_a^c \psi(t)\,dt = \frac{\int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx}{\varphi(a)}\ ,$$

donde resulta, $\int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx = \varphi(a)\,.\int_a^c \psi(x)\,dx$, como se queria provar.

Corolário : *Sendo* $\varphi(x)$ *decrescente em* $[a\,,\,b]$ *e* $\varphi(x)$ *e* $\psi(x)$ *integráveis nesse intervalo, então,*

$$\int_a^b \varphi(x)\,.\,\psi(x)\,dx = \varphi(a)\,.\int_a^c \psi(x)\,dx + \varphi(b)\,.\int_c^b \psi(x)\,dx\ ,$$

com certo $c \in [a\,,b]$ (Weierstrass)
Demonstração : As funções $\varphi^*(x) = \varphi(x) - \varphi(b)$ e $\psi(x)$ encontram-se nas condições do enunciado do teorema 9. Da aplicação do teorema a estas funções resulta, após simplificações óbvias, a igualdade do enunciado deste corolário.

11. Integrais impróprios de primeira espécie

Toda a teoria anteriormente desenvolvida tem como hipótese fundamental que o intervalo de integração é limitado e que a função integranda é igualmente limitada no intervalo de integração.

Porém, em diversas aplicações, convém dispor de um conceito de integral que seja aplicável a situações em que uma ou ambas daquelas hipóteses sejam violadas. Uma primeira situação que interessa considerar é aquela em que o intervalo de integração não é limitado, sendo contudo a função integranda limitada em qualquer subintervalo limitado do intervalo de integração.

Suponha-se primeiro o caso de o intervalo de integração ser $I = [a\ , +\infty[$, com a função integranda $f(x)$ limitada e integrável em qualquer $[a\ , h]$. Neste caso, define-se,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{h \to +\infty} \int_a^h f(x)\ dx \ ,$$

caso seja finito o limite do segundo membro; caso tal limite seja infinito ou não exista, diz-se que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ não existe ou é *divergente* (quando o integral existe, diz-se que é *convergente*) .

Outro caso possível surge quando o intervalo de integração é $I =]\ \text{-}\infty\ , b]$, com a função integranda $f(x)$ limitada e integrável em qualquer $[k\ , b]$. Neste caso, define-se,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{k \to -\infty} \int_k^b f(x)\ dx \ ,$$

caso seja finito o limite do segundo membro; caso tal limite seja infinito ou não exista, diz-se que o integral $\int_{-\infty}^b f(x)\ dx$ não existe ou é *divergente* (quando o integral existe, diz-se que é *convergente*) . Convém referir que este caso se pode reduzir ao caso anterior, por mudança de variável:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\ dx = \lim_{k \to -\infty} \int_k^b f(x)\ dx = \lim_{k \to -\infty} \int_{-b}^{-k} f(-x)\ dx = \lim_{h \to +\infty} \int_{-b}^h f(-x)\ dx =$$

$$= \int_{-b}^{+\infty} f(-x)\ dx \ .$$

Finalmente, pode admitir-se o caso de o intervalo de integração ser $]-\infty, +\infty[$ com a função integranda $f(x)$ limitada e integrável em qualquer intervalo $[k, h]$. Neste caso, o integral, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ define-se do seguinte modo: escolhe-se arbitrariamente um ponto $c \in]-\infty, +\infty[$ e faz-se por definição,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \ ,$$

caso existam ambos os integrais do segundo membro; se pelo menos um deles for divergente , diz-se que o integral do primeiro membro não existe ou é *divergente*.

Convém observar que a possibilidade de escolha arbitrária do ponto c não implica qualquer ambiguidade na definição anterior . Com efeito , se em vez de c for considerado $c' \neq c$, tem-se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{k\to-\infty} \int_{k}^{c'} f(x)\,dx + \lim_{h\to+\infty} \int_{c'}^{h} f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{k\to-\infty} \left[\int_{k}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{c'} f(x)\,dx\right] + \lim_{h\to+\infty} \left[\int_{c}^{h} f(x)\,dx + \int_{c'}^{c} f(x)\,dx\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{c}^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^{c} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx + \int_{c}^{c} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \ .$$

Vamos centrar o nosso estudo no caso $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, com $f(x)$ limitada e integrável em qualquer $[a\ ,\ h]$, dado que como vimos os dois outros casos de integrais com limites infinitos se podem reduzir ao primeiro.

O teorema seguinte contém um resultado importante que permitirá deduzir um critério de convergência de aplicação prática frequente.

Teorema 10 : *Sendo* $g(x) \geq f(x) \geq 0$ *em* $[a, +\infty[$ *tem-se:*

a) *A convergência de* $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$ *implica a convergência de* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *;*

b) *A divergência de* $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ *implica a divergência de* $\int_{a}^{+\infty} g(x)\,dx$

<u>Demonstração</u> : Para $h \geq a$ considerem-se as funções,

$$\varphi(h) = \int_a^h f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \psi(h) = \int_a^h g(x)\, dx \ ,$$

as quais são crescentes em $[a\ , +\infty[$ por serem $f(x)$ e $g(x)$ não negativas . Então, como se sabe da teoria das funções,

$$\lim_{h \to +\infty} \varphi(h) \quad \text{e} \quad \lim_{h \to +\infty} \psi(h)\ ,$$

existem sempre , podendo ser finitos ou $+\infty$. Por outro lado, de $f(x) \leq g(x)$ resulta, $\varphi(h) \leq \psi(h)$ e, portanto, $\lim\limits_{h \to +\infty} \varphi(h) \leq \lim\limits_{h \to +\infty} \psi(h)$. Então,

a) Se o integral $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ for convergente, $\lim\limits_{h \to +\infty} \psi(h)$ é finito e assim é também finito $\lim\limits_{h \to +\infty} \varphi(h)$, ou seja, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente ;

b) Caso o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ seja divergente, tem-se $\lim\limits_{h \to +\infty} \varphi(h) = +\infty$ e portanto também $\lim\limits_{h \to +\infty} \psi(h) = +\infty$, ou seja, $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente.

Do teorema precedente obtêm-se os seguintes corolários:

Corolário 1 : *Sendo* $g(x) \geq f(x) \geq 0$ *em* $[c\ , +\infty[$ *tem-se:*

a) *A convergência de* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *implica a convergência de* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *;*

b) *A divergência de* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *implica a divergência de* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do teorema anterior notando que a convergência de $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ equivale à de $\int_c^{+\infty} g(x)\, dx$, por ser,

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^h g(x)\, dx = \lim_{h \to +\infty} \left[\int_a^c g(x)\, dx + \int_c^h g(x)\, dx \right] =$$

$$= \int_a^c g(x)\, dx + \lim_{h \to +\infty} \int_c^h g(x)\, dx \ ,$$

e notando também, por um argumento semelhante, que a convergência de $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ equivale à de $\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$.

Corolário 2 : *A convergência de* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ *implica a convergência de* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$

Demonstração : Definindo $g(x) = f(x) + |\ f(x)\ |$, conclui-se que,

$$0 \ \leq \ g(x) \leq \ 2 \ . \ |f(x)| \ ,$$

por ser $f(x) \leq \ | \ f(x) \ |$. Da convergência de $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ deduz-se facilmente a conver-gência de $\int_a^{+\infty} 2 \ . \ |f(x)|\, dx$, dado que,

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^h 2 \ . \ |f(x)|\, dx \ = \ 2 \ . \ \lim_{h \to +\infty} \int_a^h |f(x)|\, dx \ .$$

Pelo teorema anterior , deduz-se então a convergência de $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$. Mas como $f(x) = g(x) - |f(x)|$, resulta,

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^h f(x)\, dx \ = \ \lim_{h \to +\infty} \left[\int_a^h g(x)\, dx \ - \ \int_a^h |f(x)|\, dx \right] =$$

$$= \ \lim_{h \to +\infty} \int_a^h g(x)\, dx \ - \ \lim_{h \to +\infty} \int_a^h |f(x)|\, dx =$$

$$= \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \ - \ \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \ < +\infty \, ,$$

assim se deduzindo a convergência de $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Como complemento ao corolário 2 deve observar-se que, no entanto, da divergência do integral $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ não decorre obrigatoriamente a divergência de $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$; por outras palavras, o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ pode ser convergente sem que o seja $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$. Assim, por exemplo, não pode ser finito,

$$\int_0^{+\infty} |(sen\ x)/x|\, dx \ = \ \lim_{h \to +\infty} \int_0^h |(sen\ x)/x\,|\, dx \ \ ,$$

porque tomando $h_n = 2\, n\pi \ (n = 1 \, , 2 \, , 3 \, , \ldots)$, tem-se,

$$\int_0^{2n\pi} |(sen\ x)/x|\, dx \ = \ \sum_{j=1}^{n} \int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi} |(sen\ x)/x|\, dx \ \geq$$

$$\geq \ \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\, j\, \pi} \cdot \int_{2(j-1)\pi}^{2j\pi} |sen\ x\,|\, dx \ =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |sen\ x|\ dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j\pi} \cdot \int_0^{2\pi} |sen\ x|\ dx = \sum_{j=1}^{n} \frac{4}{2j\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \ ;$$

e como,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = +\infty \quad \text{(por ser divergente a série } \sum_{n=1}^{\infty} 1/n\ ) \ ,$$

resulta que também $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2n\pi} |(sen\ x)/x|\ dx = +\infty$. Ver-se-á adiante que o integral $\int_0^{+\infty} (sen\ x)/x\ \ dx$ é convergente.

Estas considerações justificam a definição seguinte: o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ diz-se *absolutamente convergente* quando for convergente conjuntamente com o integral $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$; diz-se *simplesmente convergente* quando a sua convergência coexistir com a divergência de $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

A propósito da convergência absoluta tem-se o seguinte,

Teorema 11 : *Se $f(x)$ tem sinal fixo em certo intervalo $[c\ , +\infty[$ (com $c \geq a$), então o $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ não pode ser simplesmente convergente : ou é absolutamente convergente ou divergente*

Demonstração : Se $f(x) \geq 0$ em $[c\ , +\infty[$ (com $c \geq a$) , tem-se para $h \geq c$,

$$\int_a^h f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^h f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^h |f(x)|\ dx =$$

$$= \int_a^c \left[f(x) - |f(x)| \right] dx + \int_a^h |f(x)|\ dx \ ,$$

assim se concluindo que,

$$\lim_{h \to +\infty} \int_a^h f(x)\ dx \ \text{ finito} \Leftrightarrow \lim_{h \to +\infty} \int_a^h |f(x)|\ dx \ \text{ finito} \ ,$$

e portanto $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ não pode ser simplesmente convergente.

Caso seja $f(x) \leq 0$ em $[c\,,+\infty[$ (com $c \geq a$), tem-se para $h \geq c$,

$$\int_a^h f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^h f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^h |f(x)|\,dx =$$

$$= \int_a^c \left[f(x) + |f(x)|\right] dx - \int_a^h |f(x)|\,dx\ ,$$

assim se concluindo que,

$$\lim_{h\to+\infty} \int_a^h f(x)\,dx \ \text{ finito } \Leftrightarrow \lim_{h\to+\infty} \int_a^h |f(x)|\,dx \ \text{ finito}\ ,$$

e portanto $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ não pode ser simplesmente convergente.

Vamos seguidamente estudar alguns critérios de convergência absoluta.

Teorema 12 : *Sendo $f(x)$ limitada e integrável em $[a\,,h]$, para todo o $h \geq a$, e sendo $g(x)$ não negativa, limitada e integrável em $[b\,,h]$ ($b \geq a$), para todo o $h \geq b$, se existir $k = \lim_{x\to+\infty} |f(x)|\,/\,g(x)$, tem-se:*

a) *Se $k = +\infty$, a divergência de $\int_b^{+\infty} g(x)\,dx$ implica a divergência de $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, ou seja, implica que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ não pode ser absolutamente convergente;*

b) *Se $k = 0$, a convergência de $\int_b^{+\infty} g(x)\,dx$ implica a convergência absoluta de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$;*

c) *Se $k \neq 0\,,+\infty$, então:*

c.1) *A divergência de $\int_b^{+\infty} g(x)\,dx$ implica a divergência de $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, ou seja, implica que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ não pode ser absolutamente convergente;*

c.2) *A convergência de $\int_b^{+\infty} g(x)\,dx$ implica a convergência absoluta de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$*

<u>Demonstração</u> : **a)** Se $k = +\infty$, existe um $c > b \geq a$ tal que $|f(x)| > g(x)$ para $x \geq c$. Ora, com $h \geq c$,

$$\int_a^h |f(x)|\,dx = \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^h |f(x)|\,dx \geq$$

$$\geq \int_b^c g(x)\,dx + \int_c^h g(x)\,dx =$$

$$= \int_a^c |f(x)|\, dx + \int_b^h g(x)\, dx - \int_b^c g(x)\, dx \ ,$$

e então,

$$\int_b^{+\infty} g(x)\, dx \text{ divergente } \Rightarrow \lim_{h \to +\infty} \int_b^h g(x)\, dx = +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to +\infty} \int_a^h |f(x)|\, dx = +\infty \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \text{ divergente .}$$

b) Se $k = 0$, existe um $c > b \geq a$ tal que $|\, f(x)\, | < g(x)$ para $x \geq c$. Ora, com $h \geq c$,

$$\int_a^h |f(x)|\, dx = \int_a^c |f(x)|\, dx + \int_c^h |f(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^c |f(x)|\, dx + \int_c^h g(x)\, dx =$$

$$= \int_a^c |f(x)|\, dx + \int_b^h g(x)\, dx - \int_b^c g(x)\, dx \ ,$$

e então,

$$\int_b^{+\infty} g(x)\, dx \text{ convergente } \Rightarrow \lim_{h \to +\infty} \int_b^h g(x)\, dx \text{ finito } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to +\infty} \int_a^h |f(x)|\, dx \text{ finito} \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx \text{ convergente} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ absolutamente convergente .}$$

c) Se $0 < k < +\infty$, existe um $c > b \geq a$ tal que,

$$(k - k/2) \,.\, g(x) < |\, f(x)\, | < (k + k/2) \,.\, g(x) \ ,$$

e raciocinando como em a) a partir de $(k - k/2) \,.\, g(x) < |\, f(x)|$ obtém-se c.1) ; raciocinando como em b) a partir de $|\, f(x)\, | < (k + k/2) \,.\, g(x)$ obtém-se c.2).

O teorema que acaba de ser provado admite o seguinte corolário de frequente utilização prática:

Corolário : *Sendo* $f(x)$ *limitada e integrável em* $[a\,,\,h]$ *, para todo o* $h \geq a$ *, se existir* $k = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \,.\, |\, f(x)\, |$ *, tem-se:*

a) *Se* k *for finito e* $\alpha > 1$*, o integral* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é absolutamente convergente ;*

b) *Se* $k \neq 0$ *e* $\alpha \leq 1$*, o integral* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *não é absolutamente convergente*

Demonstração : É fácil concluir que, com $b > 0$ o integral $\int_b^{+\infty} 1/x^\alpha\,dx$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$. Aplicando o teorema anterior com $g(x) = 1/x^\alpha$ e representando por k o limite,

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(x)|}{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \,.\, |f(x)| \ ,$$

a conclusão a) do enunciado do corolário resulta de b) e de c.2) do teorema 12; a conclusão b) do enunciado do corolário resulta de a) e de c.1) do teorema.

No teorema seguinte relaciona-se a convergência absoluta do integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e da série $\sum_{n=1}^{\infty} f(a+n-1)$, no caso em que $|f(x)|$ seja decrescente no intervalo $[a\,,+\infty[$.

Teorema 13 : *Sendo* $f(x)$ *limitada e integrável em* $[a\,,h]$ *, para todo o* $h \geq a$ *e supondo que* $|f(x)|$ *é decrescente no intervalo* $[a\,,+\infty[$ *, então o integral e a série seguintes,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(a+n-1) \ ,$$

são conjuntamente absolutamente ou não absolutamente convergentes

Demonstração : Por ser $|f(x)|$ decrescente em $[a+i-1\,,a+i]$ com $i = 1, 2, \ldots,$ tem--se,

$$|f(a+i)| \leq \int_{a+i-1}^{a+i} |f(x)|\,dx \leq |f(a+i-1)| \,.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(a+i)| \leq \int_a^{a+n} |f(x)|\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} |f(a+i-1)| \,.$$

Admitindo que a série do enunciado é absolutamente convergente, tem-se,

$$\lim \sum_{i=1}^{n} |f(a+i-1)| \text{ finito } \Rightarrow \lim \int_a^{a+n} |f(x)|\,dx \text{ finito} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to+\infty} \int_a^{h} |f(x)|\,dx \text{ não pode ser infinito} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to+\infty} \int_a^h |f(x)|\,dx \text{ finito} \Rightarrow \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ convergente } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ absolutamente convergente .}$$

Inversamente, se o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é absolutamente convergente , tem-se , $lim \int_a^{a+n} |f(x)|\,dx < +\infty$, donde resulta,

$$lim \sum_{i=1}^{n} |f(a+i-1)| = lim \left[\sum_{i=1}^{n} |f(a+i)| - |f(a+n)| + |f(a)| \right] \leq$$

$$\leq |f(a)| + lim \sum_{i=1}^{n} |f(a+i)| \leq$$

$$\leq |f(a)| + lim \int_a^{a+n} |f(x)|\,dx < +\infty ,$$

assim se concluindo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |f(a+n-1)|$ é convergente , ou seja, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(a+n-1)$ é absolutamente convergente.

Vejamos um exemplo de aplicação do teorema precedente . Considere-se a função $f(x) = 1/x^{\alpha}$, com $\alpha \geq 0$. Trata-se de uma função decrescente no intervalo $[1 , +\infty [$. Dado tratar-se de uma função não negativa, a convergência da série e do integral seguintes,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n-1)^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} 1/x^{\alpha}\,dx ,$$

equivale à respectiva convergência absoluta . Dado que $\int_1^{+\infty} 1/x^{\alpha}\,dx$ converge para $\alpha > 1$ e diverge para $0 \leq \alpha \leq 1$, o mesmo acontece com a série, assim se obtendo por outra via um resultado já conhecido.

Estudam-se seguidamente dois critérios de convergência (não necessariamente absoluta), os quais são muitas vezes úteis para estabelecer a convergência simples dos integrais que se saiba não serem absolutamente convergentes.

Teorema 14 : *Sendo $f(x)$ limitada e integrável em $[a , h]$, para todo o $h \geq a$, e sendo $\alpha(x)$ uma função monótona e limitada em $[a , +\infty [$, se existir finito*

$\lim_{h \to +\infty} \int_a^h f(x)\, dx$, *então também é finito* $\lim_{h \to +\infty} \int_a^h \alpha(x) . f(x)\, dx$, *ou seja, converge o integral* $\int_a^{+\infty} \alpha(x) . f(x)\, dx$ (Critério de Abel)

<u>Demonstração</u> : **a)** Considera-se primeiro o caso em que $\alpha(x)$ é monótona decrescente.

Sendo $\varphi(h) = \int_a^h f(x)\, dx$, a condição necessária e suficiente para que $\lim_{h \to +\infty} \varphi(h)$ seja finito é que, qualquer que seja $\delta > 0$, exista um $\varepsilon > 0$ tal que,

$$h'' \geq h' > 1/\varepsilon > a \Rightarrow |\varphi(h'') - \varphi(h')| < \delta ,$$

sendo esta a conhecida condição de Cauchy para a existência de limite finito.

Como $f(x)$ é integrável em qualquer intervalo $[h', h'']$ $(a < h' \leq h'')$ e $\alpha(x)$ é decrescen-te nesse intervalo, o corolário do teorema 9 permite concluir que existe um $c \in [h', h'']$ tal que,

$$\int_{h'}^{h''} \alpha(x) . f(x)\, dx = \alpha(h') . \int_{h'}^{c} f(x)\, dx + \alpha(h'') . \int_{c}^{h''} f(x)\, dx .$$

Como, por outro lado, $\alpha(x)$ é limitada em $[a, +\infty[$, existe um $m > 0$ tal que $|\alpha(x)| \leq m$ para $x \geq a$, logo,

$$\left|\int_{h'}^{h''} \alpha(x) . f(x)\, dx\right| \leq m . \left[\,\left|\int_{h'}^{c} f(x)\, dx\right| + \left|\int_{c}^{h''} f(x)\, dx\right|\,\right] .$$

Designando por $\psi(h) = \int_a^h \alpha(x) . f(x)\, dx$, tem-se portanto,

$$|\psi(h') - \psi(h'')| = \left|\int_{h'}^{h''} \alpha(x) . f(x)\, dx\right| \leq m . \left[\,\left|\int_{h'}^{c} f(x)\, dx\right| + \left|\int_{c}^{h''} f(x)\, dx\right|\,\right] .$$

Dado um qualquer $\delta > 0$, procure-se $\varepsilon > 0$ tal que ,

$$h \geq k > 1/\varepsilon > a \Rightarrow |\varphi(h) - \varphi(k)| < \delta/2m \ ;$$

então, com $h'' \geq h' > 1/\varepsilon > a$ existe como vimos $c \in [h', h'']$ tal que,

$$|\psi(h') - \psi(h'')| = \left|\int_{h'}^{h''} \alpha(x) . f(x)\, dx\right| \leq m . \left[\,\left|\int_{h'}^{c} f(x)\, dx\right| + \left|\int_{c}^{h''} f(x)\, dx\right|\,\right] ,$$

ou seja,

$$|\psi(h') - \psi(h'')| \leq m . \left[\,|\varphi(c) - \varphi(h')| + |\varphi(h'') - \varphi(c)|\,\right] <$$

$$< m . \left[\delta/2m + \delta/2m\right] = \delta ,$$

que é a condição de Cauchy para ser finito,

$$\lim_{h \to +\infty} \psi(h) = \lim_{h \to +\infty} \int_a^h \alpha(x) \cdot f(x)\, dx \ ,$$

ou seja, para ser convergente o integral $\int_a^{+\infty} \alpha(x) \cdot f(x)\ dx$.

b) Caso a função $\alpha(x)$ seja crescente, $-\alpha(x)$ é decrescente e o demonstrado em a) permite concluir que é convergente o integral $\int_a^{+\infty} \left[-\alpha(x)\right] \cdot f(x)\ dx$ donde se tira facilmente a convergência de $\int_a^{+\infty} \alpha(x) \cdot f(x)\ dx$.

Teorema 15 : *Sendo $f(x)$ limitada e integrável em $[a\,,h]$, para todo o $h \geq a$, e sendo $\alpha(x)$ função monótona e limitada em $[a\,,+\infty[$, se $\varphi(h) = \int_a^h f(x)\ dx$ for função limitada de h em $[a\,,+\infty[$ e se $\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, então converge o integral $\int_a^{+\infty} \alpha(x) \cdot f(x)\ dx$* (Critério de Dirichlet)

<u>Demonstração</u> : Basta fazer a demonstração para o caso em que $\alpha(x)$ é monótona decrescente, porque o caso em que é crescente se reduz àquele utilizando a função $-\alpha(x)$ tal como se fez na demonstração do teorema anterior.

Tal como na demonstração do teorema anterior chega-se a,

$$\int_{h'}^{h''} \alpha(x) \cdot f(x)\, dx = \alpha(h') \cdot \int_{h'}^{c} f(x)\, dx + \alpha(h'') \cdot \int_{c}^{h''} f(x)\, dx \ .$$

com $a < h' \leq h''$ e certo $c \in [\, h', h'' \,]$. Designando,

$$\psi(h) = \int_a^h \alpha(x) \cdot f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \varphi(h) = \int_a^h f(x)\ dx \ ,$$

a igualdade anterior escreve-se,

$$\psi(h') - \psi(h'') = \alpha(h') \cdot [\, \varphi(c) - \varphi(h') \,] + \alpha(h'') \cdot [\, \varphi(h'') - \varphi(c) \,] \ .$$

Como por hipótese $\varphi(h) = \int_a^h f(x)\ dx$ é limitada em $[a\,,+\infty[$, existe um $m > 0$ tal que,

$$|\varphi(c) - \varphi(h')| < m \quad \text{e} \quad |\varphi(h'') - \varphi(c)| < m \ ,$$

donde resulta,

$$|\psi(h') - \psi(h'')| \leq m \, . \, |\alpha(h')| + m \, . \, |\alpha(h'')| \; .$$

Atendendo agora a que $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$, tem-se, qualquer que seja $\delta > 0$,

$$x > 1/\varepsilon > a \Rightarrow |\alpha(x)| < \delta/2m \, ,$$

com certo $\varepsilon > 0$ (dependente de δ). Tem-se então,

$$h'' \geq h' > 1/\varepsilon \Rightarrow |\psi(h') - \psi(h'')| < m \, . \, [\delta/2m + \delta/2m\,] = \delta \; ,$$

que é a condição de Cauchy para ser finito $\lim\limits_{h \to +\infty} \int_a^h \alpha(x) \, . \, f(x) \; dx$. Fica assim provada a convergência do integral $\int_a^{+\infty} \alpha(x) \, . \, f(x) \; dx$.

Como aplicação do critério do teorema precedente, vamos mostrar que á convergente o integral $\int_1^{+\infty} (sen\ x)/x \; dx$: basta notar que $\alpha(x) = 1/x$ é uma função decrescente no intervalo $[1\,, +\infty[$, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ e que,

$$\varphi(h) = \int_a^h sen\ x \; dx = -\cos h + \cos a \; ,$$

é uma função limitada de h no intervalo $[1\,, +\infty[$. Deste resultado decorre a convergência (simples) de,

$$\int_0^{+\infty} (sen\ x)/x \; dx = \int_0^1 (sen\ x)/x \; dx + \int_1^{+\infty} (sen\ x)/x \; dx \; ,$$

já antes anunciada, nas considerações que precedem os conceitos de convergência absoluta e convergência simples, tendo-se então concluído que o integral $\int_0^{+\infty} (sen\ x)/x \; dx$ não é absolutamente convergente.

Termina-se este ponto relativo aos integrais impróprios de primeira espécie, resolvendo alguns exercícios de aplicação.

1) Vejamos como primeiro exercício o cálculo de $\int_0^{+\infty} e^{-x} \; dx$. Tem-se,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \; dx = \lim_{h \to +\infty} \int_0^h e^{-x} \; dx = \lim_{h \to +\infty} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=h} = \lim_{h \to +\infty} \left[-e^{-h} + 1 \right] = 0 \, .$$

2) Calcule-se seguidamente $\int_1^{+\infty} 1/x^{\alpha} \; dx$. Para $\alpha \neq 1$, tem-se,

$$\int_1^{+\infty} 1/x^\alpha \; dx = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h 1/x^\alpha \; dx = \lim_{h\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=1}^{x=h} =$$

$$= \lim_{h\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{h^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \right] ,$$

sendo este limite igual a $1/(\alpha-1)$ quando seja $\alpha > 1$ e $+\infty$ quando seja $\alpha < 1$; para $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} 1/x \; dx = \lim_{h\to+\infty} \int_1^h 1/x \; dx = \lim_{h\to+\infty} \left[\log x \right]_{x=1}^{x=h} = \lim_{h\to+\infty} \left[\log h - 0 \right] = +\infty \; .$$

Em conclusão: o integral é convergente (absolutamente) para $\alpha > 1$ sendo o respectivo valor $1/(\alpha-1)$; e é divergente para $\alpha \le 1$.

3) Estudemos agora natureza do integral $\int_2^{+\infty} x^k \,.\, (1+x)^{1+k} \; dx$. Trata-se de um integral impróprio de primeira espécie : intervalo de integração com limite superior infinito e função integranda integrável em qualquer intervalo fechado $[2 \, , \, h]$. Como a função integranda tem sinal fixo no intervalo de integração (é não negativa), o estudo da convergência absoluta equivale ao estudo da convergência (o integral não pode ser simplesmente convergente !). Aplicando o corolário do teorema 12, tem-se :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \,.\, | x^k \,.\, (1+x)^{1+k} | = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+k} \,.\, (1+x)^{1+k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^{1+k}}{x^{-\alpha-k}} \; ,$$

sendo este limite igual à unidade quando seja $-\alpha - k = 1 + k$, o que equivale a ser $\alpha = -2\,k - 1$. O integral é então absolutamente convergente quando seja $\alpha = -2\,k - 1 > 1$, isto é, $k < -1$; e será divergente (porque não é absolutamente convergente e a função integranda tem sinal fixo no intervalo de integração) quando seja $\alpha = -2\,k - 1 \le 1$, isto é, $k \ge -1$.

3) Finalmente, vamos estudar a natureza do integral $\int_1^{+\infty} x^\beta \,.\, sen\, x \; dx$. Aplicando o corolário do teorema 12, tem-se,

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \,.\, | x^\beta \,.\, sen\, x | = \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha+\beta} \,.\, | sen\, x | \, ,$$

e o limite é nulo quando seja $\alpha + \beta < 0$. Ora para qualquer valor $\beta < -1$, existe $\alpha > 1$ tal que $\alpha + \beta < 0$ (basta tomar α tal que $1 < \alpha < -\beta$) ; portanto, nos termos da alínea a) do enunciado do corolário acima referido, pode concluir-se que o integral em estudo é absolutamente convergente quando seja $\beta < -1$.

Quanto ao que sucede quando seja $\beta \geq -1$, o referido corolário nada nos permite adiantar, como o leitor facilmente constatará. Mas o teorema 10 permite com facilidade concluir que o integral em causa não é absolutamente convergente. Com efeito,

$$| x^{\beta} . \, sen\, x | = | x^{\beta+1} | . \left| \frac{sen\; x}{x} \right| \geq \left| \frac{sen\; x}{x} \right| ,$$

porque, $x \geq 1 \wedge \beta + 1 \geq 0 \Rightarrow | x^{\beta+1} | \geq 1$. Como o integral $\int_1^{+\infty} |(sen\; x)/x| \; dx$ diverge (ver exemplo apresentado nas considerações que precedem os conceitos de convergência absoluta e simples), o teorema 10 permite concluir que também diverge o integral $\int_1^{+\infty} |x^{\beta} . \; sen\; x| \; dx$, ou seja, para $\beta \geq -1$ o integral $\int_1^{+\infty} x^{\beta} . \; sen\; x \; dx$ não é absolutamente convergente.

Teremos então que estudar a eventual convergência simples do integral para o caso em que seja $\beta \geq -1$.

Para $-1 \leq \beta < 0$, o critério de Dirichlet permite concluir que há convergência simples: com $0 < -\beta \leq 1$ a função $\alpha(x) = x^{\beta} = 1/x^{-\beta}$ é limitada e decrescente no intervalo $[1 , +\infty[$ sendo, além disso, $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$; por outro lado,

$$\varphi\,(h) = \int_1^h \; sen\; x \;\; dx = - \cos h + \cos 1 \,,$$

é uma função limitada de h no intervalo $[1 , +\infty[$; então, segundo o critério de Dirichlet, $\int_1^{+\infty} x^{\beta} . \; sen\; x \;\; dx$ é convergente (simplesmente).

Para $\beta = 0$ o integral reduz-se a $\int_1^{+\infty} sen\; x \;\; dx$ que facilmente se vê ser divergente.

Para $\beta > 0$ o estudo do integral pode fazer-se recorrendo à condição de Cauchy. A função,

$$\varphi\,(h) = \int_1^h \; x^{\beta} . \; sen\; x \;\; dx \quad (\beta > 0) \,,$$

terá limite finito quando h tender para mais infinito se e só se, qualquer que seja $\delta > 0$, existir $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ tal que,

$$h'' > h' > 1/\varepsilon > 1 \Rightarrow |\varphi(h'') - \varphi(h')| = | \int_{h'}^{h''} x^{\beta} . \; sen\; x \;\; dx \; | < \delta .$$

Ora, pelo teorema da média,

$$\left| \int_{h'}^{h''} x^{\beta} \,.\, sen\ x\ dx \right| = \left|(h'' - h') .\ x_*^{\beta} \,.\, sen\ x_*\right| \ ,$$

e considerando por exemplo $h' = 2n\pi + \pi/4$ e $h'' = 2n\pi + \pi/2$, para $n = 1 , 2 , 3 , \ldots$, tem-se, com certo $x_* \in [\, 2\, n\pi + \pi/4 \ , 2\, n\pi + \pi/2]$,

$$\left| \int_{h'}^{h''} x^{\beta} \,.\, sen\ x\ dx \right| = (\pi/4) .\ x_*^{\beta} \,.\, sen\ x_* \geq (\pi/4) .\ (\pi/4)^{\beta} .\ \sqrt{2}\,/\,2 \ ,$$

desigualdade que mostra não ser verificada a condição de Cauchy para valores $\delta \leq (\pi/4) .\ (\pi/4)^{\beta} .\ \sqrt{2}\,/\,2$: porque, para qualquer destes valores de δ, por menor que seja $\varepsilon > 0$, há sempre valores,

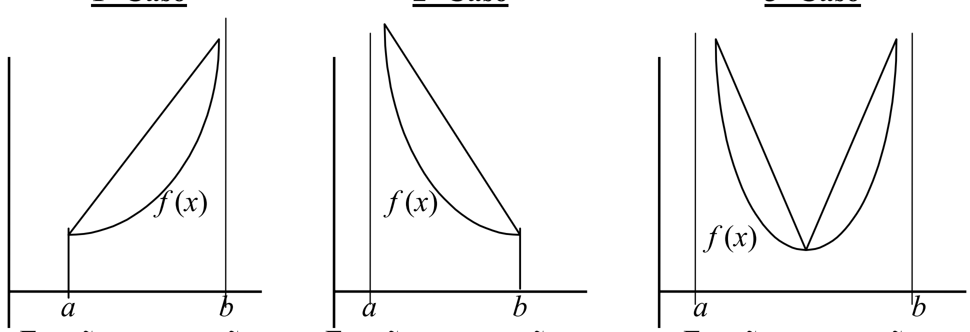
$$h'' = 2n\pi + \pi/2 > h' = 2n\pi + \pi/4 > 1/\varepsilon > 1 \ ,$$

para os quais $\left| \int_{h'}^{h''} x^{\beta} \,.\, sen\ x\ dx \right| \geq \delta$, bastando para tal tomar n suficientemente grande.

12. <u>Integrais impróprios de segunda espécie</u>

Estuda-se agora o caso em que a função integranda $f(x)$ não é limitada no intervalo de integração $[a\ , b]$ (agora suposto limitado), embora seja limitada e integrável em qualquer $[h\ , k]$, com $a < h \leq k < b$. Nesta hipótese podem considerar-se três situações que se ilustram graficamente nas figuras seguintes:

<u>1º Caso</u> **<u>2º Caso</u>** **<u>3º Caso</u>**



Função apenas não limitada junto de <u>b</u> — *Função apenas não limitada junto de <u>a</u>* — *Função apenas não limitada junto de <u>a</u> e de <u>b</u>*

Embora tratando-se de situações distintas das que foram estudadas no ponto 11., a teoria desenvolve-se quase em paralelo, havendo apenas que fazer algumas adaptações.

Assim define-se:

<u>1º Caso</u> : $\int_a^b f(x)\, dx = \lim\limits_{h \to b-0} \int_a^h f(x)\, dx$, se for finito o limite; se tal limite for infinito ou não existir, o integral diz-se *divergente* .

2º Caso : $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a+0} \int_k^b f(x)\,dx$, se for finito o limite ; se tal limite for infinito ou não existir, o integral diz-se *divergente* .

3º Caso : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, com c arbitrariamente escolhido no intervalo $]a\,,\,b[$, se existirem ambos os integrais do segundo membro; se um deles ou ambos forem divergentes, o integral do primeiro membro *não existe* ou é *divergente*.

Tal como para os integrais impróprios de primeira espécie, também agora o ponto c considerado na definição do 3º caso pode, sem qualquer ambiguidade, ser escolhido de forma arbitrária no interior do intervalo de integração.

Por outro lado, também agora o 2º caso se pode reduzir ao primeiro por mudança de variável:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a+0} \int_k^b f(x)\,dx = \lim_{k \to a+0} \int_{-b}^{-k} f(-x)\,dx = \lim_{h \to -a-0} \int_{-b}^{h} f(-x)\,dx =$$
$$= \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx \;.$$

A observação precedente permite limitar o nosso estudo ao 1º caso, ou seja, trataremos explicitamente apenas o caso do integral $\int_a^b f(x)\,dx$ com a função integranda ilimitada apenas junto de b . Um primeiro resultado é o seguinte :

Teorema 16 : *Sendo* $g(x) \geq f(x) \geq 0$ *em* $[a\,,\,b[$ *tem-se:*
a) *A convergência de* $\int_a^b g(x)\,dx$ *implica a convergência de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *;*
b) *A divergência de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *implica a divergência de* $\int_a^b g(x)\,dx$

Demonstração : Tal qual a do teorema 10, substituindo apenas $+\infty$ por b.

Do teorema precedente obtêm-se os seguintes corolários, cujas demonstrações são tal qual as dos correspondentes corolários do teorema 10 :

Corolário 1 : *Sendo* $g(x) \geq f(x) \geq 0$ *em* $[c\,,\,b[$ *tem-se:*
a) *A convergência de* $\int_a^b g(x)\,dx$ *implica a convergência de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *;*
b) *A divergência de* $\int_a^b f(x)\,dx$ *implica a divergência de* $\int_a^b g(x)\,dx$

Corolário 2 : *A convergência de* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *implica a convergência de* $\int_a^b f(x)\,dx$

Também agora, como complemento ao corolário 2 deve observar-se que da divergência do integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$ não decorre obrigatoriamente a divergência de $\int_a^b f(x)\,dx$;

por outras palavras, o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser convergente sem que o seja $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Esta observação permite classificar os integrais convergentes em absolutamente convergentes ou simplesmente convergentes . Diz-se que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ é *absolutamente convergente* se e só se for convergente conjuntamente com $\int_a^b |f(x)|\,dx$; diz-se que é *simplesmente convergente* se a convergência coexistir com a divergência de $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Tem-se agora um teorema semelhante ao teorema 11 :

Teorema 17 : *Se $f(x)$ tem sinal fixo em certo intervalo $[c\,,\,b[$ (com $c \geq a$), então o $\int_a^b f(x)\,dx$ não pode ser simplesmente convergente : ou é absolutamente convergente ou divergente*

Continuando o estudo em paralelo com o que foi feito no ponto 11., estabelecem-se seguidamente critérios de convergência absoluta, sendo as demonstrações dos teoremas em tudo análogas às dos correspondentes teoremas então demonstrados.

Assim, em paralelo como teorema 12 e com idêntica demonstração, tem-se o seguinte:

Teorema 18 : *Sendo $f(x)$ limitada e integrável em $[a\,,\,h]$, para todo o $h \in [\,a\,,\,b[$, e sendo $g(x)$ não negativa, limitada e integrável em $[c\,,\,h]$ $(a \leq c < b)$, para todo o $h \in [c\,,\,b[$, se existir $k = \lim\limits_{x \to b-0} |f(x)|/g(x)$, tem-se:*

***a)** Se $k = +\infty$, a divergência de $\int_c^b g(x)\,dx$ implica a divergência de $\int_a^b |f(x)|\,dx$, ou seja, implica que o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ não pode ser absolutamente convergente;*

***b)** Se $k = 0$, a convergência de $\int_c^b g(x)\,dx$ implica a convergência absoluta de $\int_a^b f(x)\,dx$;*

***c)** Se $k \neq 0\,,+\infty$, então:*

- ***c.1)** A divergência de $\int_c^b g(x)\,dx$ implica a divergência de $\int_a^b |f(x)|\,dx$, ou seja, implica que o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ não pode ser absolutamente convergente;*
- ***c.2)** A convergência de $\int_c^b g(x)\,dx$ implica a convergência absoluta de $\int_a^b f(x)\,dx$*

Este teorema admite um corolário que se demonstra como o correspondente corolário do teorema 12, estudando previamente o integral,

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}\, dx \quad ,$$

que facilmente se constata ser convergente para $\alpha < 1$ e divergente para $\alpha \geq 1$. Tem-se então:

Corolário : *Sendo $f(x)$ limitada e integrável em $[a\,,h]$, para todo o $h \in [\,a\,,b[$ e existindo,*

$$k = \lim_{x \to b-0} (b - x)^{\alpha} \,.\, |f(x)| \,,$$

***a**) Se k finito e $\alpha < 1$, então o integral $\int_a^b f(x)\, dx$ é absolutamente convergente ;*

***b**) Se $k \neq 0$ e $\alpha \geq 1$, então o integral $\int_a^b f(x)\, dx$ não é absolutamente convergente*

<u>OBSERVAÇÃO</u> : Por uma questão de comodidade prática de aplicação deste corolário, quando se tenha que estudar o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ com $f(x)$ ilimitada apenas junto de a , pode fazer-se a seguinte adaptação:

a) Como se explicou anteriormente, este 2º caso pode reduzir-se ao 1º caso, utilizando a igualdade,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\, dx \quad ,$$

com $f(-x)$ ilimitada apenas junto de $-a$;

b) Na aplicação do corolário ao integral do segundo membro deverá calcular-se ,

$$k = \lim_{x \to -a-0} (-a - x)^{\alpha} \,.\, |f(-x)| \,,$$

e tirar em seguida as respectivas conclusões;

c) Mas o limite achado pode transformar-se como segue, fazendo $y = -x$,

$$k = \lim_{x \to -a-0} (-a - x)^{\alpha} \,.\, |f(-x)| = \lim_{y \to a+0} (y - a)^{\alpha} \,.\, |f(y)| =$$

$$= \lim_{x \to a+0} (x - a)^{\alpha} \,.\, |f(x)| \quad ,$$

pelo que pode achar-se desde logo este último limite e aplicar directamente o corolário.

Tal como no caso dos integrais impróprios de primeira espécie, têm-se os seguintes critérios de convergência (não necessariamente absoluta), os quais se demonstram tal como os teoremas 14 e 15 . Trata-se dos critérios de Abel e de Dirichlet, os quais são muito úteis para estabelecer a convergência simples dos integrais que se saiba não serem absolutamente convergentes:

Teorema 19 : *Sendo* $f(x)$ *limitada e integrável em* $[a\,,h]$*, para todo o* $h\in[a\,,b[$*, e sendo* $\alpha(x)$ *uma função monótona e limitada em* $[a\,,\,b[$ *, se existir finito* $\lim\limits_{h\to b-0}\int_a^h f(x)\,dx$*, então também é finito* $\lim\limits_{h\to b-0}\int_a^h \alpha(x)\,.\,f(x)\,dx$*, ou seja, converge o integral* $\int_a^b \alpha(x)\,.\,f(x)\,dx$ (Critério de Abel)

Teorema 20 : *Sendo* $f(x)$ *limitada e integrável em* $[a\,,h]$*, para todo o* $h\in[a\,,b[$*, e sendo* $\alpha(x)$ *uma função monótona e limitada em* $[a\,,b[$*, se* $\varphi(h)=\int_a^h f(x)\,dx$ *for uma função limitada de* h *em* $[a\,,b[$ *e se* $\lim\limits_{x\to b-0}\alpha(x)=0$*, então é finito* $\lim\limits_{h\to b-0}\int_a^h \alpha(x)\,.\,f(x)\,dx$*, ou seja, converge o integral* $\int_a^b \alpha(x)\,.\,f(x)\,dx$
(Critério de Dirichlet)

Termina-se este estudo dos integrais impróprios de segunda espécie, resolvendo três exercícios de aplicação.

1) Calcule-se $\int_a^b \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx$. Para $\alpha\neq 1$, tem-se,

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx=\lim_{h\to b-0}\int_a^h \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,dx=\lim_{h\to b-0}\left[\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}}\right]_{x=a}^{x=h}=$$

$$=\lim_{h\to b-0}\left[\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(b-h)^{\alpha-1}}-\frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right],$$

sendo este limite igual a,

$$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\ ,$$

quando seja $\alpha<1$ e igual a $+\infty$ quando seja $\alpha>1$; para $\alpha=1$, tem-se,

$$\int_a^b \frac{1}{b-x}\,dx=\lim_{h\to b-0}\int_a^h \frac{1}{b-x}\,dx=\lim_{h\to b-0}\left[-\log(b-x)\right]_{x=a}^{x=h}=$$

$$=\lim_{h\to b-0}\left[-\log(b-h)+\log(b-a)\right]=+\infty\,.$$

Em conclusão: o integral é convergente quando seja $\alpha<1$, sendo a respectivo valor,

$$\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \; ;$$

e é divergente quando seja $\alpha \geq 1$.

2) Estudar a convergência de $\int_0^1 (1-x)^{k-1} . \, e^{-x} \; dx$. Como a função integranda tem sinal fixo no intervalo de integração (é não negativa), o estudo da convergência absoluta equivale ao estudo da convergência (o integral em causa não pode ser simplesmente convergente). Aplicando o corolário do teorema 18, tem-se:

$$\lim_{x \to 1-0} (1-x)^{\alpha} . \, |(1-x)^{k-1} . \, e^{-x}| = \lim_{x \to 1-0} (1-x)^{\alpha+k-1} . \, e^{-x} ,$$

sendo o limite igual a e^{-1} quando seja $\alpha + k - 1 = 0$, isto é, $\alpha = 1 - k$. O integral em estudo será então absolutamente convergente para $\alpha = 1 - k < 1$, ou seja, $k > 0$; e será divergente para $\alpha = 1 - k \geq 1$, ou seja, $k \leq 0$.

3) Estudar a convergência de $\int_{-1}^{2} (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} \; dx$. Como a função integranda é ilimitada junto de ambas as extremidades do intervalo de integração, tem-se,

$$\int_{-1}^{2} (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} \; dx = \int_{-1}^{0} (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} \; dx +$$

$$+ \int_{0}^{2} (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} \; dx \; ,$$

sendo o integral a estudar convergente se e só se o mesmo acontecer às duas parcelas do 2º membro da igualdade (como se sabe, o ponto $c = 0$ utilizado para decompor o intervalo de integração é arbitrário e poderia ter sido qualquer outro pertencente ao intervalo $]-1 , 2[$). Estudemos então a convergência de cada uma das parcelas:

a) Para a primeira parcela tem-se, nos termos da observação subsequente ao corolário do teorema 18,

$$\lim_{x \to -1+0} (x+1)^{\alpha} . \, (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} = \lim_{x \to -1+0} (x+1)^{\alpha+k} . \, (2-x)^{1-k} \; ,$$

sendo o limite igual a 3^{1-k} quando seja $\alpha + k = 0$, isto é, $\alpha = -k$. Então, o integral $\int_{-1}^{0} (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} \; dx$ será absolutamente convergente para $\alpha = -k < 1$, ou seja, $k > -1$; e será divergente para $k \leq 1$ (note-se que, como a função integranda tem sinal fixo no intervalo de integração, o facto de o integral não ser absolutamente convergente implica divergência).

b) Para a segunda parcela, tem-se, aplicando o corolário do teorema 18,

$$\lim_{x \to 2-0} (2-x)^{\alpha} . \, (1+x)^k . \, (2-x)^{1-k} = \lim_{x \to 2-0} (2-x)^{\alpha-k+1} . \, (1+x)^k \; ,$$

sendo o limite igual a 3^k quando seja $\alpha - k + 1 = 0$, isto é, $\alpha = k - 1$. Então, o integral $\int_0^2 (1+x)^k \cdot (2-x)^{1-k}\, dx$ será absolutamente convergente para $\alpha = k - 1 < 1$, ou seja, $k < 2$; e será divergente para $k \geq 2$.

Como conclusão, face aos resultados obtidos em a) e b) , tem-se que o integral $\int_{-1}^2 (1+x)^k \cdot (2-x)^{1-k}\, dx$ é absolutamente convergente quando seja $-1 < k < 2$ e divergente para $k \leq -1$ ou $k \geq 2$.

13. Outros tipos de integrais impróprios

A partir dos integrais impróprios de primeira e segunda espécies, estudados nos pontos 11. e 12. , podem definir-se muitos outros mais complexos que por vezes aparecem nas aplicações. O procedimento a seguir consiste em decompor o intervalo de integração em tantos os subintervalos quantos os necessários para que, em relação a cada um deles, a função integranda se encontre numa das situações estudadas nos pontos 11. e 12. ; o integral impróprio define-se então como a soma dos integrais de primeira e segunda espécie correspondentes aos subintervalos em que se decomponha o intervalo de integração, na condição de todos eles existirem.

Vejamos dois exemplos:

1) $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\, dx}_{(2^a\, Espécie)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx}_{(1^a\, Espécie)} \quad ;$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^{-x}}{x}\, dx}_{(1^a\, Espécie)} + \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{e^{-x}}{x}\, dx}_{(2^a\, Espécie)} + \underbrace{\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\, dx}_{(2^a\, Espécie)} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx}_{(1^a\, Espécie)} .$$

Note-se que , como se disse, a convergência dos integrais dos primeiros membros fica dependente da convergência de todos os integrais parcelas que figuram nos segundos membros.

Convirá ainda referir que a existência de infinitas possibilidades para decompor o intervalo de integração não introduz qualquer ambiguidade no procedimento descrito, como facilmente se verifica (no pressuposto de ser finito o número de subintervalos em que se decompõe o intervalo de integração). Assim, no caso do exemplo 1), poderia definir-se,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \underset{(2^a\, Espécie)}{\int_0^2 \frac{e^{-x}}{x}\, dx} + \underset{(1^a\, Espécie)}{\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx} \quad ,$$

sem que daí resultasse qualquer alteração da conclusão, quer quanto à convergência quer quanto ao valor do integral em caso de convergência. Com efeito,

$$\int_0^2 \frac{e^{-x}}{x}\, dx + \int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \lim_{k \to 0^+} \int_k^2 \frac{e^{-x}}{x}\, dx + \lim_{h \to +\infty} \int_2^h \frac{e^{-x}}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} [\int_k^1 \frac{e^{-x}}{x}\, dx + \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\, dx] + \lim_{h \to +\infty} [\int_1^h \frac{e^{-x}}{x}\, dx - \int_1^2 \frac{e^{-x}}{x}\, dx] =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} \int_k^1 \frac{e^{-x}}{x}\, dx + \lim_{h \to +\infty} \int_1^h \frac{e^{-x}}{x}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx \; .$$

14. Funções Beta e Gama

Duas importantes funções definidas por integrais, com diversas aplicações, nomeadamente na teoria das probabilidades, são as conhecidas *funções de Euler* :

a) A função *Gama* : $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \, . \, e^{-x} \, dx$;

b) A função *Beta* : $B(n\, ,\, m) = \int_0^1 x^{n-1} \, . \, (1 - x)^{m-1} \, dx$.

A função Gama é um integral impróprio de 1ª espécie para $n \geq 1$, podendo decompor-se na soma de um integral impróprio de 2ª espécie com um de 1ª espécie quando seja $n < 1$. A aplicação dos critérios estudados conduz facilmente à conclusão que o integral que define $\Gamma(n)$ é convergente para $n > 0$ e divergente para $n \leq 0$. O domínio da função Gama é assim definido pela condição $n > 0$, ou seja, é o intervalo $]\, 0\, , +\infty\, [$.

Quanto à função Beta, para $n \geq 1$ e $m \geq 1$, o integral que a define é um integral próprio (função contínua limitada num intervalo limitado). Quando seja $n < 1$ ou $m < 1$, o integral que define a função Beta é um integral impróprio de 2ª espécie. A aplicação dos critérios estudados leva facilmente à conclusão que o integral que define $B\,(n\, ,\, m)$ é convergente para $n > 0$ e $m > 0$ e divergente quando seja $n \leq 0$ ou $m \leq 0$. O domínio da função Beta é assim o seguinte intervalo de $\mathbf{R}^2$: $I = \{(n\, ,\, m) \; : \; n > 0 \, \wedge \, m > 0\}$.

As funções de Euler possuem importantes propriedades que passamos a estudar :

P15 : *Para* $n > 1$ *,* $\Gamma(n) = (n - 1) \, . \, \Gamma(n - 1)$ *e, em particular, com* n *inteiro positivo deduz-se* $\Gamma(n) = (n - 1)\, !$

Demonstração : Considerando $n > 1$ e integrando por partes, obtém-se sucessivamente:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \,.\, e^{-x} \; dx = \int_0^1 x^{n-1} \,.\, e^{-x} \; dx \; + \; \int_1^{+\infty} x^{n-1} \,.\, e^{-x} \; dx =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \int_h^1 x^{n-1} \,.\, e^{-x} \; dx + \lim_{k \to +\infty} \int_1^k x^{n-1} \,.\, e^{-x} \; dx =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left\{ \left[- e^{-x} \,.\, x^{n-1} \right]_{x=h}^{x=1} + \int_h^1 e^{-x} \,.\, (n-1) \,.\, x^{n-2} \; dx \right\} +$$

$$+ \lim_{k \to +\infty} \left\{ \left[- e^{-x} \,.\, x^{n-1} \right]_{x=1}^{x=k} + \int_1^k e^{-x} \,.\, (n-1) \,.\, x^{n-2} \; dx \right\} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left\{ \left[- e^{-1} + e^{-h} \,.\, h^{n-1} \right] + \int_h^1 e^{-x} \,.\, (n-1) \,.\, x^{n-2} \; dx \right\} +$$

$$+ \lim_{k \to +\infty} \left\{ \left[- e^{-k} \,.\, k^{n-1} + e^{-1} \right] + \int_1^k e^{-x} \,.\, (n-1) \,.\, x^{n-2} \; dx \right\} =$$

$$= \left\{ - e^{-1} + \int_0^1 e^{-x} \,.\, (n-1) \,.\, x^{n-2} \; dx \right\} + \left\{ e^{-1} + \int_1^{+\infty} e^{-x} \,.\, (n-1) \,.\, x^{n-2} \; dx \right\} =$$

$$= (n-1) \,.\, \int_0^{+\infty} e^{-x} \,.\, x^{n-2} \; dx = (n-1) \,.\, \Gamma(n-1) \,.$$

Sendo n inteiro maior ou igual a 2 ,

$$\Gamma(n) = (n-1) \,.\, \Gamma(n-1) = (n-1) \,.\, (n-2) \,.\, \Gamma(n-2) = \; ... \; =$$

$$= (n-1) \,.\, (n-2) \,.\; \dots \;.\; 2 \,.\, \Gamma(2) =$$

$$= (n-1) \,.\, (n-2) \,.\; \dots \;.\; 2 \,.\, 1 \,.\, \Gamma(1) = (n-1)\,! \; ,$$

porque $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \; dx = 1$. Para $n = 1$, $\Gamma(1) = 1 = 0\,!$. Portanto, em geral, com n inteiro positivo, $\Gamma(n) = (n-1)\,!$.

P 16 : *Para quaisquer* $n > 0$ *e* $m > 0$ *,* $B(n\,,m) = B(m\,,n)$

Demonstração : Tem-se,

$$B(n\,,m) = \int_0^1 x^{n-1} \,.\, (1-x)^{m-1} \; dx = \lim_{h \to 0^+} \int_h^{1/2} x^{n-1} \,.\, (1-x)^{m-1} \; dx \; +$$

$$+ \lim_{k \to 1-0} \int_{1/2}^{k} x^{n-1} . (1-x)^{m-1} \, dx \quad ,$$

e, fazendo a mudança de variável $x = 1 - y$, resulta,

$$B(n\,,m) = \lim_{h \to 0^+} \int_{1/2}^{1-h} (1-y)^{n-1} \,.\, y^m \; dy \;+\; \lim_{k \to 1-0} \int_{1-k}^{1/2} (1-y)^{n-1} \,.\, y^m \; dy \;=$$

$$= \int_{1/2}^{1} (1-y)^{n-1} \,.\, y^m \; dy \;+\; \int_{0}^{1/2} (1-y)^{n-1} \,.\, y^m \; dy \;=$$

$$= \int_{0}^{1} (1-y)^{n-1} \,.\, y^m \; dy \;=\; B(m\,,n)\,,$$

como se pretendia demonstrar.

P 17 : *A função Beta pode em alternativa ser definida pelo integral,*

$$B(n\,,m) = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{n+m}} \, dx$$

<u>Demonstração</u> : Deixa-se como exercício, sugerindo-se que seja utilizada a mudança de variável,

$$x \;=\; \frac{y}{1+y} \quad .$$

Apresenta-se finalmente sem demonstração uma igualdade que relaciona as funções Beta e Gama. A demonstração faz-se de forma relativamente simples, mas envolve o conhecimento da teoria da integração em $\mathbf{R}^2$, motivo pelo qual não a apresentaremos aqui.

P 18 : *Para quaisquer* $n > 0$ *e* $m > 0$ *, tem-se:*

$$B(n\,,m) \;=\; \frac{\Gamma(n)\;.\;\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

15. Exercícios

1 - Determine as somas de Riemann da função $f(x) = 8 - x^2/2$ no intervalo $[0 , 6]$ relativamente à decomposição definida pelos pontos, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$, tomando como pontos intermédios: **a)** $y_i = i + 1/2$; **b)** $y_i = i + 1/3$. Determine também as somas inferior e superior de Darboux de $f(x)$ para a mesma decomposição. Compare os resultados obtidos com o valor do integral da função no intervalo, que se sabe ser igual a 12.

2 - Determine as somas de Riemann da função $f(x) = \sqrt{x}$ em $[0 , 1]$ relativamente à decomposição definida pelos pontos, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 1$, tomando como pontos intermédios $y_0 = 0{,}25$, $y_1 = 0{,}36$, $y_2 = 0{,}5625$, $y_3 = 0{,}64$. Determine também as somas inferior e superior de Darboux de $f(x)$ para a mesma decomposição. Compare os resultados obtidos com o valor do integral da função no intervalo, que se sabe ser igual a $2/3$.

3 - Calcule os seguintes integrais:

a) $\int_{-2}^{4} 5 \; dx$; b) $\int_{1}^{10} \sqrt{2} \; dx$; **c)** $\int_{2}^{2} 100 \; dx$;

d) $\int_{0}^{4} f(x) \; dx$, com $f(x) = \begin{cases} 5x & , \; x \; inteiro \\ 6 & , \; outros \; valores \; de \; x \end{cases}$.

4 - Sabendo que,

$$\int_{1}^{4} x^2 \; dx = 21 \; , \; \int_{1}^{4} x \; dx = 15/2 \quad \text{e} \quad \int_{1}^{4} \sqrt{x} \; dx = 14/3 \; ,$$

utilize as propriedades dos integrais para calcular,

a) $\int_{1}^{4} (3x^2 + 5) \; dx$; **b)** $\int_{1}^{4} (6x - 1) \; dx$; **c)** $\int_{1}^{4} 2x(x-1) \; dx$;
d) $\int_{1}^{4} (\sqrt{x} - 5)^2 \; dx$.

5 - Verifique as seguintes desigualdades sem calcular os integrais nelas envolvidos:

a) $\int_{1}^{2} (3x^2 + 4) \; dx \geq \int_{1}^{2} (2x^2 + 5) \; dx$; **b)** $\int_{2}^{4} (5x^2 - 4 \, . \sqrt{x} + 2) \; dx > 0$.

6 - Para a função,

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \; irracional \\ 0 & , \; x \; racional \end{cases} \; ,$$

mostre que para qualquer decomposição do intervalo $[0 , 1]$ sempre se podem encontrar somas sigma nulas e outras unitárias, por escolha conveniente dos pontos intermédios. Recorrendo à definição de Riemann, que conclusão pode tirar sobre a integrabilidade de $g(x)$ no intervalo em causa ? Justifique.

7 - Considere a função definida em $[0\ ,\ 2]$ do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & , \quad x = 1 \\ 3 & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases} ,$$

a) Mostre que para qualquer decomposição do intervalo as somas superior e inferior verificam as relações: $s < 4 < S$;

b) Recorrendo directamente à definição de integral segundo Darboux, mostre que $f(x)$ é integrável e calcule o valor do integral .

8* - Prove que a condição necessária e suficiente de integrabilidade de $f(x)$ em $[a\ ,\ b]$ é que, qualquer que seja $\delta > 0$, exista uma decomposição D_δ tal que , $S(D_\delta) - s(D_\delta) < \delta$. Como aplicação deste resultado, estabeleça a integrabilidade da função $f(x) = x$ no inter-valo $[a\ ,\ b]$.

9 - Com base na condição necessária e suficiente de integrabilidade, justifique ser integráve1 a seguinte função, no intervalos $[0\ ,\ 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} sen\,[I(1/x)] & , \quad 0 < x \le 1 \\ 1 & , \quad x = 0 \end{cases} .$$

em que $I(y)$ designa o maior inteiro que é inferior ou iguala a y .

10* - Considerando a função $f(x)$ definida no intervalo $[a\ ,\ b]$, definam-se :

Parte positiva de $f(x)$: $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad a \le x \le b \quad e \quad f(x) \ge 0 \\ 0 & , \quad a \le x \le b \quad e \quad f(x) < 0 \end{cases}$

Parte negativa de $f(x)$: $f^-(x) = \begin{cases} 0 & , \quad a \le x \le b \quad e \quad f(x) \ge 0 \\ f(x) & , \quad a \le x \le b \quad e \quad f(x) < 0 \end{cases}$.

Sendo $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ um qualquer subintervalo de $[a\ ,\ b]$ sejam,

l_i = Ínfimo de $f(x)$ em $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$; l^+_i = Ínfimo de $f^+(x)$ em $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$;

L_i = Supremo de $f(x)$ em $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$; L^+_i = Supremo de $f^+(x)$ em $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$.

Posto isto, prove que:

a) $L^+_i - l^+_i \le L_i - l_i$;

b) Se $f(x)$ é integrável em $[a\ ,\ b]$, então $f^+(x)$ também o é ;

c) Se $f(x)$ é integrável em $[a\,,b]$, então $f^{-}(x)$ também o é ;

d) Se $f\,(x)$ é integrável em $[a\,,\,b]$, então $|\,f\,(x)|$ também o é e tem-se a seguinte desigualdade,

$$|\int_a^b f(x)\ dx\ | \leq \int_a^b |f(x)|\ dx\ \ .$$

11 - Prove que sendo $f(x)$ contínua e não negativa no intervalo $[a\,,b]$, basta que exista um $c \in [a\,,b]$ tal que $f(c) > 0$, para que o integral de $f(x)$ em $[a\,,b]$ seja positivo.

12 - Utilize a interpretação geométrica do conceito de integral para calcular :

a) $\int_1^3 (2\,x+1)\ dx$; **b)** $\int_{-1}^3 (1-3\,x)\ dx$;

c) $\int_{-2}^4 f(x)\ dx$, com $f(x) = \begin{cases} 1-x & ,\ x < 1 \\ 2 & ,\ 1 \leq x < 3 \\ 1+x & ,\ x \geq 3 \end{cases}$; **d)** $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$.

13 - Relativamente a cada um dos casos do exercício anterior, determine o valor k a que se refere o teorema da média , ou seja, o valor k que satisfaz a igualdade , $\int_a^b f(x)\ dx = k\,.(\,b\text{ - }a)$.

14 - Prove que se $f\,(x)$ é contínua em $[a\,,\,b]$ e $g(x)$ é não negativa e integrável no mesmo intervalo, então existe um $c \in [a\,,b]$ tal que,

$$\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx = f(c)\,.\int_a^b g(x)\ dx\ \ .$$

15 - Sendo $f(x)$ integrável em $[a\,,b]$, utilize o teorema da média para provar que ,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx\ \ .$$

16 - Calcular os integrais seguintes :

a) $\int_{-1}^1 (x^2+x+1)\,dx$; **b)** $\int_1^e log\ x\ dx$;

c) $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$, com $f(x) = \begin{cases} 1+2x & ,\ x < 0 \\ x^2 & ,\ 0 \leq x < 1 \\ e^x & ,\ x \geq 1 \end{cases}$; **d)** $\int_0^{\pi/2} sen\ x\ dx$;

e) $\int_0^1 x^2 . e^x \; dx$; **f)** $\int_0^3 f(x)\, dx$, com $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , \; x < 1 \\ 1 & , \; 1 \le x < 2 \\ x+1 & , \; x \ge 2 \end{cases}$;

g) $\int_{-3}^4 |x-2| \; dx$.

17 - Mostre qual o erro da seguinte demonstração, onde supostamente se prova que $-2 > 0$:

" *Notando que* $P\,(1/x^2) = -1/x$ *, tem-se, aplicando a fórmula fundamental do cálculo integral,*

$$\int_{-1}^{1} (1/x^2)\; dx = \left[-1/x\right]_{x=-1}^{x=1} = -1 - 1 = -2 \; ;$$

por outro lado, como $1/x^2 > 0$ *, tem-se* $\int_{-1}^{1} (1/x^2)\; dx > 0$ *, donde resulta a desigualdade* $-2 > 0$ "

18 - Tendo em conta o resultado estabelecido no exercício 15 , mostre que sendo $f(x)$ integrável em $[a\,,\,b]$ e primitivável em $]a\,,\,b]$ tem-se, representando por $F(x)$ uma primitiva da função em $]a\,,\,b]$,

$$\int_a^b f(x)\; dx = F(b) - F(a+0) \; ,$$

com $F(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} F(x)$. Aproveite o resultado para calcular $\int_0^{1/\pi} f(x)\; dx$, com,

$$f(x) = \begin{cases} 2x \,.\, sen\,(1/x) - cos\,(1/x) & , \; x \ne 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases} .$$

19 - Calcular os integrais indefinidos seguintes:

a) De $f(x) = x^2 . e^x$, com origem em $c = 0$;

b) De $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & , \; x < 0 \\ x^2 & , \; 0 \le x < 1 \\ e^x & , \; x \ge 1 \end{cases}$, com origem em $c = 1$;

c) De $f(x) = log\, x$, com origem em $c = 1$.

No caso da alínea c) verifique que a derivada do integral indefinido coincide com a função integranda. Seria de esperar outro resultado ? Justifique.

20 - Utilize o integral indefinido da função $f(x) = sen\, x$ com uma origem genérica c, para mostrar que nem todas as primitivas de uma função num intervalo são necessariamente integrais indefinidos da função em causa.

21 - Sendo $f(x)$ contínua em $[a\,,\,b]$, considere o integral indefinido com origem em a. Seja $F(x)$ uma qualquer primitiva de $f(x)$ em $[a\,,\,b]$. Utilize as propriedades do integral indefinido para provar que,

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)\,,$$

que como sabe é a fórmula fundamental do cálculo integral. Compare as hipóteses consideradas neste exercício com as hipóteses adoptadas na demonstração do teorema 6 e diga justificando qual o conjunto de hipóteses lhe parece mais geral.

22 - Mostre que existe uma só função $f(x)$ contínua $[0\,,\,1]$ e tal que,

$$\int_0^x f(t)\ dt = \int_x^1 f(t)\ dt\ ,$$

para cada $x \in [\,0\,,\,1\,]$.

23 - Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções contínuas em $\mathbf{R}$ e tais que, para cada $x \in \mathbf{R}$, $\int_a^x u(t)\ dt = \int_b^x v(t)\ dt$, com a e b constantes reais . Prove que $u(x) = v(x)$ e que $\int_a^b u(x)\ dx = 0$.

24 – Seja $f(x)$ uma função contínua em $\mathbf{R}$ e $g(x)$ uma função de $\mathbf{R} - \{0\}$ em $\mathbf{R}$ definida por,

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f(t)\ dt\ .$$

a) Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$;

b) Prove que $g(x)$ é constante em $\mathbf{R} - \{0\}$ se e só se $f(x)$ é constante em $\mathbf{R}$;

c) Prove que o contradomínio de $g(x)$ está contido no contradomínio de $f(x)$.

25 - Sendo $g(x)$ uma função contínua e positiva em sentido estrito em $\mathbf{R}$, defina-se,

$$h(x) = \int_x^{x^2} g(t)\ dt \qquad (\,x \in \mathbf{R}\,)\,.$$

a) Estude o sinal de $h(x)$;

b) Calcule $h'(x)$;

c) Prove que $h(x)$ é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty\,,\,0[$;

d*) Justifique que $h(x)$ tem mínimo absoluto e, designando-o por m , prove que verifica a relação ,

$$| m | \leq \frac{1}{4} \cdot Máx \,\{g(x) \;:\; x \in [0 \,,\, 1]\,\} \;.$$

26* - Seja $I = [a \,,\, b]$ $(a < b)$ e $f(x)$ uma função de I em $\mathbf{R}$. Para cada decomposição $D = \{x_0 = a \,,\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, \dots \,,\, x_{n-1} \,,\, x_n = b\}$ do intervalo I defina--se ,

$$v(f \,,\, D) = \sum_{i=0}^{n-1} | f(x_{i+1}) \;-\; f(x_i) | \;.$$

Designando por $V(f)$ o conjunto de todos os números $v(f\,,\,D)$ que, para uma dada função $f(x)$, podem obter-se considerando todas as possíveis decomposições do interva-lo $[a \,,\, b]$, seja $\lambda_f = Sup\; V(f)$. Diz-se que $f(x)$ é uma função de *variação limitada* no intervalo $[a \,,\, b]$ se e só se λ_f existir finito ou , de outro modo, se e só se o conjunto $V(f)$ for majorado em $\mathbf{R}$; quando a função seja de variação limitada, ao número λ_f chama-se *variação total* da função no intervalo $[a \,,\, b]$; quando a função não seja de variação limitada, diz-se que a sua variação total no intervalo em causa é infinita.

Nestas condições:

a) Indique quais das funções seguintes, todas definidas em $[0 \,,\, 1]$, são de variação limitada e qual a variação total de cada uma :

$$f_1(x) = \begin{cases} 1/x & , \;\; 0 < x \leq 1 \\ 3 & , \;\; x = 0 \end{cases} \quad , \quad f_2(x) = \begin{cases} sen\,(1/x) & , \;\; 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \;\; x = 0 \end{cases} \quad ,$$

$$f_3(x) \;=\; sen\,x\,(0 \;\leq\; x \;\leq\; 1) \quad , \quad f_4(x) = \begin{cases} 1 & , \;\; 0 \leq x \leq 1 \;\; e \;\; x \;\; irracional \\ 0 & , \;\; 0 \leq x \leq 1 \;\; e \;\; x \;\; racional \end{cases} \quad ;$$

b) Prove que se $f(x)$ é monótona em $[a \,,\, b]$, então tem variação limitada e a variação total é $\lambda_f = | f(b) - f(a) |$;

c) Prove que se $f(x)$ é integrável e não negativa em $[a \,,\, b]$, qualquer dos seus integrais indefinidos é uma função de variação limitada, com variação total, $\lambda_f = \int_a^b f(x)\; dx$;

d) Prove que se $f(x)$ é contínua em $[a \,,\, b]$, qualquer dos seus integrais indefinidos é uma função de variação limitada, com variação total não superior a

$$(b - a) \,.\, Máx \;\{\, | f(t) | \;:\; a \leq t \leq b \,\} \;.$$

27 - Utilize o método de integração por partes para calcular,

a) $\int_0^{\pi} cos^2 x \; dx$; **b)** $\int_1^{e} x^2 . \log x \; dx$; **c)** $\int_0^{1} arc\,tg\; x \; dx$;

d) $\int_0^{1} x . arc\,tg\; x \; dx$.

28 - Sendo $I_n (x) = \int_0^{x} t^n . (t^2 + a^2)^{-1/2} \; dt$, utilize o método de integração por partes para mostrar que,

$$n . I_n (x) = x^{n-1} . (x^2 + a^2)^{1/2} - (n - 1) . a^2 . I_{n-2}(x) \;,\; \text{para } n \geq 2 .$$

Utilize esta igualdade para mostrar que,

$$\int_0^{2} x^5 . (x^2 + 5)^{-1/2} \; dx = \frac{168}{5} - 40 . \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

29 - Sendo $I_n = \int_0^{1} (1 - x^2)^n \; dx$, mostre, utilizando o método de integração por partes, que ,

$$(2n + 1) . I_n = 2\, n . I_{n-1} \;,$$

e utilize esta relação para calcular I_2 , I_3 , I_4 e I_5 .

30 - Sendo $f(n) = \int_0^{\pi/4} tg^n x \;\; dx \;\; (n \geq 0)$, mostre que:

a) $f(n+1) < f(n)$; **b)** $f(n) + f(n\text{-}2) = \dfrac{1}{n - 1}$, se $n \geq 2$;

c) $\dfrac{1}{n + 1} < 2 . f(n) < \dfrac{1}{n - 1}$, se $n \geq 2$.

31* - Admita que $f(x)$ tem derivada de ordem $n + 1$ contínua em certo intervalo I a que pertença a . Então, para cada $x \in I$, mostre que,

$$f(x) = f(a) + (x - a) . f\,'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!} \cdot f\,''(a) + \cdots + \frac{(x - a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + E_n(x)$$

com $E_n (x) = \dfrac{1}{n!} \cdot \int_a^{x} (x - t)^n . f^{(n+1)}(t) \; dt$. Esta é a chamada fórmula de Taylor com resto na forma integral. (**<u>SUGESTÃO</u>:** *Faça a demonstração por indução finita em n e utilize o método de integração por partes*) .

32 - Calcule os integrais seguintes, fazendo as mudanças de variável que se indicam :

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \;\; dx \;\; (\; x = cos\, t \;) \;\; ;$

b) $\int_{e}^{2e} \dfrac{log\,(log\, x)}{x\,.\,log^2 x} \;\; dx \;\;\; (\, x = e^t \,) \;\; ;$

c) $\int_{2}^{4} \dfrac{1}{4x\,.\,\sqrt{x - 1}} \;\; dx \;\; (\, x = t^4 + 1) \;\; ;$

d) $\int_{2}^{10} \dfrac{3}{\sqrt{5x - 1}} \;\; dx \;\; (\, t = 5\,x - 1 \;) \, .$

33 - Seja,

$$F(x\,,a) = \int_0^x \frac{t^p}{(t^2 + a^2)^q} \; dt \quad , \text{ com } a > 0 \text{ e } p\,,q \in \mathbf{N} \; .$$

Mostre que $F(x\,,a) = a^{p+1-2q} \, . \, F(x/a\,,1)$.

34 - Supondo $x > 0$, mostre que,

$$\int_x^1 \frac{1}{1 + t^2} \; dt \; = \int_1^{1/x} \frac{1}{1 + t^2} \; dt \quad .$$

35 - Com m e n naturais , mostre que,

a) $\int_0^1 x^m \,.\, (1 - x)^n \;\; dx \; = \int_0^1 x^n \,.\, (1 - x)^m \;\; dx \quad ;$

b*) $\int_0^{\pi/2} cos^m x \,.\, sen^m x \;\; dx \;\; = \;\; 2^{-m} \,.\, \int_0^{\pi/2} cos^m x \;\, dx \quad .$

36 - Fazendo a mudança de variável $u = \pi - x$, mostre que,

$$\int_0^\pi x \,.\, f(sen\, x) \;\; dx \;\; = \; (\pi/2) \,.\, \int_0^\pi f(sen\, x) \;\; dx \; .$$

Aproveite o resultado para mostrar que,

$$\int_0^\pi \frac{x\,.\,sen\,x}{1 + cos^2 x} \;\; dx \;\; = \; \pi \,.\, \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \;\; dx \; .$$

37 - Sendo $g''(t)$ contínua e não nula em $[a\,,b]$ e existindo uma constante $m > 0$ tal que $g'(t) \geq m$ qualquer que seja $t \in [a\,,b]$, utilize o corolário do segundo teorema da média para provar que,

$$\left| \int_a^b sen\; g(t) \;\; dt \right| \; \leq \; 4/m \; .$$

(**<u>SUGESTÃO</u> :** Multiplique e divida a função integranda por *g′(t)*) .

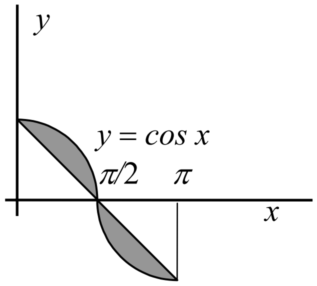
Utilize o resultado obtido para mostrar que, sendo $a > 0$,

$$\left| \int_a^x sen\, t^2 \; dt \right| \leq 2/a \,,$$

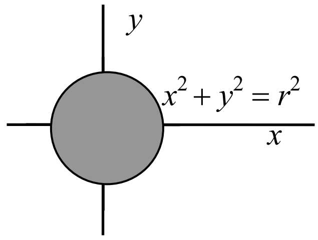
qualquer que seja $x > a$.

38 - Calcule as áreas assinaladas em cada uma das seguintes figuras:

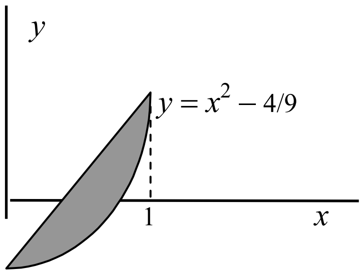
a)



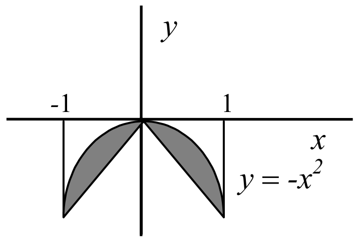
b)



c)



d)



39 - Calcule as áreas das seguintes figuras planas:

a) Figura plana que representa geometricamente o seguinte subconjunto de $\mathbf{R}^2$: $A = \{(x\,, y) \;:\; x - 2 \leq y \leq 4 - x \;\wedge\; 0 \leq x \leq 3\}$;

b) Figura plana limitada pelas rectas, $y = x$, $y = x/2$ e $y = 1 - x$.

40 - Sendo $f(x)$ uma função contínua e não negativa no intervalo $[a\,, b]$, designe-se por Δ o conjunto dos pontos do espaço ordinário gerado numa rotação completa do trapezoide definido pelas relações,

$$a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq f(x)\,,$$

em torno do eixo Ox .

a) Baseando-se na noção intuitiva de volume , verifique que, para qualquer decomposição $D = \{\, x_0 = a\,,\; x_1\,, x_2\,, \ldots,\; x_{n-1}\,,\; x_n = b\}$, do intervalo $[a\,, b]$, o volume de Δ está compreendido entre as somas inferior e superior de Darboux da função $g(x) = \pi \,.\, f^2(x)$ relativas à decomposição D ;

b) Face à conclusão da alínea anterior, como poderá interpretar geometricamente o integral $\int_a^b \pi \, . \, f^2(x) \;\; dx$;

c) Tendo em conta a resposta da alínea anterior, calcule o volume : **i)** De uma esfera de raio r ; **ii)** De um cone circular recto, de altura h e raio da base r ; **iii)** Do sólido gerado por uma rotação completa em torno do eixo $O\,y$, efectuada pelo conjunto dos pontos do semiplano $x \geq 0$ cujas coordenadas verificam a condição $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$.

41 - Estudar a existência e calcular o valor de :

a) $\int_1^{+\infty} (1/x^2) \;\; dx$; b) $\int_1^{+\infty} 1/x \;\; dx$; **c)** $\int_{-\infty}^{0} e^x \;\; dx$; **d)** $\int_0^{+\infty} log\,(x+1) \;\; dx$;

e) $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^2} \;\; dx$; **f)** $\int_{-\infty}^{-2} (1/x^2) \;\; dx$; **g)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha \, . \, |x| \, . \, e^{-\alpha x^2} \;\; dx \;\; (\alpha > 0)$;

h) $\int_{-\infty}^{+\infty} x \, . \, e^{-x^2} \;\; dx$; *i)* $\int_e^{+\infty} \dfrac{log\,(log\,x)}{x \, . \, log^2\,x} \; dx$ (Faça $x = e^y$) .

42 - Estude a convergência dos seguintes integrais:

a) $\int_0^{+\infty} \dfrac{sen^2\,x}{x^2} \;\; dx$; **b)** $\int_{-1}^{+\infty} x \, . \, (1 + x^4)^{\beta} \;\; dx$; **c)** $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} \, . \, e^{-x} \;\; dx$;

d) $\int_1^{+\infty} x^{-3/2} \, . \, sen\,x \;\; dx$; **e)** $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{log\,(1+x^2)}{1 + x^2} \;\; dx$; **f)** $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} \, . \, e^{-x} \;\; dx$;

g) $\int_1^{+\infty} x^{\beta} \, . \, sen\,x \;\; dx$; **h*)** $\int_0^{+\infty} \dfrac{sen\,x}{\sqrt{x}} \;\; dx$; **i*)** $\int_0^{+\infty} sen\,x^2 \;\; dx$;

j*) $\int_0^{+\infty} sen\,x^m \;\; dx$; **k)** $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, . \, sen\,x \;\; dx$.

43 - Dados o integral e a série,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \, . \, log\,(x+1)} \;\; dx \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \, . \, log\,(n+1)} \quad ,$$

estude a natureza do primeiro e conclua daí sobre a natureza da segunda.

44 - Utilize procedimento semelhante ao do exercício anterior para estudar a convergên-cia da série $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^{\alpha})$ para $\alpha > 0$.

45 - Sendo $f(x) = (-1)^{n-1} \cdot 1/n$ ($n - 1 \leq x < n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$) , estude a convergência do integral $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$.

46 - Estudar a convergência e calcular o valor de :

a) $\int_0^1 \dfrac{\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x\,.\,(1-x)}}\ dx$; **b)** $\int_0^{\pi/2} tg\ x\ dx$; **c)** $\int_0^2 x^{-1/3}\ dx$;

d) $\int_0^1 1/x\ dx$; **e)** $\int_0^2 x^{-2} \,.\, e^{-1/x}\ dx$.

47 - Estudar a convergência dos seguintes integrais:

a) $\int_{-1}^0 e^x / x\ dx$; **b)** $\int_{-1}^2 (1+x)^{-1/2} \,.\, (2-x)^{-1/3}\ dx$; **c)** $\int_0^1 \dfrac{cos^2\, x}{1-x}\ dx$;

d) $\int_{-1}^1 (1-x)^{-1/2} \,.\, log\,(2+x)\ dx$; **e)** $\int_0^1 (1-x)^{\beta} \,.\, sen\,(1-x)\ dx$;

f) $\int_0^1 x^{-1/2} \,.\, (1-x)^{-1/3}\ dx$; **g)** $\int_0^2 x^2 \,.\, (4-x^2)^m\ dx$;

h) $\int_0^1 (x^{\beta}+1) \,.\, \left[x \,.\, (1-x)\right]^{-1/2}\ dx$; **i)** $\int_1^2 x^{-2} \,.\, (8-2x^2)^m\ dx$;

j) $\int_0^1 x^{\alpha-1} \,.\, e^{-x}\ dx$; **k)** $\int_0^1 x^{\alpha-1} \,.\, (1-x)^{\beta-1}\ dx$.

48 - Estude a convergência de $\int_0^1 (cos\ x)/x\ dx$, procedendo como se indica:

a) Aplicar ao integral $\int_{1/(n+1)}^{1/n} (cos\ x)/x\ dx$ o primeiro teorema da média;

b) Representando por $n\,(h)$ o maior inteiro que faz $h \leq \dfrac{1}{n(h)+1}$, mostrar que, para $0 < h < 1$,

$$\int_h^1 (cos\ x)/x\ dx \ \geq\ \sum_{n=1}^{n(h)} \frac{cos\ x_n}{x_n \,.\, n \,.\, (n+1)} \ ,$$

com $\dfrac{1}{n+1} \leq x_n \leq \dfrac{1}{n}$;

c) Mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos\ x_n}{x_n \,.\, n \,.\, (n+1)}$ é divergente ;

d) Concluir em seguida sobre a natureza do integral proposto.

49 - Estudar a convergência e calcular o valor de,

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{|x|}}}{\sqrt{|x|}} \; dx$; **b)** $\int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{x\,.\,(x+1)} + (x-1)^{1/3} \right] dx$;

c) $\int_{1}^{+\infty} x^{-1} .\, log^{\alpha}\, x \;\; dx$.

50 - Estudar a convergência de ,

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot e^{-x^2} \; dx$; **b*)** $\int_{0}^{+\infty} x^{\beta} .\, sen\, x \;\; dx$.

51 - Sendo $f(x)$ integrável em $[-a\, ,\, a]$ e $f(x) = -f(x)$ (função ímpar) no intervalo, prove que , com a finito , $\int_{-a}^{a} f(x)\; dx = 0$. O resultado será válido no caso de ser $a = +\infty$? Justifique.

52 - Mostre através de um exemplo que pode ter-se, com $n \in \mathbf{N}$,

$$lim \int_{a}^{n} f(x)\; dx = k \;\; (finito) ,$$

sem que exista o integral impróprio $\int_{a}^{+\infty} f(x)\; dx$.

53 - Fazendo a mudança de variável $x = sen^2\, y$, calcule $B\,(3/2\;,\;1/2)$. A partir do resultado obtido, calcule :

a) $\Gamma(1/2)$, $B\,(1/2\,,\,1/2)$ e $\Gamma(9/2)$;

b) O integral,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \; e^{-x^2/2} \; dx \;\; ,$$

fazendo no integral que define $\Gamma(1/2)$ a mudança de variável $x = y^2/2$.

<u>RESPOSTAS</u>:

1 - a) $\sigma = 12{,}25$, $s = 2{,}5$, $S = 20{,}5$; **b)** $\sigma = 15{,}17$, $s = 2{,}5$, $S = 20{,}5$.

2 - $\sigma = 0{,}685$, $s = 0{,}511$, $S = 0{,}775$.

3 - **a)** 30 ; **b)** $9 \cdot 2^{1/2}$; **c)** 0 ; **d)** 24 .

4 - **a)** 78 ; **b)** 42 ; **c)** 27 ; **d)** $215/6$.

6 - A função $g(x)$ não é integrável em $[0\ ,\ 1]$, porque as somas sigma não tendem para um limite finito quando o diâmetro da decomposição tende para zero.

7 - **b)** O valor do integral é 4 .

12 - **a)** 10 ; **b)** -8 ; **c)** 13 ; **d)** $\pi/2$.

13 - **a)** 5 ; **b)** -2 ; **c)** $13/6$; **d)** $\pi/4$.

16 - **a)** $8/3$; **b)** 1 ; **c)** $e^2 - e + 1/3$; **d)** 1 ; **e)** $e - 2$; **f)** $41/6$; **g)** $29/2$.

17 - A função $f(x) = 1/x^2$ não é limitada no intervalo $[-1\ ,\ 1]$.

18 - O integral é nulo.

19 - **a)** $\varphi(x) = x^2 \cdot e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x - 2 \quad (x \in \mathbf{R})$;

b) $\varphi(x) = \begin{cases} -1/3 + x + x^2 & , \ x < 0 \\ -1/3 + x^3/3 & , \ 0 \le x < 1 \\ e^x - e & , \ x \ge 1 \end{cases}$; **c)** $\varphi(x) = 1 + x \log x - x \quad (x > 0)$.

No caso da alínea c) tem-se $\varphi'(x) = \log x$ como seria de esperar, dado que a função integranda $f(x) = \log x$ é contínua no intervalo $]0\ ,+\infty[$.

21 - **Hipótese considerada no exercício** : H) $f(x)$ é contínua no intervalo $[a\ ,\ b]$.
Hipóteses consideradas no teorema 10 : H1) $f(x)$ integrável no intervalo $[a\ ,\ b]$;
H2) $f(x)$ primitivável no intervalo $[a\ ,\ b]$.

Como H) implica H1) e H2) , mas H1) e H2) não implicam H), pode afirmar-se que o conjunto das hipóteses H1) e H2) é mais geral (abrange mais funções) que a hipótese H).

24 - **a)** $f(0)$.

25 - **a)** $h(x) > 0$, se $x < 0$ ou $x > 1$; $h(x) < 0$, se $0 < x < 1$; $h(0) = h(1) = 0$;
b) $h'(x) = 2\,x\,g(x^2) - g(x)$.

26 - **a)** $f_3(x)$ é de variação limitada , sendo a respectiva variação total no intervalo igual a *sen 1* ; as restantes funções não são de variação limitada nos intervalos referidos .

27 - **a)** $\pi/2$; **b)** $(1 + 2\,e^3)/9$; **c)** $(\pi/4) - (\log 2)/2$; **d)** $(\pi/4) - 1/2$.

29 - $I_2 = 8/15$, $I_3 = 16/35$, $I_4 = 128/315$, $I_5 = 256/693$.

32 - **a)** $\pi/2$; **b)** $1 - \dfrac{1 + \log(1 + \log 2)}{1 + \log 2}$; **c)** $\pi/24$; **d)** $24/5$.

38 - **a)** $2 - \pi/2$; **b)** πr^2 ; **c)** 1/6 ; **d)** 1/3 .

39 - **a)** *9* ; **b)** 1/12 .

40 - **b)** Pode interpretar-se como sendo o volume de Δ ; **c)** **i)** $(4/3)\pi r^3$; **ii)** $(1/3)\, \pi r^2\, h$; **iii)** $(4/3)\pi a^2\, b$.

41 - **a)** 1 ; **b)** Não existe ; **c)** 1 ; **d)** Não existe ; e) π ; **f)** 1/2 ; **g)** 1 ; **h)** 0 ; **i)** 1 .

42 - **a)** Absolutamente convergente ; **b**) Para $\beta < -1/2$, absolutamente convergente ; para $\beta \geq -1/2$, divergente ; **c)** Absolutamente convergente ; **d)** Absolutamente convergen-te ; **e)** Absolutamente convergente ; **f)** Absolutamente convergente ; **g)** Para $\beta < -1$, absolutamente convergente ; para $-1 \leq \beta < 0$, simplesmente convergente ; para $\beta \geq 0$, divergente ; **h)** Simplesmente convergente ; **i)** Simplesmente convergente ; **j)** Para $m < -1$, absolutamente convergente ; para $-1 \leq m \leq 1$, divergente ; para $m > 1$, simplesmente convergente ; **k)** Absolutamente convergente .

43 - O integral e a série são divergentes.

44 - A série converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

45 - Simplesmente convergente .

46 - **a)** 4 ; **b)** Não existe ; **c)** $(3/2)\, 4^{1/3}$; **d)** Não existe ; **e)** $e^{-1/2}$.

47 - **a)** Divergente ; **b)** Absolutamente convergente ; **c)** Divergente ; **d)** Absolutamente convergente ; **e)** Para $\beta \leq -2$, divergente ; para $\beta > -2$, absolutamente convergente ;
f) Absolutamente convergente ; **g)** Para $m \leq -1$, divergente ; para $m > -1$, absolutamente convergente ; **h)** Para $\beta > -1/2$, absolutamente convergente ; para $\beta \leq -1/2$, divergente ; **i)** Para $m \leq -1$, divergente ; para $m > -1$, absolutamente convergente ;
j) Para $\alpha \leq 0$, divergente ; para $\alpha > 0$, absolutamente convergente ; **k)** Para $\alpha \leq 0$ ou $\beta \leq 0$, divergente ; para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, absolutamente convergente .

48 - Divergente.

49 - **a)** 4 ; **b)** Divergente ; **c)** Divergente .

50 - **a)** Absolutamente convergente ; **b)** Para $\beta \leq -2$, divergente ; para $-2 < \beta < -1$, absolutamente convergente ; para $-1 \leq \beta < 0$, simplesmente convergente ; para $\beta \geq 0$, divergente .

51 - A validade do resultado para $a = +\infty$, pressupõe a convergência do integral impróprio.

52 - Por exemplo, $lim \int_0^n cos\, \pi x \;\, dx = 0$ e não existe $\int_0^{+\infty} cos\, \pi x \;\, dx$.

53 - **a)** $B(3/2\,,\,1/2) = \pi/2$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $B(1/2\,,\,1/2) = \pi$, $\Gamma(9/2) = \dfrac{105\sqrt{\pi}}{16}$;

b) 1 .

CAPÍTULO III

SUCESSÕES E SÉRIES DE FUNÇÕES

1. Convergência ponto a ponto e convergência uniforme

Considerem-se as funções $f_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$. Para cada $x \in A$, $f_n(x)$ é uma sucessão de termos reais e poderá ou não existir $\lim f_n(x)$.

Sendo $B \subseteq A$ um conjunto não vazio de reais x para os quais exista finito $\lim f_n(x)$ considere-se a função $f(x) = \lim f_n(x)$ com domínio em B. Diz-se então que a sucessão de funções $f_n(x)$ *converge ponto a ponto* (ou *converge pontualmente*) para a função $f(x)$ no conjunto B ; ou seja, $f_n(x)$ *converge ponto a ponto* para $f(x)$ em B se e só se é verificada a seguinte condição,

$$\forall\ \delta > 0 \ \wedge\ x \in B \ ,\ \exists\ n_\delta(x) \ :\ n > n_\delta(x) \ \Rightarrow\ |\, f_n(x) - f(x)\,| < \delta \ .$$

Se, na condição precedente, a ordem $n_\delta(x)$ puder ser encontrada de forma a não depender do $x \in B$ considerado , a convergência de $f_n(x)$ para $f(x)$ em B diz-se *uniforme* ; ou seja, $f_n(x)$ *converge uniformemente* para $f(x)$ em B se e só se é verificada a seguinte condição,

$$\forall\ \delta > 0 \ ,\ \exists\ n_\delta \ :\ n > n_\delta \ \wedge\ x \in B \ \Rightarrow\ |\, f_n(x) - f(x)\,| < \delta \ .$$

Claro que convergência uniforme implica convergência ponto a ponto, mas a inversa não é verdadeira como mostra o exemplo seguinte. Sendo $f_n(x) = x^n$ para $x \in \mathbf{R}$, tem-se,

$$\forall\ x \in\ ]-1\,,\,1] \ ,\ \lim\ f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ -1 < x < 1 \\ 1 & ,\ x = 1 \end{cases} \ ,$$

verificando-se, portanto, a convergência ponto a ponto da sucessão de funções $f_n(x)$ para $f(x)$ no intervalo $]-1\,,\,1]$. No entanto, a ordem a partir da qual se tem $|\, f_n(x) - f(x)| < \delta$ depende de forma inultrapassável do $x \in\ ]-1\,,\,1]$ considerado, não sendo portanto uniforme a convergência; com efeito, tomando por exemplo $\delta = 1/2$, para qualquer ordem n que se fixe, há sempre valores $x \in\ ]-1\,,\,1]$ tais que $|\, f_n(x) - f(x)| = |\, x^n\,| \geq 1/2$, bastando para tal tomar valores de x com módulo suficientemente próximo da unidade.

No teorema seguinte apresenta-se uma condição necessária e suficiente de convergência uniforme:

Teorema 1 : *Dada a sucessão de funções $f_n(x)$ todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, a condição necessária e suficiente para que a sucessão convirja uniformemente para $f(x)$ em $B \subseteq A$ é que tenha limite nulo a seguinte sucessão :* $\lambda_n = Sup\ \{\, |\, f_n(x) - f(x)| \ :\ x \in B\}$

Demonstração : A condição é necessária. Se $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $B \subseteq A$, tem-se,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta\ :\ n > n_\delta \wedge\ x \in B\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \delta/2\ ;$$

então, para $n > n_\delta$,

$$|\ \lambda_n\ | = \lambda_n = Sup\ \{\ |f_n(x) - f(x)|\ \ :\ x \in B\}\ \leq \delta/2\ < \delta\ ,$$

ou seja, por definição de limite de uma sucessão, tem-se que $lim\ \lambda_n = 0$.

A condição é suficiente. Se $lim\ \lambda_n = 0$, então,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta\ :\ n > n_\delta \Rightarrow |\ \lambda_n\ | = \lambda_n = Sup\ \{\ |f_n(x) - f(x)|\ \ :\ x \in B\} < \delta\ ,$$

e, portanto, por ser $|f_n(x) - f(x)| \leq\ Sup\ \{\ |f_n(x) - f(x)|\ \ :\ x \in B\}$ para todo o $x \in B$, tem-se,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta\ :\ n > n_\delta \wedge\ x \in B\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \delta\ \ ,$$

condição que traduz a convergência uniforme de $f_n(x)$ para $f(x)$ em $B\ \subseteq\ A$.

Uma outra condição necessária e suficiente de convergência uniforme, consta do teorema seguinte :

Teorema 2 : *Dada a sucessão de funções $f_n(x)$ todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, a condição necessária e suficiente para que a sucessão convirja uniformemente para certa $f(x)$ em $B \subseteq A$ é que,* $\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta\ :\ n > m > n_\delta \wedge\ x \in B\ \Rightarrow\ |\ f_n(x) - f_m(x)| < \delta$

Demonstração : A condição é necessária . Admita-se que $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $B \subseteq A$. Tem-se ,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta\ :\ n > n_\delta \wedge\ x \in B\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \delta/2\ \ .$$

Então, para $n > m > n_\delta$ e $x \in B$, tem-se,

$$|\ f_n(x) - f_m(x)| \leq\ |\ f_n(x) - f(x)|\ \ + |\ f(x) - f_m(x)|\ <\ \delta/2 + \delta/2 = \delta\ ,$$

assim se provando que a condição é necessária.

A condição é suficiente. Admita-se verificada a condição do enunciado, a qual implica que, para cada $x \in B$, existe finito $f(x) = lim\ f_n(x)$. Assim se conclui que $f_n(x)$ converge ponto a ponto para certa função $f(x)$ em B . Resta provar que a convergência é uniforme. Dado um qualquer $\delta > 0$, determine-se a ordem n_δ tal que, para $n > m > n_\delta$ e qualquer $x \in B$ se tem, $|\ f_n(x) - f_m(x)|\ < \delta/2$; então, para $m > n_\delta$ e $n = m + k$ ($k =$ 1 , 2 , ...) e qualquer $x \in B$, tem-se,

$$| f_m(x) - f(x)| \leq | f_m(x) - f_{m+k}(x)| + | f_{m+k}(x) - f(x)| <$$

$$< \delta/2 + | f_{m+k}(x) - f(x)| ;$$

por ser, para cada $x \in B$, $\lim\limits_{k \to +\infty} f_{m+k}(x) = f(x)$, resulta que,

$$\lim_{k \to +\infty} | f_{m+k}(x) - f(x)| = 0 ,$$

concluindo-se então que, $| f_m(x) - f(x)| \leq \delta/2 < \delta$, para $m > n_\delta$ e qualquer $x \in B$, ou seja, a sucessão $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ no conjunto B .

2. Continuidade da função limite

Admitamos que a sucessão de funções $f_n(x)$ todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ converge uniformemente para $f(x)$ em certo $B \subseteq A$. Veremos seguidamente que, sendo as funções $f_n(x)$ contínuas em B , então a função limite $f(x)$ é igualmente contínua em B . O teorema respectivo será enunciado e demonstrado para o caso em que $B = A$, por mera conveniência de notação, mas nos termos de um corolário imediato o resultado generaliza-se ao caso em que $B \subseteq A$.

Teorema 3 : *Sendo $f_n(x)$ uma sucessão de funções todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, contínuas em $a \in A$, então, se a sucessão $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em A , também $f(x)$ é função contínua em $a \in A$; em particular, se as funções $f_n(x)$ são contínuas em A , o mesmo sucede com $f(x)$*

Demonstração : Pela convergência uniforme de $f_n(x)$ em A , tem-se,

$$\forall\ \delta > 0 ,\ \exists\, n_\delta : n > n_\delta \wedge x \in A \Rightarrow | f_n(x) - f(x)| < \delta/3 .$$

Como por hipótese a função $f_{n_\delta+1}(x)$ é contínua em $x = a$, ou seja, existe $\varepsilon_\delta > 0$ tal que,

$$| x - a | < \varepsilon_\delta \wedge x \in A \Rightarrow | f_{n_\delta+1}(x) - f_{n_\delta+1}(a)| < \delta/3 ,$$

resulta então, para $| x - a | < \varepsilon_\delta$ e $x \in A$,

$$\begin{aligned} | f(x) - f(a)| &\leq | f(x) - f_{n_\delta+1}(x)| + | f_{n_\delta+1}(x) - f_{n_\delta+1}(a)| + \\ &+ | f_{n_\delta+1}(a) - f(a)| < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta , \end{aligned}$$

ou seja, $f(x)$ é função contínua em a . Como o argumento precedente se pode aplicar a qualquer $a \in A$ onde as funções $f_n(x)$ sejam contínuas, resulta a segunda parte do teorema.

Corolário : *Sendo $f_n\,(x)$ uma sucessão de funções todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, contínuas em $B \subseteq A$, então, se a sucessão $f_n\,(x)$ converge uniformemente para $f\,(x)$ em B, também $f\,(x)$ é função contínua neste mesmo conjunto*

Demonstração : Basta aplicar o teorema à sucessão das restrições das $f_n\,(x)$ a B.

3. Aplicação ao caso das séries de funções reais de variável real

Considere-se agora o caso de uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$ de funções $f_n\,(x)$ todas de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$. Para cada $x \in A$ a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$ é uma série real , convergente ou divergente ; a convergência da série equivale como se sabe à convergência da respectiva sucessão associada $S_n(x) = f_1\,(x) + f_2(x) + \;...\; + f_n(x)$ e, a verificar-se, tem-se,

$$f\,(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x) = lim\; S_n(x).$$

Seja B um conjunto de pontos $x \in A$ para os quais exista finita a soma $f\,(x)$ da série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$, ou seja, um conjunto de pontos $x \in A$ para os quais a sucessão $S_n(x)$ tenha limite finito; diz-se então que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$ *converge ponto a ponto* para $f\,(x)$ em B ; ou seja, a convergência ponto a ponto da série em B equivale à convergência ponto a ponto da respectiva sucessão associada $S_n\,(x)$ no mesmo conjunto. No caso de a convergência de $S_n\,(x)$ para $f\,(x)$ ser uniforme em B , diz-se também que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$ *converge uniformemente* para $f\,(x)$ em B .

Os critérios de convergência uniforme estudados para as sucessões de funções podem portanto ser aplicados para estudar a convergência uniforme das séries de funções (basta aplicar tais critérios às respectivas sucessões associadas). No entanto, a partir da condição necessária e suficiente constante do teorema 2 podem enunciar-se critérios de aplicação directa no estudo da convergência uniforme de uma série de funções.

Teorema 4 : *Dada a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$, com as $f_n\,(x)$ funções de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$, a condição necessária e suficiente para que a série convirja uniformemente para certa $f\,(x)$ no conjunto B é que,*

$$\forall\; \delta > 0\,,\; \exists\; n_\delta \;:\; n > m > n_\delta \wedge x \in B \Rightarrow |\, f_{m+1}\,(x) + f_{m+2}\,(x) + \;...\; + f_n\,(x)| < \delta$$

Demonstração : A convergência uniforme da série de funções $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\,(x)$ para certa função $f\,(x)$ em B equivale à convergência uniforme da sucessão associada,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \ ,$$

para a mesma função $f(x)$ no conjunto B ; pelo teorema 2, para que tal aconteça é necessário e suficiente que,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta\ :\ n > m > n_\delta \wedge\ x \in B\ \Rightarrow\ |\,S_n(x) - S_m(x)\,| < \delta\ \ ,$$

mas por ser $S_n(x)$ - $S_m(x) = f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x)$, resulta de imediato a condição do enunciado que é assim necessária e suficiente para que a série de funções reais $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ convirja uniformemente para certa $f(x)$ no conjunto B .

O teorema precedente é de difícil aplicação prática, pelo que é conveniente deduzir dele algumas condições suficientes de convergência uniforme de mais simples utilização. Assim:

Teorema 5 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$, *com as* $f_n(x)$ *funções de* $A \subseteq \mathbf{R}$ *em* $\mathbf{R}$ *, uniformemente convergente para certa função* g(x) *no conjunto* $B \subseteq A$ *, também* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *é uniformemente convergente para certa função* $f(x)$ *no mesmo conjunto*

<u>Demonstração</u> : Por ser,

$$|\,f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x)| \ \leq\ |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)| =$$

$$= |\ |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)|\ |\ ,$$

e como a convergência uniforme da série dos módulos equivale a ser,

$$\forall\,\delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta : n > m > n_\delta \wedge x \in B \Rightarrow\ |\ |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)|\ | =$$

$$= |f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)| < \delta\ ,$$

conclui-se também que,

$$\forall\,\delta > 0\ ,\ \exists\ n_\delta :\ n > m > n_\delta \wedge x \in B \Rightarrow |\ f_{m+1}(x)\ +\ f_{m+2}(x)\ +\ \ldots\ +\ f_n(x)\ | < \delta\ ,$$

condição que, de acordo com o teorema 4, garante o convergência uniforme da série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ no conjunto B .

Teorema 6 : *Dada a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$, *com as* $f_n(x)$ *funções de* $A \subseteq \mathbf{R}$ *em* $\mathbf{R}$ *, se a partir de certa ordem* k *(fixa, não dependente de* $\underline{x}$ *) se tiver, para qualquer* $x \in B$ *,* $|f_n(x)| \leq a_n$ *e se a série real de termos positivos* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for convergente, então as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *são ambas uniformemente convergentes em B* (Critério de Weierstrass)

Demonstração : Para $n > m > k$,

$$|f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)| \leq a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n \quad ,$$

qualquer que seja $x \in B$. Como por hipótese a série de números reais positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente , dado $\delta > 0$, existe uma ordem n_δ tal que , para $n > m > n_\delta$,

$$|\, a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n \,| = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n < \delta \,;$$

evidentemente que a ordem n_δ depende apenas de δ, já que os termos a_n não dependem de x . Sendo $n_\delta' = Máx\,\{ n_\delta , k \}$, tem-se para $n > m > n_\delta'$ e qualquer $x \in B$,

$$|f_{m+1}(x)| + |f_{m+2}(x)| + \ldots + |f_n(x)| < \delta ,$$

condição que , de acordo com o teorema 4, garante a convergência uniforme da série $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|$ no conjunto B ; o teorema 5 garante por sua vez que também a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente no mesmo conjunto.

Quanto à continuidade da soma da série tem-se o seguinte :

Teorema 7 : *Se as funções* $f_n(x)$ *forem contínuas em* $a \in A$ *e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *for uniformemente convergente para* $f(x)$ *em A, então também* $f(x)$ *é função contínua em* $a \in A$ *; em particular, se as funções* $f_n(x)$ *são contínuas em A, o mesmo sucede com* $f(x)$

Demonstração : Basta notar que, nas condições do enunciado, a sucessão de funções contínuas,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) ,$$

converge uniformemente para a soma da série $f(x)$ e aplicar o teorema 3

Corolário : *Se as funções* $f_n(x)$ *forem contínuas no conjunto* $B \subseteq A$ *e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *for uniformemente convergente para* $f(x)$ *em B, então também* $f(x)$ *é função contínua neste mesmo conjunto*

Demonstração : Basta aplicar o teorema à série das restrições das $f_n(x)$ a B

4. Aplicação às séries de potências

Relativamente ao estudo efectuado no ponto anterior, um caso particular importante é o da série de potências em **R** , ou seja, a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n} \ ,$$

em que a_n e a são números reais, x é variável real e p_n é o termo geral de uma sucessão estritamente crescente de números inteiros não negativos.

Sabemos já que a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n}$ é convergente para x pertencente a certo intervalo I , o qual pode ser: **i)** aberto, $I =]-\infty , +\infty[$ ou $I =]\, a\text{-}\lambda , a\text{+}\lambda\, [$; **ii)** semi-aberto, $I =]\, a\text{-}\lambda , a\text{+}\lambda\,]$ ou $I = [\, a\text{-}\lambda , a\text{+}\lambda\, [$; **iii)** fechado, $I = [\, a\text{-}\lambda , a\text{+}\lambda\,]$.

Sabe-se também que a série de potências referida é absolutamente convergente nos pontos interiores do intervalo I , podendo ainda sê-lo nas respectivas extremidades $x = a \pm \lambda$, devendo porém notar-se que quando tal acontece a convergência não pode ser absoluta apenas numa das extremidades, dado que as séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \,.\, (a-\lambda-a)^{p_n}| \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \,.\, (a+\lambda-a)^{p_n}| \ ,$$

coincidem termo a termo. Designando por I_0 o intervalo de convergência absoluta, tem-se $I_0 \subseteq I$ e no caso de ser $I_0 \neq I$ a série é simplesmente convergente em pelo menos uma das extremidades $x = a \pm \lambda$.

Para cada $x \in I$ (x pertencente a intervalo de convergência da série de potências), seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n} \ .$$

Tem-se então que a série de potências converge ponto a ponto no intervalo I para a função $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n}$. Os teoremas seguintes tratam da questão da eventual convergência uniforme da série de potências para a função $f(x)$ referida.

Teorema 8 : *Dada a série de potências em* **R** *,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n} \,,$$

seja I_0 *o respectivo intervalo de convergência absoluta. Então:*

a) *Se* $I_0 = [\, a\text{-}\lambda \,,\, a\text{+}\lambda \,]$ *, a série é uniformemente convergente em* I_0 *;*

b) *Se* $I_0 = \,]\text{-}\infty \,,\, +\infty\,[$ ou $I_0 = \,]\, a\text{-}\lambda \,,\, a\text{+}\lambda \,[$ *, a série é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado contido em* I_0

<u>Demonstração</u> : No caso da alínea a) , tem-se para $n \geq 1$,

$$x \in [\, a\text{-}\lambda \,,\, a\text{+}\lambda \,] \;\Rightarrow\; |\; a_n \,.\, (x-a)^{p_n} \,| \;\leq\; |\; a_n \,.\, (\lambda\,)^{p_n} \,| \;,$$

e por ser convergente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n \,.\, (\lambda\,)^{p_n}|$, dado ser absolutamente convergente a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n}$ para $x = a \pm \lambda$, o critério de Weierstrass (teorema 6) permite tirar a conclusão desejada : a série de potências é uniformemente convergente em I_0 .

No caso da alínea b) , considere-se um intervalo $K = [m_1 \,,\, m_2]$ limitado e fechado contido em $I_0 = \,]\text{-}\infty \,,\, +\infty\,[$ ou $I_0 = \,]\, a\text{-}\lambda \,,\, a\text{+}\lambda \,[$. Como m_1 e m_2 pertencem ao intervalo aberto I_0 , existe portanto um real $r > 0$ tal que ,

$$K = [\, m_1 \,,\, m_2] \subseteq [a - r \,,\, a + r] \subset I_0 \,,$$

e como a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, (x-a)^{p_n}$ é absolutamente convergente em $[a - r \,,\; a + r]$, raciocinando como no caso da alínea a) - com utilização do intervalo fechado $[a - r \,,\; a + r]$ em vez do intervalo $[\, a\text{-}\lambda \,,\, a\text{+}\lambda \,]$ então utilizado - , conclui-se que a convergência é uniforme em $[a - r \,,\; a + r]$ sendo-o portanto também em qualquer subconjunto deste intervalo como é o caso do intervalo K .

O resultado da alínea b) do teorema precedente pode ser melhorado quando uma ou ambas as extremidades $x = a \pm \lambda$ do intervalo de convergência absoluta sejam pontos de convergência simples da série de potências. A demonstração do teorema seguinte, que trata desta questão, pressupõe a utilização da desigualdade de Abel que passamos a apresentar.

Dados os números reais a_i , b_i $(i = 1, 2, \ldots \,, n\,)$ tem-se a seguinte igualdade:

$a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots + \; a_n\, b_n \;= (a_1 \text{ - } a_2\,).\, b_1 + (a_2 \text{ - } a_3\,).\, (\, b_1 + b_2\,) +$

$$+ (a_3 - a_4) . (b_1 + b_2 + b_3) + \ldots + (a_n - 0) . (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) .$$

Com efeito, como a parcela genérica do primeiro membro é $a_i\, b_i$, a igualdade fica demonstrada se se provar que os termos com b_i no segundo membro somam precisamente $a_i\, b_i$. Ora, no segundo membro , a primeira parcela onde figura b_i é $(a_i - a_{i+1}) . (b_1 + b_2 + \ldots + b_i)$ e em todas as parcelas seguintes figura sempre b_i ; então o coeficiente de b_i no segundo membro é precisamente,

$$(a_i - a_{i+1} + a_{i+1} - a_{i+2} + \ldots + a_{n-1} - a_n + a_n) = a_i ,$$

como se pretendia demonstrar.

A partir da igualdade obtida, vamos estabelecer a desigualdade de Abel. Quando os a_1 , a_2 , ... , a_n sejam números não negativos decrescentes , ou seja, $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$, sendo k tal que,

$$| b_1 | \leq k \ , \ | b_1 + b_2 | \leq k \ , \ \ldots \ , \ | b_1 + b_2 + \ldots + b_n | \leq k \ ,$$

obtém-se a partir da igualdade previamente demonstrada :

$$| a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n | \leq (a_1 - a_2) . | b_1 | + (a_2 - a_3) . | b_1 + b_2 | +$$

$$+ (a_3 - a_4) . | b_1 + b_2 + b_3 | + \ldots + (a_n - 0) . | b_1 + b_2 + \ldots + b_n | \leq$$

$$\leq (a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{n-1} - a_n + a_n) . k \ ,$$

ou seja, $| a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n | \leq k\, a_1$, que é a desigualdade de Abel a utilizar na demonstração do teorema seguinte.

Ainda tendo em vista facilitar a demonstração do mesmo teorema note-se previamente que, se a série de potências,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \, . \, (x - a)^{p_n} \ ,$$

1) Convergir uniformemente em qualquer intervalo fechado $[b\, , a+\lambda]$ contido em $]a-\lambda \ , \ a+\lambda]$, tal é suficiente para garantir a respectiva convergência uniforme em qualquer intervalo limitado e fechado contido neste último intervalo. Com efeito, qualquer intervalo K limitado e fechado contido em $]\, a-\lambda \ , \ a+\lambda]$ está também contido em certo $[b\, , a+\lambda]$ com $a-\lambda < b < a+\lambda$ e a suposta convergência uniforme da série em $[b \ , \ a+\lambda]$ implica a convergência uniforme em qualquer subconjunto deste intervalo, como é o caso do intervalo K ;

2) Do mesmo modo se a dita série convergir uniformemente em qualquer intervalo fechado $[a-\lambda \ , \ b]$ contido em $[a-\lambda \ , \ a+\lambda[$, tal é suficiente para garantir a respectiva convergência uniforme em qualquer intervalo limitado e fechado contido neste último intervalo.

Teorema 9 : *Dada a série de potências em* **R** *,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-a)^{p_n} \ ,$$

seja I_0 *o seu intervalo de convergência absoluta da série. Sendo* $I_0 = \,]\, a-\lambda \,,\, a+\lambda \,[$ *:*

a) *Se a série de potências for simplesmente convergente em* $x = a + \lambda$ *, então é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado contido no intervalo* $]\, a-\lambda \,,\, a+\lambda \,]$ *;*

b) *Se a série de potências for simplesmente convergente em* $x = a - \lambda$ *, então é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado contido em* $[\, a-\lambda \,,\, a+\lambda \,[$ *;*

c) *Se a série de potências for simplesmente convergente em* $x = a - \lambda$ *e em* $x = a+\lambda$ *, então é uniformemente convergente em* $[\, a-\lambda \,,\, a+\lambda \,]$

Demonstração : **a)** Considere-se o intervalo $]\, a \,,\, a + \lambda]$ e vejamos que neste intervalo a convergência é uniforme. Fazendo,

$$\varepsilon_n = \left[\ \frac{x-a}{\lambda}\ \right]^{p_n} \ ,$$

tem-se, para $a < x \leq a + \lambda$, $1 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \ldots \geq \varepsilon_n \geq \ldots > 0$. Como por hipótese a série de potências é convergente para $x = a+\lambda$, então dado um qualquer $\delta > 0$, existe uma ordem n_δ tal que , para $n > m > n_\delta$,

$$\begin{aligned}
&| a_{m+1} \lambda^{p_{m+1}} | < \delta/2 \\
&| a_{m+1} \lambda^{p_{m+1}} + a_{m+2} \lambda^{p_{m+2}} | < \delta/2 \\
&\ldots \\
&| a_{m+1} \lambda^{p_{m+1}} + a_{m+2} \lambda^{p_{m+2}} + \ldots + a_n \lambda^{p_n} | < \delta/2 \, .
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Abel podemos pois escrever, para $n > m > n_\delta$,

$$| a_{m+1} \lambda^{p_{m+1}} \varepsilon_{m+1} + a_{m+2} \lambda^{p_{m+2}} \varepsilon_{m+2} + \ldots + a_n \lambda^{p_n} \varepsilon_n | \leq (\delta/2) \, . \, \varepsilon_{m+1} < \delta \ ,$$

ou seja, substituindo os ε_i pelos respectivos valores,

$$| a_{m+1} (x-a)^{p_{m+1}} + a_{m+2} (x-a)^{p_{m+2}} + \ldots + a_n (x-a)^{p_n} | < \delta \ ,$$

para qualquer $x \in \,]\, a \,,\, a + \lambda]$. De acordo com o teorema 4 pode pois concluir-se que a série de potências é uniformemente convergente em $]\, a \,,\, a+\lambda \,]$. A afirmação da alínea a) do enunciado prova-se agora imediatamente. Nos termos das considerações que imediatamente precedem o enunciado do teorema bastará provar que a convergência é uniforme em qualquer intervalo fechado $[\, b \,,\, a+\lambda]$ contido em $]\, a-\lambda \,,\, a+\lambda]$: ora sendo $a < b \leq a+\lambda$, o intervalo $[\, b \,,\, a+\lambda]$ está contido no intervalo de convergência uniforme $]\, a \,,\, a + \lambda]$ e a conclusão é imediata ; caso se tenha $a - \lambda < b \leq a$, tem-se convergência uniforme no intervalo $[b\ ,\ a]$ [por ser um intervalo limitado e fechado contido no intervalo de convergência absoluta - ver teorema 8, alínea b) -] e também no intervalo $]\ a\ ,\ a+\lambda]$, facilmente se concluindo que a convergência é também uniforme em,

$$[\ b\ ,\ a{+}\lambda] = [b\ ,\ a]\ \cup\ ]\ a\ ,\ a+\lambda]\ .$$

b) A demonstração é semelhante à da alínea a), começando-se por provar que a convergência é uniforme no intervalo $[\ a - \lambda\ ,\ a[$, o que se consegue fazendo,

$$\varepsilon_n = [\ \frac{a-x}{\lambda}\ ]^{p_n}\ ,$$

para $a- \lambda \leq x < a$ e utilizando a desigualdade de Abel tal como se fez na alínea a).

c) O resultado é consequência imediata do demonstrado nas alíneas anteriores : a convergência é uniforme em $[a\ ,\ a{+}\lambda]$ - alínea a) - e no intervalo $[a{-}\lambda\ ,\ a]$ - alínea b) - , logo também o é em, $[\ a{-}\lambda\ ,\ a{+}\lambda\ ] = [a{-}\lambda\ ,\ a]\ \cup\ [\ a\ ,\ a{+}\lambda]$.

Por uma questão de sistematização podemos reunir num só enunciado os resultados estabelecidos nos teoremas 8 e 9 .

Teorema 10 : *Dada a série de potências em* **R** *,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ .\ (x-a)^{p_n}\ ,$$

seja I o respectivo intervalo de convergência (simples ou absoluta). A série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado contido em I

<u>Demonstração</u> : Representando por I_0 o intervalo de convergência absoluta da série de potências,

a) Se for $I = I_0$, o teorema 8 assegura a conclusão;

b) Se o intervalo I incluir qualquer das respectivas extremidades (ou ambas), como pontos de convergência simples da série de potências, o teorema 9 assegura igualmente a conclusão.

A partir do teorema 10 e tendo em conta o corolário do teorema 7, podemos portanto enunciar,

Teorema 11 : *Dada a série de potências* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ .\ (x-a)^{p_n}$ *e representando por* I *o respectivo intervalo de convergência, a função real de variável real,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ .\ (x-a)^{p_n}\ ,$$

é contínua no intervalo I onde é definida

<u>Demonstração</u> : A série de funções,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-a)^{p_n} ,$$

converge ponto a ponto no intervalo I para a função,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-a)^{p_n} ,$$

e, por outro lado, o teorema 10 assegura que a convergência é uniforme em qualquer intervalo limitado e fechado contido em I . Dado um qualquer $c \in I$, três casos se podem dar :

a) O ponto c pertence ao interior de I e nesse caso pertence ao interior de certo intervalo K limitado e fechado contido em I . A convergência uniforme da série em K garante a continuidade de $f(x)$ em K (corolário do teorema 7) , logo $f(x)$ é contínua em $x = c$;

b) Caso seja $c = a + \lambda$ a série é uniformemente convergente no intervalo $[a\ ,\ a+\lambda]$ sendo então $f(x)$ contínua nesse intervalo e portanto contínua à esquerda em $a + \lambda$;

c) Caso seja $c = a - \lambda$ a série é uniformemente convergente no intervalo $[a-\lambda\ ,\ a]$ sendo então $f(x)$ contínua nesse intervalo e portanto contínua à direita em $a - \lambda$.

O que antecede é suficiente para garantir a continuidade de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-a)^{p_n}$ no intervalo I onde a série converge .

A continuidade lateral da função soma da série nas extremidades do intervalo de convergência (quando neles a série convirja) será adiante utilizada para justificar o alargamento da validade de um desenvolvimento em série a uma ou ambas as extremidades do intervalo de convergência da série a partir da respectiva validade no interior do intervalo. Assim, admitindo que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-a)^{p_n} \quad \text{para } x \in \,]\, a - \lambda , a + \lambda \,[\ ,$$

suponha-se por exemplo que a série converge também para $x = a + \lambda$. Representando a soma da série de potências por $f(x)$ esta função é contínua no intervalo $]\, a - \lambda , a + \lambda\,]$ e, portanto,

$$\lim_{x \to a+\lambda-0} f(x) = f(a+\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (\lambda)^{p_n} \ ;$$

caso a função $g(x)$ seja definida em $a + \lambda$ e contínua à esquerda neste ponto, tem-se, por ser $f(x) = g(x)$ em $]\, a - \lambda , a + \lambda\, [$,

$$g(a+\lambda) = \lim_{x \to a+\lambda-0} g(x) = \lim_{x \to a+\lambda-0} f(x) = f(a+\lambda) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (\lambda)^{p_n} ,$$

assim se concluindo que o desenvolvimento $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (x-a)^{p_n}$ vale igualmente para $x = a + \lambda$. Idênticas considerações são válidas quando a série converge também para $x = a - \lambda$ e a função desenvolvida $g(x)$ é contínua à direita neste ponto.

5. Derivação e primitivação termo a termo

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ uma série de funções reais de variável real todas definidas em certo intervalo não degenerado I e tais que para todo o $x \in I$ a série converge e tem por soma $F(x)$. Admita-se que as funções $F_n(x)$ são deriváveis no intervalo I e representem-se por $f_n(x)$ as respectivas derivadas. Em tudo o que segue, designaremos $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ por *série das primitivas* e $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ por *série das derivadas* .

Sendo como se disse $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ em I , poderá obter-se a derivada de $F(x)$ nesse intervalo derivando a série termo a termo, como se fosse uma soma ordinária ? Por outras palavras, de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ para $x \in I$, poderá deduzir-se,

$$f(x) = F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \quad , \text{para } x \in I \, ,$$

em que $f_n(x) = F'_n(x)$? Em geral, a resposta é negativa, mas vamos ver no teorema seguinte que, verificadas certas condições, se pode obter uma resposta positiva à questão formulada.

Teorema 12 : *A derivada de* $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ *no intervalo I (onde evidentemente se supõe esta série convergente) pode obter-se derivando essa série termo a termo, desde que nesse intervalo a série das derivadas seja uniformemente convergente*

Demonstração : Tome-se um qualquer $c \in I$ e represente-se por $S_n(x)$ a soma dos n primeiros termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$. Com $m > n$, tem-se,

$$S_m(x) - S_m(c) = S_n(x) - S_n(c) + \left[\, F_{n+1}(x) + \dots + F_m(x) - F_{n+1}(c) - \dots - F_m(c) \right] ,$$

e como $F_{n+1}(x) + \dots + F_m(x)$ admite derivada finita em todos os pontos do intervalo I (é uma soma ordinária de funções deriváveis), o teorema de Lagrange permite escrever para

$x \neq c$ e $x \in I$,

$$S_m(x) - S_m(c) = S_n(x) - S_n(c) + (x - c).[\, f_{n+1}(x^*) + \ldots + f_m(x^*)] \ ,$$

com x^* entre c e x . Fazendo na igualdade anterior $m \to +\infty$ (com n fixo), obtém-se, $F(x) - F(c) = S_n(x) - S_n(c) + (x - c).\ \alpha_n(x)$, em que, para $x \neq c$,

$$\alpha_n(x) \ = \ \lim_{m \to +\infty} \ [\, f_{n+1}(x^*) + \ldots + f_m(x^*)] \ = \ \frac{F(x) - F(c) - S_n(x) + S_n(c)}{x - c} \ .$$

Como a série das derivadas é por hipótese uniformemente convergente no intervalo I , então, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $n(\delta)$, exclusivamente dependente de δ, tal que,

$$m > n > n(\delta) \ \wedge \ x \in I \ \Rightarrow \ |\, f_{n+1}(x) + \ldots + f_m(x)\, | < \delta/3 \ ,$$

donde se tira, passando ao limite quando $m \to +\infty$ (com n fixo) ,

$$n > n(\delta) \ \wedge \ x \in I \ \Rightarrow \ |\ \alpha_n(x)\, | \leq \delta/3 \ ;$$

e também, representando por $f(x)$ a soma da série das derivadas e por $s_n(x)$ a soma dos n primeiros termos desta série,

$$n > n(\delta) \ \wedge \ x \in I \ \Rightarrow \ |\, f(x) - s_n(x)\, | \leq \delta/3 \ .$$

Notando agora que $S'_n(x) = s_n(x)$, para cada n , tem-se,

$$\frac{S_n(x) - S_n(c)}{x - c} \ = \ s_n(x) + \beta_n(x) \ , \ \text{com} \ \lim_{\substack{x \to c \\ x \in I}} \ \beta_n(x) = 0 \ ;$$

portanto, para o $\delta > 0$ anteriormente fixado , existe um $\varepsilon_n > 0$ tal que,

$$x \in \mathrm{V}_{\varepsilon_n}(c) \cap I \ \Rightarrow \ |\ \beta_n(x)\, | < \delta/3 \ .$$

A igualdade obtida quando se definiu $\alpha_n(x)$, permite agora escrever sucessivamente, para $x \in I$,

$$\frac{F(x) - F(c) - (x - c).\alpha_n(x)}{x - c} \ = \ \frac{S_n(x) - S_n(c)}{x - c} \ = \ s_n(x) + \beta_n(x)$$

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \ = \ s_n(x) + \beta_n(x) + \alpha_n(x)$$

$$\frac{F(x) - F(c)}{x - c} \ - f(c) \ = \ -f(c) + s_n(x) + \beta_n(x) + \alpha_n(x) \ .$$

Fixando agora um particular $k > n(\delta)$, tem-se para $x \in \mathrm{V}_{\varepsilon_k}(c) \cap I$,

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq | s_k(x) - f(c) | + | \beta_k(x) | + | \alpha_k(x) | < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 =$$

$$= \delta \ ,$$

o que prova ser,

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in I}} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = F'(c) = f(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n'(c) \ ,$$

devendo notar-se , por força da condição $x \in I$, que quando c seja uma das extremidades do intervalo I , a derivada encontrada é uma derivada lateral.

Devido à arbitrariedade do $c \in I$ considerado na demonstração, tem-se portanto,

$$F'(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n'(x) \ , \text{ qualquer que seja } x \in I \ .$$

Trata-se seguidamente da questão da primitivação termo a termo de uma série de funções (como se fosse uma soma). Considere-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente no intervalo I de extremidades finitas $a < b$. Sejam $F_n(x)$ particulares primitivas dos termos $f_n(x)$ daquela série. Vamos mostrar em primeiro lugar que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ (série das primitivas), sendo convergente em certo $c \in I$ é uniformemente convergente no intervalo I .

Teorema 13 : *Sendo* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *uniformemente convergente e com soma* $f(x)$ *no intervalo* I *de extremidades (finitas)* $a < b$ *e sendo* $F_n(x)$ *particulares primitivas dos termos* $f_n(x)$ *daquela série , se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ *for convergente em certo* $c \in I$ *, então ela será uniformemente convergente em* I

Demonstração : Fixado um $\delta > 0$ existe uma ordem $n_1(\delta)$ tal que,

$$s > r > n_1(\delta) \ \wedge \ x \in I \ \Rightarrow \ | f_{r+1}(x) + \ldots + f_s(x) | < \delta/2.(b-a) \ ,$$

dado que por hipótese a série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente no intervalo I . Por outro lado, dada a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(c)$, existe uma ordem $n_2(\delta)$ tal que ,

$$s > r > n_2(\delta) \ \Rightarrow \ | F_{r+1}(c) + \ldots + F_s(c) | < \delta/2 \ .$$

Atendendo agora à segunda igualdade utilizada na demonstração do teorema 12, fazendo nela $m = s$ e $n = r$, tem-se,

$$S_s(x) - S_s(c) = S_r(x) - S_r(c) + (x - c).\left[\, f_{r+1}(x^*) \;+\; \dots \;+\; f_s(x^*)\right] ,$$

com x^* entre c e x , donde resulta,

$$|\, S_s(x) - S_r(x) \,| \;\le\; |\, S_s(c) - S_r(c) \,| + |\, x - c \,| \,.\, |\, f_{r+1}(x^*) \;+\; \dots \;+\; f_s(x^*)| \;,$$

ou ainda,

$$|\, F_{r+1}(x) + \dots + F_s(x) \,| \le |\, F_{r+1}(c) + \dots + F_s(c) \,| +$$

$$+ |\, x - c \,| \,.\, |\, f_{r+1}(x^*) + \dots + f_s(x^*)| \,.$$

Tomando $n(\delta) = Máx\ \{n_1(\delta)\ ,\ n_1(\delta)\}$, tem-se então,

$$s > r > n(\delta) \;\wedge\; x \in I \;\Rightarrow |\, F_{r+1}(x) + \dots + F_s(x) \,| < \delta/2 + |\, x - c \,| \,.\delta/2.(b\text{-}a) \le$$

$$\le \delta/2 + (b - a).\delta/2.(b\text{-}a) = \delta \;,$$

o que traduz a convergência uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ no intervalo I .

O teorema precedente, conjugado com o teorema 12, permite agora demonstrar o seguinte,

Teorema 14 : *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *for uniformemente convergente no intervalo limitado* I *, obtém-se uma primitiva de* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *nesse intervalo primitivando a série termo a termo, desde que se tenha o cuidado de tomar para cada termo* $f_n(x)$ *uma primitiva* $F_n(x)$ *de modo que a série das primitivas* $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ *seja convergente em certo ponto* $c \in I$ *. Adicionalmente, a série das primitivas obtida como se indicou é também uniformemente convergente no intervalo* I

Demonstração : Pelo teorema 13, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ construída como se refere no enunciado é uniformemente convergente no intervalo I . Representando por $F(x)$ a respectiva soma, o teorema 12 garante por sua vez que,

$$F'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} F_n'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \;= f(x) \,,$$

porque por hipótese a série das derivadas $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ é uniformemente convergente em I.

Logo, por definição de primitiva, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ é uma primitiva de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ no intervalo I. O teorema está demonstrado.

O teorema precedente admite o seguinte corolário:

Corolário : *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *for uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado contido no intervalo* I *(agora limitado ou não), obtém-se uma primitiva de* $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *nesse intervalo* I *primitivando a série termo a termo, desde que se tenha o cuidado de tomar para cada termo* $f_n(x)$ *uma primitiva* $F_n(x)$ *de modo que a série das primitivas* $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ *seja convergente em certo ponto* $c \in I$

<u>Demonstração</u> : Note-se em primeiro lugar que a série das primitivas $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ é, pelo teorema anterior, uniformemente convergente em qualquer intervalo $[a\,,\,b]$ contido em I e ao qual pertença c. Como qualquer $x \in I$ sempre se pode incluir num intervalo $[a\,,\,b]$ contido em I e ao qual pertença o ponto c, conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ é convergente em qualquer $x \in I$; designando por $F(x)$ a respectiva soma, o teorema anterior garante que esta função é uma primitiva de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ em qualquer intervalo fechado contido em I e ao qual c pertença . Portanto, $F'(x) = f(x)$ em todos os pontos $x \in I$, ou seja, $F(x)$ é uma primitiva de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ no intervalo I, como se queria provar.

<u>**OBSERVAÇÃO IMPORTANTE**</u> **:** Uma forma simples de garantir os cuidados a ter na primitivação de séries termo a termo, ou seja, garantir que a série das primitivas é convergente em certo ponto do intervalo de primitivação, é tomar primitivas que se anulem em certo $c \in I$; procedendo dessa forma, obtém-se uma série das primitivas seguramente convergente para $x = c$, dado que, para esse valor de x, os respectivos termos são todos nulos.

6. <u>Derivação e primitivação termo a termo das séries de potências</u>

Os resultados do ponto anterior podem evidentemente aplicar-se às séries de potências.

Considerem-se as duas seguintes séries de potências, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.(x-a)^{p_n}$ (*série das primitivas*) e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, p_n.(x-a)^{p_n-1}$ (*série das derivadas*) e representem-se por I e J os respectivos intervalos de convergência . Vamos estabelecer algumas importantes relações entre ambos os intervalos :

a) Em primeiro lugar tem-se $J \subseteq I$. Tomando $c \in J$ se for $c = a$, tem-se obviamente $c \in I$. Caso seja $c > a$, a série das derivadas é uniformemente convergente no intervalo $[a\,,\,c]$ e a série das primitivas é convergente para $x = a$. O teorema 13 garante então que a série das primitivas é uniformemente convergente em $[a\,,\,c]$, logo é convergente para $x = c$. No caso de ser $c < a$, o mesmo argumento se aplica, agora no intervalo $[c\,,\,a]$. Em qualquer dos casos a série das primitivas converge para $x = c$, ou seja , $c \in I$. Fica assim provada a desejada inclusão.

Daqui resulta logo que se $J =]-\infty\,,+\infty[$, também $I =]-\infty\,,+\infty[$. E se $I = [a\,,\,a]$, também $J = [a\,,\,a]$.

b) Tome-se agora um ponto $c \in INT.\, I$. A série das primitivas converge absolutamente para $x = c$ e vamos mostrar que também a série das derivadas converge absolutamente para $x = c$. São possíveis três hipóteses: $c = a$, $c > a$ e $c < a$. No caso de ser $c = a$, a conclusão é óbvia. Para os outros dois casos tem-se :

1º Caso : Sendo $c > a$, tem-se $c = a + r$ com $r > 0$. Fixe-se $h > 0$ suficientemente pequeno de forma que $c + h = a + r + h \in INT.\, I$ o que é sempre possível por ser c ponto interior de I . Note-se agora que as séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(r+h)^{p_n}}{h} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{r^{\,p_n}}{h}$$

são ambas absolutamente convergentes , porque são obtidas multiplicando por $1/h$ todos os termos das séries que resultam da série das primitivas fazendo nela, respectivamente, $x = c + h = a + r + h$ e $x = c = a + r$. Então, por força da desigualdade,

$$\left| a_n \cdot \frac{(r+h)^{p_n} - r^{p_n}}{h} \right| \le \left| a_n \cdot \frac{(r+h)^{p_n}}{h} \right| + \left| a_n \cdot \frac{r^{p_n}}{h} \right| ,$$

também converge absolutamente a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(r+h)^{p_n} - r^{p_n}}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{h \,.\, p_n \,.\, (r_n)^{p_n-1}}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, p_n \,.\, (r_n)^{p_n-1} ,$$

com $0 < r < r_n < r + h$ (aplicação do teorema de Lagrange) . Fazendo na série das derivadas $x = c = a + r$ obtém-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, p_n \,.\, r^{p_n-1}$ cujos termos são majorados em módulo pelos correspondentes termos da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, p_n \,.\, (r_n)^{p_n - 1}$ que vimos ser absolutamente convergente. Tal é suficiente para garantir a convergência absoluta da série das derivadas para $x = c > a$.

2º Caso : Sendo $c < a$, tem-se $c' = a + (a - c) > a$ e claro que também $c' \in INT.\, I$. Então a série das derivadas converge absolutamente para $x = c' = a + (a - c)$. Notando que às séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, p_n .(c' - a)^{p_n - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.\, p_n .(c - a)^{p_n - 1} \quad ,$$

corresponde a mesma série dos módulos , conclui-se que a série das derivadas é absolutamente convergente para $x = c < a$.

c) Como consequência de b) sai $INT.\, I \subseteq J$, donde resulta que se $J = [a\,,\,a]$ também $I = [a\,,\,a]$ e ainda , $INT\,.\,(INT\,.\,I\,) = INT\,.\,I \subseteq INT\,.\,J$. Como consequência de a), por seu lado, sai $INT\,.\,J \subseteq INT\,.\,I$. Tem-se então, $INT\,.\,I = INT\,.\,J$, ou seja, os intervalos I e J diferem quando muito pelo facto de uma ou ambas as extremidades pertencerem a um e não a outro. Porém como $J \subseteq I$, as extremidades de J , quando lhe pertençam, pertencem também a I .

Em conclusão :

1) Se $I =]-\infty\,,+\infty\,[$, tem-se $J =]-\infty\,,+\infty\,[$ e inversamente ; também $I = [a\,,\,a]$ se e só se $J = [a\,,\,a]$;

2) No caso em que I e J sejam limitados, as extremidades $a \pm \lambda$ de um são exactamente as do outro, sendo que se tais extremidades pertencem a J também pertencem a I ;

3) Em complemento de 2) refira-se a possibilidade de uma ou ambas as extremidades do intervalo I (de convergência da série das primitivas) não pertencerem ao intervalo J de convergência da série das derivadas, como acontece com a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (1/n).x^n$ que converge para $x \in [-1\,,\,1\,[$, enquanto que a correspondente série das derivadas $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$ não converge para $x = -1$.

As considerações precedentes e o teorema 12 permitem concluir que,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .(x-a)^{p_n} \Rightarrow F'(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . p_n .(x-a)^{p_n - 1} \quad ,$$

qualquer que seja x pertencente ao intervalo J de convergência da série das derivadas, porque qualquer ponto deste intervalo se pode incluir num intervalo de convergência uniforme da série das derivadas. Ou seja, qualquer série de potências pode ser derivada termo a termo no interior do seu intervalo de convergência e, eventualmente, nas respectivas extremidades (derivadas laterais), caso estas pertençam ao intervalo de convergência da série das derivadas.

Vejamos agora o caso da primitivação termo a termo das séries de potências. Dada a série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.(x-a)^{p_n}$, seja J o respectivo intervalo de convergência. Para cada $x \in J$, a série tem por soma,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.(x-a)^{p_n} \ ;$$

como esta série é uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado contido em J, o corolário do teorema 14 permite obter a seguinte primitiva de $f(x)$ em J:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_n+1} \cdot (x-a)^{p_n+1} \ ,$$

sendo esta série obtida por primitivação termo a termo da série dada, tomando primitivas que se anulam em $x = a$.

7. <u>Aplicação no cálculo de soma de séries</u>

Uma aplicação interessante da teoria exposta anteriormente consiste na obtenção da soma de uma série formando por derivação ou primitivação alguma equação que a permita determinar. Vejamos alguns exemplos:

1) Vamos calcular a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\,x^{n-1}$ que é convergente para $-1 < x < 1$.

Representando por $s(x)$ a soma da série, tem-se que a função $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,x^n$ é uma primitiva de $s(x)$ no intervalo $]-1\ ,\ 1[$ e do mesmo modo,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

é uma primitiva de $S(x)$, também no intervalo $]-1\ ,\ 1[$. Então, para $-1 < x < 1$,

$$S(x) = F'(x) = \frac{2\,x.(1-x) + x^2}{(1-x)^2} = \frac{2\,x - x^2}{(1-x)^2}$$

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\,x^{n-1} = S'(x) = \frac{(2-2\,x).(1-x)^2 + 2.(1-x).(2\,x - x^2)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

assim se obtendo a soma da série dada.

2) Vamos em seguida calcular a soma da série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1} \cdot (x-2)^{n+1}$ que é convergente no intervalo $[1\,,3\,[$. Representando por $S(x)$ a soma da série , tem-se por derivação termo a termo,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x-2)^n = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x} \ ,$$

para $1 < x < 3$. Daqui resulta, por primitivação,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (x-2)^{n+1} = -\,log\,(3-x) + k \ , \ \text{para} \ \ x \in]\,1\,,3\,[\ ,$$

com k constante a determinar . Tomando $x = 2$, resulta $S(2) = -\,log\,(\,3-2\,) + k$, donde se tira $k = 0$, por ser $S(2) = -\,log\,(\,3-2\,) = 0$. Tem-se portanto,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (x-2)^{n+1} = -\,log\,(3-x) \quad , \quad \text{para}\ x \in]\,1\,,3\,[\ .$$

Nos termos das considerações feitas logo a seguir ao teorema 11, a convergência em $x = 1$ da série cuja soma se pretende calcular e a continuidade de $g(x) = -\,log\,(\,3-x\,)$ no mesmo ponto permitem concluir que,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (x-2)^{n+1} = -\,log\,(3-x) \quad , \quad \text{para}\ x \in [1\,,3\,[\ .$$

3) Para terminar vamos calcular a soma da série binomial,

$$1 + \binom{\alpha}{1}.x + \binom{\alpha}{2}.x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}.x^{n-1} + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n-1}.x^{n-1} \ ,$$

em que ,

$$\binom{\alpha}{i} = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!} \quad \text{e} \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

e o parâmetro $\alpha \notin \{\,0\,,1\,,2\,,3\,,\ \ldots\,\}$. Note-se que para α inteiro não negativo os coeficientes $\binom{\alpha}{i}$ são nulos para $i > \alpha$ e então a série reduz-se a uma soma ordinária e sabe-se, pela fórmula do binómio de Newton, que

$$1 + \binom{\alpha}{1}.x + \binom{\alpha}{2}.x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{\alpha}.x^{\alpha} = (1+x)^{\alpha} \ , \ \forall\, x \in \mathbf{R} \, .$$

Para valores do parâmetro $\alpha \notin \{\,0\,,1\,,2\,,3\,,\ \ldots\,\}$ tem-se efectivamente uma série com infinitos termos significativos , conduzindo o respectivo estudo aos seguintes resultados (ver exercício 5 a) do Capítulo V do Volume I) :

- Com $\alpha > 0$, a série é absolutamente convergente em $[-1\,,1]$;
- Com $-1 < \alpha < 0$, a série é absolutamente convergente em $]\,-1\,,1\,[$ e simplesmente convergente em $x = 1$;
- Com $\alpha \leq -1$, a série é absolutamente convergente em $]\,-1\,,1\,[$.

Para determinar a soma da série, represente-se por $f(x)$ a respectiva soma para valores $-1 < x < 1$. Tem-se então para estes valores de x ,

$$f(x) = 1 + \binom{\alpha}{1}.x + \binom{\alpha}{2}.x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}.x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n-1}.x^{n-1} ,$$

donde se tira por derivação termo a termo,

$$f'(x) = \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{2}.2x + \cdots + \binom{\alpha}{n-1}.(n-1)\, x^{n-2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n.\binom{\alpha}{n}.x^{n-1} =$$

$$= \alpha . \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1}.x^{n-1} ,$$

e daqui resulta,

$$x . f'(x) = \alpha . \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1}.x^n \;\; ;$$

somando termo a termo esta série com a anterior obtém-se sucessivamente,

$$(1+x) . f'(x) = \alpha . \left[1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} . x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} . x^n \right] =$$

$$= \alpha . \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n} . x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha-1}{n-1} . x^n \right] =$$

$$= \alpha . \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right] . x^n \right] ;$$

como $\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} = \binom{\alpha}{n}$, obtém-se,

$$(1+x) . f'(x) = \alpha . \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} . x^n \right] = \alpha . \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n-1}.x^{n-1} = \alpha . f(x) \;.$$

A igualdade obtida permite concluir que no intervalo $]-1 , 1[$,

$$\left[\frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \right]' = \frac{f'(x) . (1+x)^\alpha - \alpha . (1+x)^{\alpha-1} . f(x)}{(1+x)^{2\alpha}} =$$

$$= \frac{f'(x) . (1+x) - \alpha \; f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0 \;,$$

ou seja, a fracção cuja derivada se achou é constante no intervalo $]-1 , 1[$; portanto o seu valor pode ser determinado fazendo por exemplo $x = 0$,

$$\frac{f(0)}{(1+0)^\alpha} = f(0) = 1 = \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$$

donde se tira

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n-1}.x^{n-1} = (1+x)^\alpha \;, \text{ para } -1 < x < 1$$

Nos termos das considerações feitas logo a seguir ao teorema 11 o resultado obtido vale ainda: **i)** Para $x = -1$ e $x = 1$, quando seja $\alpha > 0$; **ii)** Para $x = 1$, quando seja $-1 < \alpha < 0$.

8. Integração de séries termo a termo

As séries de funções reais de variável real que sejam uniformemente convergentes num intervalo $[a\,,\,b]$ podem ser integradas termo a termo, caso as funções que são termos da série sejam limitadas e integráveis naquele intervalo. É o que se estabelece no teorema seguinte:

Teorema 15 : *Sendo* $f_n(x)$ *funções limitadas e integráveis em* $[a\,,\,b]$ *e sendo a série* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *uniformemente convergente naquele intervalo, então,*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\;dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\;dx$$

Demonstração : Vejamos em primeiro lugar que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é uma função limitada no intervalo $[a\,,\,b]$. Fixado $\delta = 1$, a convergência uniforme da série garante a existência de uma ordem n_1 tal que ,

$$|\sum_{n=1}^{n_1} f_n(x) - f(x)| < 1 \;,\; \forall\, x \in [a\,,\,b]\,.$$

Daqui resulta, para qualquer $x \in [a\,,\,b]$,

$$\sum_{n=1}^{n_1} f_n(x) - 1 < f(x) < \sum_{n=1}^{n_1} f_n(x) + 1\,,$$

e como a função $h(x) = \sum_{n=1}^{n_1} f_n(x)$ é limitada no intervalo em causa (por ser a soma ordinária de funções limitadas no intervalo), conclui-se sem dificuldade que $f(x)$ é igual-mente limitada nesse intervalo.

Vejamos agora que $f(x)$ é integrável em $[a\,,\,b]$. A integrabilidade de cada $f_n(x)$ equivale ao facto de o conjunto X_n dos pontos de descontinuidade de $f_n(x)$ em $[a\,,\,b]$ ter medida à Lebesgue nula. Dado que a união de uma infinidade numerável de conjuntos com medida à Lebesgue nula é ainda um conjunto com medida à Lebesgue nula e como, por outro lado, a convergência uniforme da série implica a continuidade da respectiva soma nos pontos do conjunto,

$$B = [a\,,\,b] - \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\,,$$

conclui-se sem dificuldade que $f(x)$ é integrável no intervalo $[a\,,\,b]$.

Finalmente, provemos a igualdade do enunciado. Dado $\delta > 0$, existe uma ordem $n(\delta)$ tal que,

$$x \in [a\,,\,b] \wedge n > n(\delta) \Rightarrow |\sum_{i=1}^{n} f_i(x) - f(x)| < \delta/(b-a)\,.$$

Então,

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] dx + \int_a^b \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\ dx =$$

$$= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] dx + \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\ dx\ ,$$

donde resulta,

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\ dx \right| = \left| \int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right] dx \right| .$$

Ora sendo $g(x)$ uma função integrável em $[a\ ,\ b]$ conclui-se sem dificuldade que também $|\ g(x)|$ é integrável nesse intervalo e que,

$$\left| \int_a^b g(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |g(x)|\ dx\ .$$

Aplicando este resultado, tem-se,

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\ dx \right| \leq \int_a^b \left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \right| dx <$$

$$< \int_a^b \delta/(b-a)\ dx = \delta,$$

para $n > n(\delta)$. Isto significa que,

$$\int_a^b f(x)\ dx = lim \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\ dx\ ,$$

ou seja, atendendo a que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e considerando a definição de soma de uma série,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx\ ,$$

como queríamos provar.

O teorema que acaba de ser demonstrado admite o seguinte corolário relativo à possibilidade de permutar as operações de integração e de passagem ao limite:

Corolário : *Sendo as funções* $u_n(x)$ *limitadas e integráveis e sendo a sucessão* $u_n(x)$ *uniformemente convergente em* $[a\ ,\ b]$ *, então* $\int_a^b lim\ u_n(x)\ dx = lim \int_a^b u_n(x)\ dx$

<u>Demonstração</u> : Definindo $f_1(x) = u_1(x)$ e $f_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$ $(n \geq 2)$, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ encontra-se nas condições do enunciado do teorema, como se verifica sem dificuldade. Aplicando o teorema a esta série de funções chega-se quase imediatamente à conclusão desejada.

9. Exercícos

1 - Estude a convergência uniforme das seguintes sucessões nos conjuntos indicados:

a) $u_n(x) = \dfrac{n\,x}{n + x^2}$, em $B = \left]-1 , 1\right[$ e em $\mathbf{R}$;

b) $v_n(x) = \dfrac{(n+1)\,x^2 + n}{n\,(x^2 + 1)}$, em $\mathbf{R}$;

c) $w_n(x) = \dfrac{2\,n^2 x^2}{1 + 2\,n^2 x^2}$, em $\left[a , +\infty\right[$;

d) $z_n(x) = \dfrac{2\,n\,x^2 + n\,x + 1}{n\,x + 1}$, em $\left[0 , +\infty\right[$.

2* - Considere que, para cada $n \in \mathbf{N}$, $f_n(x)$ é uma função real de variável real definida e crescente no intervalo $[a , b]$. Admita que a sucessão $f_n(x)$ converge ponto a ponto em $[a , b]$ para certa função $f(x)$ contínua nesse mesmo intervalo. Posto isto,

a) Prove que a função limite $f(x)$ é também crescente no intervalo $[a , b]$;

b) Prove que a convergência de $f_n(x)$ para $f(x)$ é uniforme em $[a , b]$, procedendo sucessivamente como se indica:

- **i)** Em primeiro lugar mostre que , sendo $x_n \in [a , b]$ tal que $\lim x_n = \alpha$, então $\lim f_n(x_n) = f(\alpha)$;

- **ii)** Admita em seguida que a convergência pode não ser uniforme e, tendo em conta o resultado obtido em i), deduza daí uma contradição.

3 - Sendo $u_n(x)$ e $v_n(x)$ sucessões de funções reais, todas com domínio em certo conjunto A (qualquer) , mostre que,

a) Se $u_n(x)$ e $v_n(x)$ convergem uniformemente para, respectivamente, $u(x)$ e $v(x)$ no conjunto $B \subseteq A$, então $u_n(x) + v_n(x)$ converge uniformemente para $u(x) + v(x)$ no mesmo conjunto B ;

b) Se $u_n(x)$ e $v_n(x)$ convergem uniformemente para, respectivamente, $u(x)$ e $v(x)$ no conjunto $B \subseteq A$ e estas funções limite são limitadas, então $u_n(x).\ v_n(x)$ converge uniformemente para $u(x) .\ v(x)$ no mesmo conjunto B ;

c) Através de um exemplo e relativamente ao demonstrado na alínea b), mostre que a condição de as funções limite serem limitadas não pode ser eliminada, sob pena de a convergência poder não ser uniforme.

4 - Estude a convergência uniforme das seguintes séries reais, nos conjuntos indicados:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, em **R** ;

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, em $[-1\,,\,1]$;

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3n+4}{n(n+1)(n+2)} \cdot (x-2)^n$, em $[1\,,\,3]$;

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{n+1}$, em $[-1/2\,,\,1]$.

5 - Justifique que a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n\,x^n}{2^n}$ é uma função contínua no intervalo $]-2\,,\,2\,[$.

6 - Mostre que a soma da série real $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ não é função contínua em $x = 0$. Que conclusão se pode tirar quanto à convergência uniforme da série no intervalo $[-1/2\,,\,1/2]$? Justifique.

7 - Considere a sucessão de funções reais de variável real,

$$f_n(x) = n \;.\; sen\;\left(\frac{x+1}{n}\right) \;.$$

a) Mostre que $lim\; f_n(x) = x + 1$, função contínua em **R** ;

b) Mostre que , no entanto, a sucessão não é uniformemente convergente em **R** ;

c) A conjugação dos resultados obtidos em a) e b) será compatível com o disposto no teorema 3 ? Justifique.

8 - A série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \,.\, sen\,(n^2\,x)$, convergente para todo o $x \in$ **R** , pode ser derivada termo a termo em **R** ? Justifique.

9 - Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \,.\, x^n$, com $a_n \geq a_{n+1}$ e $lim\; a_n = a \in$ **R** .

a) Mostre que se trata de uma série absoluta e uniformemente convergente no intervalo $[-1\,,\,1]$;

b) Verifique que a série,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} \;,$$

que se obtém primitivando termo a termo a série dada é convergente para $x = 1$;

c) Face ao resultado estabelecido em b) , que conclusões pode tirar :

i) Sobre a convergência uniforme da série das primitivas no intervalo $[-1 , 1]$?
ii) Sobre o facto de a soma $S(x)$ da série das primitivas ser uma primitiva de $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \,.\, x^n$?

10 - Supondo que o intervalo de convergência absoluta da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \,.\, x^n$ é $]-\lambda , \lambda[$ e que a série converge para $x = \lambda$, poderá garantir-se que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} \,,$$

também converge quando $x = \lambda$? Representando por $s(x)$ e $S(x)$, respectivamente, as somas da série das derivadas e das primitivas, poderá afirmar--se que $S'_e(\lambda) = s(\lambda)$? Justifique.

11 - Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (e^{nx} - e^{-n})$ mostre que é convergente e calcule a sua soma para $x < 0$.

12 - Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(nx) + cos\,(nx)}{n^2}$.

a) Mostre que é convergente para qualquer $x \in \mathbf{R}$;

b) Designando por $f(x)$ a respectiva soma, mostre que $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbf{R}$;

c) Represente por uma série uma possível primitiva de $f(x)$ em $]-\infty , +\infty[$.

13 - Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, em que,

$$u_1(x) = sen\,x \quad , \quad u_n(x) = \frac{sen\,(nx)}{n} - \frac{sen\,(nx - x)}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

a) Mostre que se trata de uma série convergente e calcule a sua soma $S(x)$;

b) Mostre que a série das derivadas converge para $x = 0$ e que $S'(0) \neq \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(0)$. Que conclusão pode tirar deste facto ?

14 - Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \,.\, x^{2n}$.

a) Mostre que é convergente no intervalo $]-1\,,\,1[$;

b) Mostre que $S(0)$ é um mínimo relativo de $S(x)$, calculando $S'(0)$ e $S''(0)$ a partir das séries que representam $S'(x)$ e $S''(x)$;

c) Determine a soma $S(x)$ da série dada .

15 - Sendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}$ mostre que $f(x)$ é primitivável em **R** e determine a primitiva que se anula para $x = 0$, definindo-a por meio de uma série.

16 - Justifique que, para $x > -1$,

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n\,.\,(n+x)} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \quad .$$

17 - Demonstra-se, na teoria das séries de Fourier, que para $0 \le x \le 2\pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\,(nx)}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi\,x + 2\pi^2}{12} \quad .$$

A partir deste resultado,

a) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$;

b*) Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \pi^3/32$.

18 - Calcule as somas das seguintes séries nos respectivos intervalos de convergência :

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n\,.\,x^n$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,.\,x^n$; **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \cdot (x-1)^{2n+1}$;
e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot (x-1)^{n+1}$

19 - Uma função real de variável real com domínio em $A \subseteq \mathbf{R}$ diz-se analítica no ponto a interior do seu domínio se e só se existe um $\varepsilon > 0$ tal que :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,.\,(x-a)^{n-1} \quad , \; \forall\, x \in V_\varepsilon(a)\,.$$

Posto isto,

a) Prove que $f(x) = 1/x$ e que $g(x) = e^x$ são analíticas em qualquer ponto dos respectivos domínios ;

b) Prove que se uma função analítica na origem tem derivadas nulas de todas as ordens na origem, então a função em causa é constante em certa vizinhança da origem.

20 - Considere a seguinte sucessão de funções :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 - 1/n \\ n^2 .\, (x-1) + n & , \quad 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \\ -n^2 .(x-1) + n & , \quad 1 < x \leq 1 + 1/n \\ 0 & , \quad 1 + 1/n < x \leq 2 \end{cases} .$$

a) Mostre que $lim \int_0^2 f_n(x) \; dx \neq \int_0^2 lim\, f_n(x) \; dx$;

b) Que conclusão pode tirar sobre a eventual convergência uniforme de $f_n(x)$ no intervalo $[0 , 2]$?

21 - Dada a sucessão $f_n(x) = n\, x\, e^{-n x^2}$,

a) Mostre que $lim \int_0^1 f_n(x) \; dx \neq \int_0^1 lim\, f_n(x) \; dx$;

b) Que conclusão pode tirar sobre a eventual convergência uniforme de $f_n(x)$ no intervalo $[\, 0 , 1]$?

22 - Calcule o seguinte integral, justificando previamente a possibilidade de integração termo a termo:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + (n + x)^2} \; dx \; .$$

23 - Calcule com erro não superior a 0,0001 o integral $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \; dx$.

24* - Sendo $u_n(x)$, $n = 1 , 2 , 3 , \ldots$, e $u(x)$ funções integráveis no intervalo $[a , b]$, considere que $lim \int_a^b [u(x) - u_n(x)]^2 \; dx = 0$. Prove que , $lim \int_a^b u_n(x) \; dx =$ $= \int_a^b u(x) dx$.

RESPOSTAS:

1 - a) Uniformemente convergente em $B =]-1, 1[$ e não uniformemente convergente em $\mathbf{R}$; **b)** Uniformemente convergente ; **c)** Uniformemente convergente se $a > 0$, não uniformemente convergente se $a \leq 0$; **d)** Uniformemente convergente .

3 - c) Por exemplo ambas as sucessões $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$ e $g_n(x) = \dfrac{1}{x^3}$ são uniformemente convergentes no intervalo $]0, 1[$ e no entanto o mesmo não acontece com o respectivo produto .

4 - São todas uniformemente convergentes nos conjuntos indicados, com excepção da alínea b).

6 - Não é uniformemente convergente no intervalo .

7 - c) Sim, porque o teorema 3 dá uma condição suficiente de continuidade e não uma condição necessária.

8 - Não, porque a série das derivadas não é convergente em $\mathbf{R}$.

9 - c) i) É uniformemente convergente ; **ii)** $S(x)$ é uma primitiva de $s(x)$.

10 - Pode, porque a segunda série obtém-se primitivando a primeira termo a termo e esta é uniformemente convergente em $[0, \lambda]$ e, por sua vez, a série das primitivas converge em $x = 0$; tem-se $S_e'(\lambda) = s(\lambda)$, porque $S(x)$ é uma primitiva de $s(x)$ no intervalo $]-\lambda, \lambda]$.

11 - $\log \dfrac{e-1}{1-e^x} - 1$.

12 - c) $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(nx) - \cos\,(nx)}{n^3}$.

13 - a) $S(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$; **b)** A série das derivadas não é uniformemente convergente em qualquer intervalo a que pertença zero .

14 - b) $S'(0) = 0$ e $S''(0) = 6$; **c)** $S(x) = \dfrac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$ $(-1 < x < 1)$.

15 - $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arc\,tg\,(x/n^2)}{n^2}$.

17 - a) $\pi^2/6$, $\pi^2/12$ e $\pi^2/8$.

18 - a) $-\log(1-x)$, para $-1 \leq x < 1$; **b)** $\dfrac{x}{(1-x)^2}$, para $-1 < x < 1$;

c) $\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$, para $-1 < x < 1$; **d)** $\dfrac{1}{2} \cdot \log \dfrac{x}{2-x}$, para $0 < x < 2$;

e) $x \cdot \log x - x + 1$ para $0 < x \leq 2$ e 1 para $x = 0$.

20 - b) A sucessão $f_n(x)$ não converge uniformemente no intervalo $[0, 2]$.

21 - b) A sucessão $f_n(x)$ não converge uniformemente no intervalo $[0, 1]$.

22 - $\pi/2$.

23 - 1,4936 .

CAPÍTULO IV

DESENVOLVIMENTOS EM SÉRIE

1. <u>Série de Taylor e de Mac-Laurin</u>

Seja $f(x)$ uma função real de variável real com domínio A e seja a um ponto interior desse domínio . Suponha-se que a função admite derivadas finitas de todas as ordens em $x = a$ e construa-se a série de potências ,

$$f(a) + (x-a).f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) + \cdots$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) \ ,$$

convencionando-se nesta ultima representação que $f^{(0)}(a) = f(a)$. A esta série chama-se *série de Taylor* de $f(x)$ com origem em $x = a$; quando seja $a = 0$, a série,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(0) \ ,$$

designa-se por série de *Mac-Laurin* .

Vejamos alguns exemplos.

1) A série,

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \ ,$$

é série de Mac-Laurin de $f(x) = e^x$, pois para esta função tem-se,

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ \ldots \ = f^{(n-1)}(0) = \ \ldots \ = e^0 = 1 \ ,$$

2) Para $f(x) = 1/x$, construa-se a série de Taylor com origem em $a = 1$. Atendendo a que,

$$f^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n} \quad (n = 1 , 2 , 3 , \ \ldots \ ) ,$$

obtém-se a série,

$$1 + (x-1).(-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} \cdot (-1)^2 \cdot 2! + \cdots + \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! + \cdots \ ,$$

ou seja,

$$1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\cdots+(x-1)^{n-1}+\cdots ,$$

ou ainda ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.(x-1)^{n-1} .$$

Nos dois exemplos apresentados a soma da série de Taylor coincide com $f(x)$ para cada x pertencente aos respectivos intervalos de convergência:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=e^x ,\ \forall x \in \,]-\infty ,+\infty[,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}.(x-1)^{n-1}=\frac{1}{1+(x-1)}=\frac{1}{x} ,\ \forall x \in \,]0,2[.$$

Nem sempre porém assim acontece. A série de Taylor poderá ser convergente para certo valor x_0 e a respectiva soma não coincidir com $f(x_0)$. Por exemplo, a função,

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} ,$$

tem derivadas de todas as ordens nulas na origem ; a série de Mac-Laurin é então uma série com os termos todos nulos cuja soma não coincide evidentemente com o valor da função para os valores de $x \neq 0$.

Estuda-se seguidamente um teorema que dá as condições para que uma função seja soma da respectiva série de Taylor (de Mac-Laurin) para os valores de x que a façam convergente .

Teorema 1 : *A condição necessária e suficiente para que a série de Taylor de $f(x)$ com origem em $x = a$, suposta convergente em certo x_0 , tenha por soma $f(x_0)$ é que para $x = x_0$ o resto da fórmula de Taylor de ordem n -1 de $f(x)$ com origem em $x = a$ tenda para zero*

Demonstração : Considerando a fórmula de Taylor de ordem $n-1$ para $f(x)$ com origem em a ,

$$f(x)=f(a)+(x-a).f'(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a)+r_{n-1}(x) ,$$

vê-se que a parte polinomial , ou seja $f(x)-r_{n-1}(x)$, coincide com a soma dos n primeiros termos da série e Taylor de $f(x)$ com origem em a . Supondo que a série de Taylor converge para $x = x_0$, ter-se-á,

$$f(x_0)=f(a)+(x_0-a).f'(a)+\cdots+\frac{(x_0-a)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot f^{(n-1)}(a)+\cdots ,$$

se e só se $f(x_0) = lim\ [\, f(x_0) - r_{n\text{-}1}(x_0)\,]$, o que equivale a ter-se $lim\ \ r_{n\text{-}1}(x_0) = 0$, como se queria provar.

Na prática, a aplicação directa da condição do teorema 1 para averiguar sobre a eventual igualdade entre $f(x)$ e a soma da respectiva série de Taylor é normalmente inviável. Existe no entanto uma condição suficiente que permite concluir com facilidade sobre a verificação de tal igualdade em muitos casos de interesse. É do que trata o teorema seguinte :

Teorema 2 : *Sendo* $|\, f^{(n)}(x)\, | \ \leq\ M\,.\, L^{n}$ *, para* $n \geq n_0$ *, com M e L constantes, em certo intervalo I , contido no intervalo de convergência da série de Taylor e a que a origem a da série pertença , então f (x) é, naquele intervalo, soma da sua série de Taylor*

Demonstração : Nas condições do enunciado o resto da fórmula de Taylor pode escrever-se na forma de Lagrange :

$$r_{n-1}(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x^*) \quad ,$$

com x^* estritamente compreendido entre a e x . Então, para $n \geq n_0$ e para qualquer $x_0 \in I$,

$$|\, r_{n-1}(x_0)\,| = \frac{|\, x_0 - a\,|^n}{n!} \cdot |\, f^{(n)}(x_0^*)\,| \ \leq\ \frac{|x_0 - a|^n}{n!} \cdot M \cdot L^n \ = \ \frac{M\,.\,(|x_0 - a|\,.\,L)^n}{n!} \quad .$$

Como $lim\ k^n/n! = 0$, qualquer que seja k , resulta ,

$$lim\ \ \frac{M\,.(|\,x_0 - a|\,.\,L)^n}{n!} \ = \ 0 \ ,$$

donde $|\ lim\ \ r_{n\text{-}1}(x_0)\,| = 0$, ou ainda , $lim\ \ r_{n\text{-}1}(x_0) = 0$. Este último resultado garante, de acordo com o teorema 1,

$$f(x_0) \ = f(a) + (x_0 - a).f\,'(a) \ + \ \cdots \ + \ \frac{(x_0 - a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) + \ \cdots \ ,$$

qualquer que seja $x_0 \in I$, como se queria provar.

Vejamos dois exemplo de aplicação.

1) Sendo $f(x) = cos\ x$, tem-se

$$f(0) = 1 \ \ , f'(0) = 0 \ , \ \ f''(0) = \text{-}1 \ , \ \ f'''(0) = 0 \ , \ f^{(4)} = 1 \quad \text{, etc . ,}$$

ou seja,

$$f^{(2n\text{-}1)} = 0 \quad (\ n = 1\ , 2\ , 3\ , \ \ldots\ ) \ \ \text{e} \ f^{(2n)} = (\text{-}\ 1)^n \quad (\ n = 1\ , 2\ , 3\ , \ \ldots\ ) \quad .$$

A série de Mac-Laurin para $f(x) = cos\ x$ é então (depois de eliminados os termos nulos, o que equivale a associar cada termo nulo com o termo significativo imediatamente anterior) :

$$1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \ .$$

O intervalo de convergência desta série é $]-\infty\,, +\infty[$ e como qualquer das sucessivas derivadas de $f(x) = cos\ x$ assume sempre uma das formas $\pm\, sen\ x$ ou $\pm\, cos\ x$, tem-se $|\ f^{(n)}(x)\ | \leq 1$ nesse intervalo para $n \geq 1$. Logo, para qualquer $x \in\ ]-\infty\,, +\infty[$, tem-se,

$$cos\ x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \ .$$

2) De modo semelhante se obteria,

$$sen\ x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \ , \ \forall\, x \in\ ]-\infty\,, +\infty[\ .$$

Na prática , em grande número de casos, o desenvolvimento em série de Taylor (Mac-Laurin) tem de fazer-se por processos mais expeditos. É que a obtenção de uma expressão geral para as sucessivas derivadas de modo a ter-se uma expressão geral para os termos da série é normalmente impraticável. E, por outro lado, o estudo do comportamento do resto, para saber onde é válido o desenvolvimento, nem sempre pode fazer-se com a simplicidade desejável.

Veremos no ponto seguinte técnicas de desenvolvimento em série de Taylor (Mac-Laurin) que se baseiam na possibilidade de derivar e primitivar termo a termo as séries de potências.

2. Técnicas de desenvolvimento em série

2.1 - Introdução

Vamos primeiro convencionar uma simbologia que será útil no que segue. Dada a função $f(x)$, representaremos por $f^{(k)}(x)$, com $k = 0\,, 1\,, 2\,, 3\,, \ \ldots\ ,$ a sua derivada de ordem k, convencionando-se que a derivada de ordem 0 é a própria função,

$$f^{(0)}(x) = f(x) \ , \ f^{(1)}(x) = f'(x) \ , \ f^{(2)}(x) = f''(x) \ , \text{ etc. } .$$

Considere-se agora a função $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,.(x-a)^{p_n}$, definida no intervalo de convergência da série de potências. Esta função admite derivadas de todas as ordens no interior desse intervalo, as quais podem ser obtidas por derivação sucessiva da série termo a termo.

Repare-se que todos os termos da série são funções do tipo $f(x) = b \,.\, (x-a)^m$, com b constante real e m inteiro não negativo. Sendo $m = 0$, $f(x) = b$ (constante), tem-se,

$$f(a) = f^{(0)}(a) = b = b \,.\, (0!) \,,\; f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = 0 \;;$$

sendo $m \geq 1$, tem-se ,

$$f(a) = f^{(0)}(a) = f^{(1)}(a) = f^{(2)}(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$$

$$f^{(m)}(a) = b \,.\, (m!)$$

$$f^{(m+1)}(a) = f^{(m+2)}(a) = f^{(m+3)}(a) = \ldots = 0 \,.$$

Aplicando estes resultados aos termos da série de potências $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.(x-a)^{p_n}$, de soma $S(x)$ no intervalo de convergência, obtém-se,

$$\begin{aligned} S^{(p_1)}(a) &= a_1 \,.\, (p_1!) \\ S^{(p_2)}(a) &= a_1 \,.\, (p_2!) \\ &\cdots \\ S^{(p_n)}(a) &= a_1 \,.\, (p_n!) \\ &\cdots \end{aligned}$$

sendo que $S^{(k)}(a) = 0$ para $k \notin \{ p_1 , p_2 , \ldots , p_n , \ldots \}$. Construindo a série de Taylor com origem em $x = a$ para a função $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \,.(x-a)^{p_n}$, obtém-se, após eliminação dos eventuais termos nulos,

$$\frac{(x-a)^{p_1}}{p_1!} \cdot a_1 \cdot (p_1!) + \frac{(x-a)^{p_2}}{p_2!} \cdot a_2 \cdot (p_2!) + \frac{(x-a)^{p_3}}{p_3} \cdot a_3 \cdot (p_3!) + \cdots ,$$

ou seja, após simplificação,

$$a_1 \,.\, (x-a)^{p_1} + a_2 \,.\, (x-a)^{p_2} + a_3 \,.\, (x-a)^{p_3} + \cdots ,$$

que é a série original. Isto é,

Teorema 3 : *Qualquer série de potências em* $x - a$ *é série de Taylor com origem em* $x = a$ *da sua própria soma*

2.2 - <u>Obtenção prática do desenvolvimento</u>

O teorema estudado em 2.1 , juntamente com a possibilidade de derivar e primitivar termo a termo as séries de potências, permite obter, de forma expedita, desenvolvimentos em série de Taylor em muitos casos de interesse prático. Os casos típicos de aplicação desta técnica são os seguintes :

1º Caso : *Desenvolver* $f(x)$ *em série de Taylor com origem em* $x = a$ *, sabendo que a função admite como primitiva certa função* $F(x)$ *que se sabe ser definida por uma série de potências em* $x - a$ *no respectivo intervalo de convergência* I .

Neste caso, de $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .(x-a)^{p_n}$ para $x \in I$, resulta por derivação termo a termo,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n . p_n . (x-a)^{p_n - 1} \text{ , } \textit{pelo menos para } x \in INT . I \text{ ,}$$

podendo esta igualdade prolongar-se às extremidades do intervalo caso nelas seja convergente a série das derivadas [e lateralmente contínua a função $f(x)$] .

2º Caso : *Desenvolver* $f(x)$ *em série de Taylor com origem em* $x = a$ *, sabendo que* $f'(x)$ *é definida por uma série de potências em* $x - a$ *no respectivo intervalo de convergência* J .

Neste caso , de $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n .(x-a)^{p_n}$ para $x \in J$, resulta por primitivação termo a termo,

$$f(x) = k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_n + 1} \cdot (x-a)^{p_n + 1} \quad \text{, } \textit{pelo menos para } x \in J \text{ ,}$$

com k constante a determinar. Para determinar a constante de primitivação k , basta fazer $x = a$ em ambos os membros saindo $k = f(a)$. Tem-se portanto,

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p_n + 1} \cdot (x-a)^{p_n + 1} \quad \text{, } \textit{pelo menos para } x \in J \text{ ,}$$

podendo esta igualdade prolongar-se às extremidades de J caso nelas seja convergente a série das primitivas [e lateralmente contínua a função $f(x)$]

Para ilustrar estas técnicas de desenvolvimento em série, apresentam-se dois exemplos :

1) Para desenvolver em série de Mac-Laurin a função,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ ,}$$

basta notar que esta função admite como primitiva,

$$F(x) = \frac{1}{1 - x} \text{ ,}$$

e que esta função pode ser desenvolvida pela série geométrica ,

$$F(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \quad , \quad -1 < x < 1 \, .$$

Então, por derivação termo a termo,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1).x^{n-1} + n.x^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n.x^{n-1} \quad ,$$

para $-1 < x < 1$.

2) Para desenvolver em série de Taylor com origem em $x = 1$ a função,

$$f(x) = log\,(1 + x) \, ,$$

basta notar que,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2 + (x-1)} = \frac{1/2}{1 + (x-1)/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2}{2} - \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^{n-1}}{2^n} \quad ,$$

para $|\, x - 1 \,| < 2$, ou seja para $x \in \,]-1 \, , 3\,[$. Tem-se então por primitivação,

$$log\,(1 + x) = k + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n \,.\, 2^n} \quad ,$$

pelo menos para $x \in \,]-1 \, , 3\,[$, com k constante a determinar. Fazendo em ambos os membros $x = 1$, sai $k = log\, 2$ e então,

$$log\,(1 + x) = log\, 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n \,.\, 2^n} \, ,$$

valendo a igualdade também para $x = 3$, por ser para esse valor de x convergente série e contínua a função $f(x) = log\,(1 + x)$.

3. Exercícios

1 - Escreva as séries de Mac-Laurin para as funções:

a) $sen\, x$; **b)** $cos\, x$.

Estudando o comportamento do resto da fórmula de Mac-Laurin, mostre que cada uma das funções é soma da correspondente série no respectivo intervalo de convergência.

2 - Dada a função $f(x) = arc\ tg\, x$,

a) Mostre por indução que a derivada de ordem n é dada por,

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\ .\ cos^n(arc\ tg\, x)\ .\ sen\left[\, n.\,(arc\ tg\, x + \pi/2)\right] \ ;$$

b) Escreva a série de Mac-Laurin e mostre que a soma desta série é o valor da função no respectivo intervalo de convergência.

3 - Escreva a série de Taylor (com origem em $a = \pi$) para $y = sen\,(2\,x)$ e mostre que tal série tem por soma a função no intervalo $]\,-\infty\,, +\infty\,[$.

4 - Considere a função,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases} .$$

a) Mostre que $f'(0) = 0$;

b) Mostre por indução, que a derivada de ordem n nos pontos $x \neq 0$ tem por expressão geral,

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \cdots + \frac{L}{x^\lambda}\right) \cdot e^{-1/x^2} \ ,$$

com $A\,, B\,, \ldots\,, L\,, \alpha\,, \beta\,, \ldots\,, \lambda$ constantes e deduza daí que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n \geq 1$;

c) Construa a série de Mac-Laurin para $f\,(x)$ e mostre que, embora esta série seja convergente no intervalo $]\,-\infty\,, +\infty\,[$, apenas para $x = 0$ a sua soma é igual ao valor de $f\,(x)$.

5 - Desenvolva em série de Mac-Laurin as funções seguintes, indicando os intervalos onde são válidos os desenvolvimentos:

a) $log\,(x+3)$; **b)** $\dfrac{1}{(1-x)^3}$; **c)** $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$; **d)** $sen\, x\ .\ cos\, x$;

e) $\sqrt{x+1}$; **f)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{arc\,tg\,x}{x} & , \ x \neq 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases}$; **g)** $sen^2\,x$; **h)** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$;

i) $log\,(1+2\,x)$; **j)** $log\,(x^2 - 3\,x + 2)$; **k)** $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)^2}$; **l)** $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$;

m) $log\,(1+x+x^2)$; **n)** $\dfrac{1}{2} \cdot log\,(1+x^2)$; **o)** $log\,(x + \sqrt{1+x^2}\,)$;

p) $\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$; **q)** $arc\,tg\,\dfrac{1+x}{1-x}$; **r)** $\dfrac{1}{1+x} \cdot log\,(1+x)$.

6 - Desenvolva em série de Taylor com origem em $a = 1$ as funções seguintes, indicando os intervalos onde são válidos os desenvolvimentos:

a) $\dfrac{1}{x}$; **b)** e^x ; **c)** $x \,.\, log\,x$; **d)** $\dfrac{x}{(x+1)^2}$; **e)** $x^{-2} \,.\, (x-1)^2$; **f)** $\sqrt{x}$.

7 – Determine o termo geral do desenvolvimento em série de Mac-Laurin da função $y = x^2 \,.\, \sqrt[4]{1+x}$ e aproveite o resultado para calcular $y^{(5)}(0)$.

8 - Desenvolva segundo as potências de $x - 1$ as seguintes funções e indique os intervalos onde são válidos os desenvolvimentos:

a) $y = 2 \,.\, \sqrt{x} - 1/x$; **b)** $y = \dfrac{4\,x}{(1+x)^2}$.

9 - Desenvolva segundo as potências de $1/x$ as seguintes funções e indique os conjuntos onde são válidos os desenvolvimentos:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 + x - 2}$; **b)** $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

10 - Desenvolva segundo as potências de $arc\,sen\,x$ a função,

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \,.\, arc\,sen\,x \ ,$$

e indique o conjunto onde é válido o desenvolvimento.

11 - Desenvolva segundo as potências de $log\,x$ a função $y = x \,.\, log\,x$ e indique para que valores de x é válido o desenvolvimento.

12 - Desenvolva segundo as potências de $\dfrac{x}{1+x}$ a função $y = \ x$ e indique para que valores de x é válido o desenvolvimento.

<u>RESPOSTAS</u>:

1 - a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$, em $]-\infty, +\infty[$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$, em $]-\infty, +\infty[$.

2 - b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$, em $[-1 , 1]$.

3 - $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \dfrac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \cdot (x-\pi)^{2n-1}$, em $]-\infty, +\infty[$.

5 - a) $log\, 3 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n \,.\, 3^n}$, para $-3 < x \leq 3$;

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1/2) \,.\, (n+1) \,.(n+2) \,.\, x^n$, para $-1 < x < 1$;

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \,.\, x^n$, para $-1 < x < 1$;

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{2^{2n}}{(2n+1)!} \,.\, x^{2n+1}$, para $x \in \mathbf{R}$;

e) $1 + \dfrac{1}{2} \cdot x + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \,.\, (2n-2)!}{2^{2n-1} \,.\, n! \,.\, (n-1)!} \cdot x^n$, para $-1 \leq x \leq 1$;

f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$, para $-1 \leq x \leq 1$;

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{2^{2n+2}}{(2n+2)!} \,.\, x^{2n+2}$, para $x \in \mathbf{R}$;

h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{p_n}$, com $p_n = \begin{cases} 3n/2 & , \ n \ par \\ (3n-1)/2 & , \ n \ impar \end{cases}$, para $-1 < x < 1$;

i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \,.\, x^{n+1}$, para $-1/2 < x \leq 1/2$;

j) $log\, 2 - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}+1}{(n+1) \,.\, 2^{n+1}} \cdot x^{n+1}$, para $-1 \leq x < 1$;

k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+3-2^{n+2}}{2^{n+2}} \cdot x^n$, para $-1 < x < 1$; **l)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \cdot x^n$, para $-1 < x < 1$;

m) $x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1} + \dfrac{x^{3n+2}}{3n+2} - \dfrac{2x^{3n+3}}{3n+3} + \cdots$, para $-1 \leq x \leq 1$;

n) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2n+2} \cdot x^{2n+2}$, para $-1 \leq x \leq 1$;

o) $x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n! \cdot 2^n \cdot (2n+1)} \cdot x^{2n+1}$, para $-1 \leq x \leq 1$;

p) $1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$, para $-1 < x < 1$;

q) $\pi/4 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$, para $-1 \leq x \leq 1$;

r) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left[1 + 1/2 + \cdots + 1/(n+1)\right] \cdot x^{n+1}$, para $-1 < x < 1$.

6 - a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (x-1)^n$, para $0 < x < 2$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e}{n!} \cdot (x-1)^n$, para $x \in \mathbf{R}$;

c) $(x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{(x-1)^n}{n \cdot (n-1)}$, para $0 \leq x \leq 2$;

d) $\dfrac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n-1}{2^{n+2}} \cdot (x-1)^n$, para $-1 < x < 3$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (x-1)^{n+2}$, para $0 < x < 2$;

f) $1 + \dfrac{1}{2} \cdot (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot (2n-2)!}{2^{2n-1} \cdot n! \cdot (n-1)!} \cdot (x-1)^n$, para $0 \leq x \leq 2$.

7 - O termo geral é $\binom{1/4}{n} \cdot x^{n+2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ e $y^{(5)}(0) = 105/16$.

8 - a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} + (1/n) \cdot \binom{-1/2}{n-1}\right] \cdot (x-1)^n$, para $0 < x < 2$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)}{2^n} \cdot (x-1)^n$, para $-1 < x < 3$.

9 - a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{n+1} + 1}{3} \cdot (1/x)^{n+2}$, para $x < -2$ ou $x > 2$;

b) $\sum_{n=2}^{\infty} (2^{n-1} - 1) \cdot (1/x)^n$, para $x < -2$ ou $x > 2$.

10 - $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{(arc\ sen\ x)^{2n+1}}{(2n)!}$, para $-1 \leq x \leq 1$.

11 - $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{log^{n+1}\ x}{n!}$, para $x > 0$.

12 - $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{n+1}$, para $x > -1/2$.

CAPITULO V

NOÇÕES TOPOLÓGICAS E SUCESSÕES EM $\mathbf{R}^n$

1. Distâncias e vizinhanças

Dado um espaço vectorial E sobre o corpo **R** dos números reais, chama-se *norma* a qualquer aplicação $\bar{x} \rightarrow \|\bar{x}\|$ de E em $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$ que verifique as seguintes propriedades:

P1: $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$;
P2: $\|\lambda \,.\, \bar{x}\| = |\lambda| \,.\, \|\bar{x}\|$, com qualquer $\lambda \in \mathbf{R}$;
P3: $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

A partir de uma norma definida em E pode definir-se uma distância entre dois vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ fazendo $d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\|$ e a partir das propriedades da norma, obtêm-se de imediato as seguintes :

P4: $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$;
P5: $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$ (*simetria*);
P6: $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$ (*desigualdade triangular*).

Estas propriedades da distância entre vectores de E são formalmente as mesmas que as indicadas para o caso da distância $d(x, y) = | x - y |$ entre números reais, quando foram estudadas as noções topológicas em **R** . Tal significa que podem definir-se num espaço vectorial normado noções topológicas idênticas às apresentadas para o caso de **R** , sendo que a maioria das propriedades então estudadas continuam válidas neste caso mais geral.

No que se segue vamos restringir o nosso estudo ao caso do espaço vectorial,

$$\mathbf{R}^n = \{\, \bar{x} = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n) : \; x_i \in \mathbf{R} ,\; i = 1 , 2 , \ldots , n \,\}$$

sobre **R** , começando por definir neste espaço a *norma Euclideana* [1] ,

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \; .$$

[1] É possível definir em $\mathbf{R}^n$ uma infinidade de outras normas, podendo provar-se que neste espaço todas as normas são topologicamente equivalentes, no sentido de ser indiferente desenvolver aí o estudo da topologia tomando como base qualquer delas.

É fácil ver que a norma Euclideana verifica efectivamente as propriedades P1, P2 e P3 que foram indicadas para as normas em geral. Com efeito,

a) Para o caso de P1, tem-se ,

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0} \ .$$

b) Para caso de P2 , tem-se,

$$\|\lambda \,.\, \bar{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\lambda \,. x_j)^2} = |\lambda| \ . \ \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} = |\lambda| \,.\, \|\bar{x}\| \ .$$

c) Para demonstrar a verificação de P3, prova-se primeiro a desigualdade de Cauchy . Sendo a_i , $b_i \geq 0$, $i = 1 , 2 , \ldots , n$, tem-se, com qualquer $x \in \mathbf{R}$,

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j \ x + b_j)^2 = (\sum_{j=1}^{n} a_j^2) \,.\, x^2 + 2 (\sum_{j=1}^{n} a_j \ b_j) \,.\, x + (\sum_{j=1}^{n} b_j^2) \geq 0 \,;$$

Ora , para que o trinómio do segundo grau obtido seja não negativo para qualquer $x \in \mathbf{R}$ deverá ser,

$$\Delta = 4 \,.(\sum_{j=1}^{n} a_j \ b_j)^2 - 4 \,.\, (\sum_{j=1}^{n} a_j^2) \,.\, (\sum_{j=1}^{n} b_j^2) \leq 0 \,,$$

donde resulta a desigualdade de Cauchy :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \, b_j \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j \ . \ \sum_{j=1}^{n} b_j} \ .$$

Com esta desigualdade pode agora provar-se que a norma Euclideana verifica P3 :

$$\begin{aligned}
\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 = \\
&= |x_1 + y_1|^2 + |x_2 + y_2|^2 + \ldots + |x_n + y_n|^2 \leq \\
&\leq (|x_1| + |y_1|)^2 + (|x_2| + |y_2|)^2 + \ldots + (|x_n| + |y_n|)^2 = \\
&= \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} |x_j| \,.\, |y_j| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 + \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 + 2 \,.\, \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \,.\, \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2} = \\
&= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2.\|\bar{x}\|.\|\bar{y}\| = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \,,
\end{aligned}$$

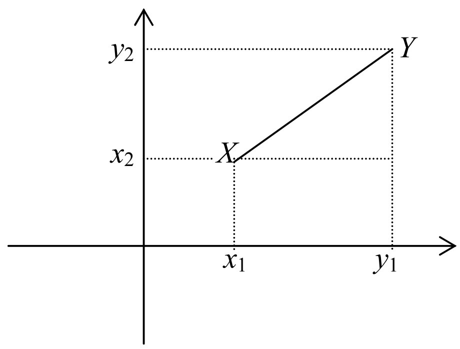
e de $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 \leq (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2$ resulta finalmente a desigualdade de P3.

À norma Euclideana corresponde a seguinte distância entre vectores $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbf{R^n}$:

$$d(\bar{x}\,,\bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} \qquad \text{(Distância Euclideana)}$$

A interpretação geométrica da distância Euclideana é muito simples nos casos de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}^3$. Fixado, no plano ou no espaço ordinário, um sistema de eixos coordenados, a distância $d(\bar{x}\,,\bar{y})$ é o comprimento do segmento de recta cujas extremidades são os pontos X e Y de coordenadas $(x_1\,,x_2)$ e $(y_1\,,\ y_2)$ ou $(x_1\,,x_2\,,x_3)$ e $(y_1\,,\ y_2\,,\ y_3)$, respectivamente nos casos $n = 2$ ou $n = 3$.

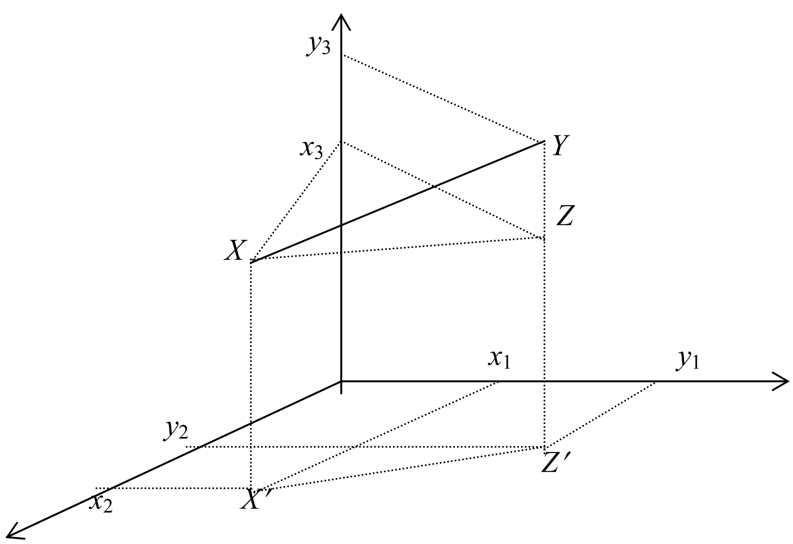
Na figura seguinte representa-se graficamente uma situação particular correspondente ao caso $n = 2$:



Pelo teorema de Pitágoras vê-se que,

$$d(\bar{x}\,,\bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \textit{Comprimento do segmento } XY \ .$$

Na figura seguinte representa-se graficamente uma situação particular correspondente ao caso $n = 3$:



Tem-se, representando por $C\,(X'Z')$, $C\,(X\,Z)$, $C(ZY)$ e $C\,(X\,Y)$ respectivamente os comprimentos dos segmentos $X'Z'$, $X\,Z$, $X\,Y$ e ZY,

$$C\,(X'Z') = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = C\,(X\,Z) \quad , \quad C\,(Z\,Y) = |\,x_3 - y_3\,|$$

$$[C\,(X\,Y)]^{\,2} = [C\,(X\,Z)]^{\,2} + [C\,(Z\,Y)]^{\,2} = (x_1 - y_1)^{\,2} + (x_2 - y_2)^{\,2} + (x_3 - y_3)^{\,2} =$$

$$= [d(\bar{x}\,,\bar{y})]^{\,2}\,,$$

donde resulta $C\,(X\,Y\,) = d(\bar{x}\,,\bar{y}\,)$, como se queria mostrar.

Voltando ao caso geral de $\mathbf{R^n}$, para um dado $\bar{a} \in \mathbf{R^n}$ define-se como sua vizinhança de raio $\varepsilon > 0$ o conjunto,

$$\mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}\,) = \{\,\bar{x}\;:\;\bar{x} \in \mathbf{R^n}\;\wedge\;d(\bar{x}\,,\bar{a}\,) = \|\,\bar{x}\,-\,\bar{a}\,\| < \varepsilon\}\,,$$

sendo quase imediatas as seguintes propriedades :

P7: $\varepsilon < \delta \Rightarrow \mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}\,) \subset \mathrm{V}_{\delta}(\bar{a}\,)$

P8: $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}\,) = \{\,\bar{a}\,\}$

Tem-se ainda que,

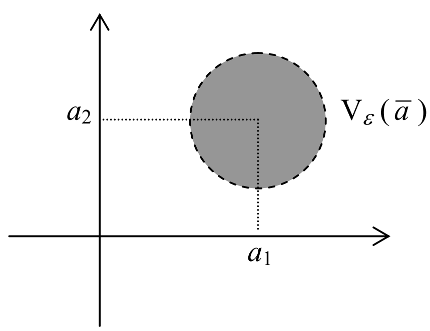
P9: $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \exists\;\varepsilon > 0\;:\;\mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}\,) \cap \mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{b}\,) = \varnothing$

<u>Demonstração</u> : Tomando $\varepsilon = (1/3)\,.\,\|\bar{a} - \bar{b}\,\|$, se certo $\bar{c}$ pertencesse a ambas as vizinhanças, ter-se-ia,

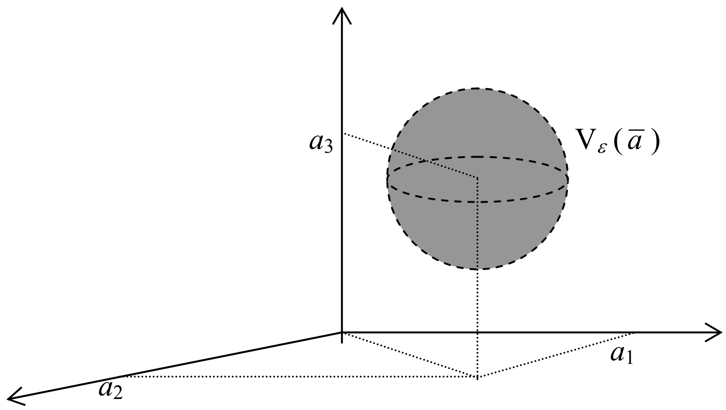
$$\|\bar{a} - \bar{b}\,\| \leq \|\bar{a} - \bar{c}\,\| + \|\bar{c} - \bar{b}\,\| < \varepsilon + \varepsilon = (2/3)\,.\,\|\bar{a} - \bar{b}\,\|\,,$$

donde resultaria $(1/3)\,.\,\|\bar{a} - \bar{b}\,\| < 0$, desigualdade obviamente impossível. Está demonstrado o resultado desejado.

Para terminar, refira-se que em $\mathbf{R^2}$ e $\mathbf{R^3}$ as vizinhanças têm interpretações geométricas interessantes . No caso de $\mathbf{R^2}$, sendo $\bar{a} = (a_1\,,a_2)$ a vizinhança $\mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}\,)$ é o interior de um círculo de centro no ponto de coordenadas $(a_1\,,a_2)$ e raio ε :



No caso de $\mathbf{R^3}$, sendo $\bar{a} = (a_1\,,a_2\,,a_3)$ a vizinhança $\mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}\,)$ é o interior de uma esfera de centro no ponto de coordenadas $(a_1\,,a_2\,,a_3)$ e raio ε :



2. Conceitos topológicos básicos

Tal como no caso de **R** definem-se em seguida os conceitos topológicos mais importantes. As definições são dadas exactamente nos mesmos termos que no caso já estudado do corpo **R** . Assim:

a) Diz-se que $\overline{a} \in \mathbf{R^n}$ é *ponto interior* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ se e só se existe uma certa $V_\varepsilon(\overline{a})$ contida no conjunto A . O conjunto dos pontos interiores de um conjunto A designa-se por *interior* do conjunto e representa-se por $INT\ A$, podendo evidentemente ser $INT\ A = \emptyset$ (nada obriga a que um dado conjunto tenha pontos interiores).

b) Diz-se que $\overline{a} \in \mathbf{R^n}$ é *ponto fronteiro* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(\overline{a})$ existem pontos do conjunto A e pontos do complementar de A. O conjunto dos pontos fronteiros de um conjunto A designa-se por *fronteira* do conjunto e representa-se por $FRONT\ A$, podendo evidentemente ser $FRONT\ A = \emptyset$.

c) Diz-se que $\overline{a} \in \mathbf{R^n}$ é *ponto exterior* ao conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ se e só se existe uma certa $V_\varepsilon(\overline{a})$ contida no complementar do conjunto A . O conjunto dos pontos exteriores ao conjunto A designa-se por *exterior* do conjunto e representa-se por $EXT\ A$, podendo evidentemente ser $EXT\ A = \emptyset$.

d) Diz-se que $\overline{a} \in \mathbf{R^n}$ é *ponto de acumulação* de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(\overline{a})$ existe pelo menos um ponto de A distinto de $\overline{a}$. O conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se *derivado* de A e representa-se por A', podendo evidentemente ser $A' = \emptyset$.

e) Chama-se *aderência* ou *fecho* do conjunto A à união do seu interior com a sua fronteira, ou seja, $Ad\ A = INT\ A \cup FRONT\ A$. Excepto no caso de A ser vazio, tem-se sempre $Ad\ A \neq \emptyset$.

f) Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ diz-se *aberto* se e só se coincide com o seu interior, ou seja, $A = INT\ A$. Dado que em qualquer caso (A aberto ou não) sempre se tem $INT\ A \subseteq A$, para provar que A é aberto bastará provar que $A \subseteq INT\ A$.

g) Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ diz-se *fechado* se e só se coincide com a sua aderência, ou seja, se e só se, $A = Ad\, A = INT\ A\ \cup\ FRONT\ A$.

A partir destes conceitos básicos podemos enunciar tal como em **R** uma série de propriedades, sendo as demonstrações formalmente as mesmas como se poderá comprovar comparando o texto que se segue com o texto correspondente relativo às noções topológicas em **R** do Volume I.

P10 : $INT\ A\ \cup\ FRONT\ A\ \cup\ EXT\ A\ =\ \mathbf{R}^n$

Demonstração: É evidente, dadas as definições de interior, fronteira e exterior de um conjunto ; qualquer ponto de espaço respeita uma e uma só das definições a), b) ou c).

P11 : $EXT\, A = INT\ \overline{A}$

Demonstração: É também evidente, dado que um ponto $\overline{a}\ \in EXT\, A$ se e só se existe uma $V_\varepsilon(\overline{a})$ contida no complementar de A e tal equivale a ter-se $\overline{a}\ \in INT\ \overline{A}$.

P12 : $FRONT\ A\ =\ FRONT\ \ \overline{A}$

Demonstração: Basta atender à definição: $\overline{a}\ \in FRONT\ A$ se e só se em qualquer $V_\varepsilon(\overline{a})$ existem pontos de A e pontos de $\overline{A}$, o que equivale a ser $\overline{a}\ \in FRONT\ \ \overline{A}$.

P13 : *Se* $A\ \subseteq\ B$, *então* $A'\subseteq\ B'$

Demonstração : Tomando $\overline{a}\ \in A'$, tem-se que em qualquer vizinhança de $\overline{a}$ existe pelo menos um ponto de A distinto de $\overline{a}$ e, portanto, dado ter-se $A\ \subseteq\ B$, também existe pelo menos um ponto de B distinto desse mesmo $\overline{a}$, ou seja, $\overline{a}\ \in B'$.

P14 : $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Demonstração : Por ser $A \subseteq (A \cup B)$ e $B \subseteq (A \cup B)$, a propriedade **P13** garante que $A' \subseteq (A \cup B)'$ e $B' \subseteq (A \cup B)'$ o que implica a inclusão,

$$A' \cup\ B' \subseteq\ (A \cup B)',$$

faltando portanto provar a inclusão contrária para se poder considerar provada a igualdade do enunciado. Provemos então que $(A \cup B)'\ \subseteq\ A'\ \cup\ B'$. Deveremos provar que,

$$\overline{a} \in (A \cup B)' \Rightarrow\ \overline{a} \in A' \cup\ B'\ ,$$

mas no caso presente torna-se mais fácil provar a implicação equivalente,

$$\overline{a} \notin A' \cup\ B'\ \Rightarrow\ \overline{a} \notin (A \cup B)'\ .$$

Para tal, considere-se $\overline{a} \notin A' \cup B'$, ou seja, $\overline{a} \notin A'$ e $\overline{a} \notin B'$; existe então uma $V_\varepsilon(\overline{a})$ sem pontos de A para além do próprio $\overline{a}$ e existe uma outra $V_\delta(\overline{a})$ sem pontos de B para além do próprio $\overline{a}$; tomando $\theta = mín\ \{\varepsilon, \delta\}$ em $V_\theta(\overline{a})$ não se encontram pontos nem de A nem de B, para além do próprio $\overline{a}$; então existe uma vizinhança de $\overline{a}$ sem pontos de $A \cup B$ para além do próprio $\overline{a}$, ou seja, $\overline{a} \notin (A \cup B)'$, como se queria provar.

P15 : *As vizinhanças* $V_\varepsilon(\overline{a})$ *são conjuntos abertos*

<u>Demonstração</u> : Dado $\overline{b} \in V_\varepsilon(\overline{a})$, tem-se $d(\overline{a},\overline{b}) < \varepsilon$. Tomando,

$$\delta = \varepsilon - d(\overline{a},\overline{b}) > 0 \,,$$

vejamos que $V_\delta(\overline{b}) \subseteq V_\varepsilon(\overline{a})$. Com efeito, usando as propriedades **P5** e **P6** ,

$$\overline{x} \in V_\delta(\overline{b}) \Rightarrow d(\overline{x},\overline{b}) < \delta = \varepsilon - d(\overline{a},\overline{b}) \Rightarrow d(\overline{x},\overline{b}) + d(\overline{a},\overline{b}) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\overline{x},\overline{a}) < \varepsilon \Rightarrow \overline{x} \in V_\varepsilon(\overline{a}) \,.$$

Por definição de ponto interior conclui-se assim que $\overline{b} \in INT\ V_\varepsilon(\overline{a})$, ou seja, $V_\varepsilon(\overline{a}) \subseteq INT\ V_\varepsilon(\overline{a})$ o que chega para garantir a igualdade $V_\varepsilon(\overline{a}) = INT\ V_\varepsilon(\overline{a})$. Em conclusão, $V_\varepsilon(\overline{a})$ é um conjunto aberto como se queria provar.

P16 : *Sendo A um conjunto qualquer, $INT\ A$ é um conjunto aberto*

<u>Demonstração</u> : Basta provar que $INT\ A \subseteq INT\ (INT\ A)$, pois tal chega para garantir que $INT\ A = INT\ (INT\ A)$, ou seja que $INT\ A$ é um conjunto aberto.

Para tal notemos que $A \subseteq B \Rightarrow INT\ A \subseteq INT\ B$ implicação que é praticamente evidente e cuja justificação se deixa ao cuidado do leitor.

Então,

$$\overline{a} \in INT\ A \Rightarrow \exists\ V_\varepsilon(\overline{a}) :\ V_\varepsilon(\overline{a}) \subseteq A \Rightarrow \exists\ V_\varepsilon(\overline{a}) :\ INT\ V_\varepsilon(\overline{a}) \subseteq INT\ A$$

Como o conjunto $V_\varepsilon(\overline{a})$ é aberto (ver propriedade **P15**) tem-se $INT\ V_\varepsilon(\overline{a}) = V_\varepsilon(a)$ e portanto,

$$\overline{a} \in INT\ A \Rightarrow \exists\ V_\varepsilon(\overline{a}) :\ V_\varepsilon(\overline{a}) \subseteq INT\ A \Rightarrow \overline{a} \in INT\ (INT\ A) \,,$$

ou seja, $INT\ A \subseteq INT\ (INT\ A)$ como se queria provar.

P17 : $Ad\ A = A \cup A'$

Demonstração : Dado $\overline{a} \in Ad\,A$, poderá ser $\overline{a} \in A$ ou $\overline{a} \notin A$. Se for $\overline{a} \in A$, teremos $\overline{a} \in A \cup A'$. Se for $\overline{a} \notin A$, o ponto $\overline{a}$ não pode ser interior do conjunto A, logo necessariamente $\overline{a} \in FRONT\,A$ e então em qualquer $V_{\varepsilon}(\overline{a})$ existe pelo menos um ponto do conjunto A que não pode ser o próprio $\overline{a}$ dado estarmos a considerar o caso $\overline{a} \notin A$; então, por definição de ponto de acumulação, $\overline{a} \in A'$, ou seja, também neste caso se tem $\overline{a} \in A \cup A'$. Em conclusão: $Ad\,A \subseteq A \cup A'$.

Para provar a inclusão contrária tome-se $\overline{a} \in A \cup A'$ e vejamos que igualmente $\overline{a} \in Ad\,A$. Se for $\overline{a} \in A$, tem-se evidentemente $\overline{a} \in Ad\,A$. Se for $\overline{a} \notin A$, necessariamente $\overline{a} \in A'$, logo em qualquer $V_{\varepsilon}(\overline{a})$ existe o ponto $\overline{a}$ que pertence ao complementar do conjunto A e pelo menos um ponto do conjunto A, ou seja, $\overline{a} \in FRONT\,A$ e portanto também neste caso $\overline{a} \in Ad\,A$.

P18 : *O conjunto A é fechado se e só se* $A' \subseteq A$

Demonstração : Sendo A fechado então, por definição, $A = Ad\,A = A \cup A'$ donde resulta $A' \subseteq A$. Por outro lado, sendo $A' \subseteq A$ tem-se $Ad\,A = A \cup A' = A$, ou seja, o conjunto A é fechado.

P19 : *O derivado e a aderência ou fecho de um qualquer conjunto A são conjuntos fechados*

Demonstração : Vejamos primeiro o caso do derivado. Pela propriedade **P18**, basta provar que $(A')' \subseteq A'$. Dado $\overline{x} \in (A')'$, em qualquer $V_{\varepsilon}(\overline{x})$ existe pelo menos um ponto $\overline{y} \neq \overline{x}$ pertencente ao conjunto A'. Por ser $\overline{y} \in A'$, por seu lado, em qualquer $V_{\delta}(\overline{y})$ existe um $\overline{z} \neq \overline{y}$ pertencente ao conjunto A. Tomando em particular,

$$\delta = m\acute{\imath}n\,\{\,\varepsilon - d(\overline{y}\,,\,\overline{x})\,;\; d(\overline{y}\,,\,\overline{x})\,\}\,,$$

resulta $d(\overline{z}\,,\,\overline{y}) < \delta \leq \varepsilon - d(\overline{y}\,,\,\overline{x})$, ou seja, $d(\overline{z}\,,\,\overline{x}) \leq d(\overline{z}\,,\,\overline{y}) + d(\overline{y}\,,\,\overline{x}) < \varepsilon$, assim se concluindo que $\overline{z} \in V_{\varepsilon}(\overline{x})$. Se se provar que $\overline{z} \neq \overline{x}$, fica provado que em $V_{\varepsilon}(\overline{x})$ - qualquer - existe sempre pelo menos um $\overline{z} \neq \overline{x}$ pertencente ao conjunto A, ou seja, fica provado que $\overline{x} \in A'$, assim se demonstrando a inclusão $(A')' \subseteq A'$, ou seja, que A' é fechado. Ora, atendendo à definição do particular δ considerado, resulta $\delta \leq d(\overline{y}\,,\,\overline{x}) \leq d(\overline{y}\,,\,\overline{z}) + d(\overline{z}\,,\overline{x})$; e dado que $d(\overline{y}\,,\,\overline{z}) = $ $= d(\overline{z}\,,\overline{y}) < \delta$, sai $d(\overline{z}\,,\overline{x}) > 0$ ou seja $\overline{z} \neq \overline{x}$.

Vejamos agora que também a aderência ou fecho de um conjunto A é sempre um conjunto fechado. Dado que $Ad\,A = A \cup A'$ (ver propriedade **P17**) e atendendo à igualdade estabelecida na propriedade **P14**, tem-se, considerando a inclusão já provada, $(A')' \subseteq A'$,

$$[Ad\,A]' = (A \cup A')' = A' \cup (A')' \subseteq A' \cup A' = A' \subseteq Ad\,A\,,$$

o que permite concluir que o conjunto $Ad\,A$ é um conjunto fechado.

P20 : *Um conjunto A é fechado se e só se o seu complementar* $\overline{A}$ *for aberto. Um conjunto A é aberto se e só se o seu complementar* $\overline{A}$ *for fechado.*

Demonstração : Admita-se que A é fechado e demonstre-se que $\overline{A}$ é aberto. Tomando $\bar{x} \in \overline{A}$ existe uma vizinhança desse $\bar{x}$ sem nenhum ponto de A : com efeito, se em qualquer vizinhança do ponto $\bar{x}$ existisse pelo menos um ponto do conjunto A, tal ponto não poderia ser o próprio $\bar{x}$ (porque $\bar{x}$ pertence ao complementar de A) e então poderia concluir-se que o ponto $\bar{x}$ era ponto de acumulação de A ; mas como o conjunto A é fechado por hipótese, tal ponto $\bar{x}$ pertenceria então ao conjunto A (lembre-se que ser A fechado equivale a $A' \subseteq A$) e não a $\overline{A}$ como se admitiu inicialmente. Ora se existe uma vizinhança de $\bar{x}$ sem nenhum ponto de A, tal significa que essa vizinhança está contida no complementar de A, ou seja, existe uma $V_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq \overline{A}$, assim se provando que,

$$\bar{x} \in \overline{A} \Rightarrow \exists\, V_\varepsilon(\bar{x}) : V_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq \overline{A} \Rightarrow \bar{x} \in INT\,\overline{A},$$

significando esta implicação que $\overline{A} \subseteq INT\,\overline{A}$, ou ainda, que $\overline{A}$ é um conjunto aberto.

Admita-se agora que $\overline{A}$ é aberto e demonstre-se que então A é fechado, ou seja, demonstre-se que $A' \subseteq A$. Tomando $\bar{a} \notin A$ tem-se $\bar{a} \in \overline{A}$ e dado que por hipótese $\overline{A}$ é aberto, existe uma vizinhança de $\bar{a}$ contida no conjunto $\overline{A}$ o que implica que esse ponto $\bar{a}$ não pode ser ponto de acumulação de A . Provou-se então que $\bar{a} \notin A \Rightarrow \bar{a} \notin A'$ equivalendo esta implicação a ser $A' \subseteq A$. Está demonstrado o que se pretendia.

Para provar que o conjunto A é aberto se e só se $\overline{A}$ for fechado (segunda parte da propriedade), basta notar que pela primeira parte da propriedade o conjunto $B = \overline{A}$ será fechado se e só se $\overline{B} = A$ for aberto.

P21 : *A união de um qualquer número de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A intersecção de um qualquer número de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração : Sejam A_α conjuntos abertos em número finito ou infinito. Para provar que a união dos A_α é aberto teremos de provar que, $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha \subseteq INT\ (\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)$. Ora, dado um qualquer $\bar{a} \in \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ tem-se que esse ponto $\bar{a}$ pertence pelo menos a um dos A_α ; como esse A_α a que o ponto $\bar{a}$ pertence é um conjunto aberto, existirá uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ contida em A_α e portanto essa mesma vizinhança estará contida em $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, ou seja, o ponto $\bar{a}$ pertencerá a $INT\ (\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)$. Fica assim provada a inclusão desejada, isto é , fica provado que a união dos abertos A_α é igualmente um conjunto aberto.

Quanto à intersecção de um número qualquer de conjuntos fechados F_α note-se que,

$$\overline{\bigcap_\alpha F_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{F_\alpha} \quad \text{(2ª lei de De Morgan)}$$

e que os conjuntos $\overline{F_\alpha}$ são abertos (complementares de conjuntos fechados). Pela primeira parte da propriedade, já demonstrada, conclui-se que o conjunto $\overline{\bigcap_\alpha F_\alpha}$ é aberto e portanto o respectivo conjunto complementar $\bigcap_\alpha F_\alpha$ é fechado.

P22 : *A intersecção de um número finito de conjuntos abertos é um conjunto aberto. A reunião de um número finito de conjuntos fechados é um conjunto fechado.*

Demonstração : Vejamos em primeiro lugar o caso da reunião de um número finito de conjuntos fechados. Bastará considerar o caso de dois conjuntos, pois por indução finita poderemos facilmente passar ao caso de mais de dois conjuntos (mas em número finito). Sendo F e G conjuntos fechados, tem-se, usando as propriedades **P14** e **P18**,

$$(F \cup G)' = F' \cup G' \subseteq F \cup G\,,$$

o que prova que a união de F e G é também um conjunto fechado.

Vejamos agora o caso da intersecção de dois conjuntos abertos (para mais de dois, mas em número finito, procede-se por indução). Sendo A e B conjuntos abertos, tem-se que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são fechados e, portanto, $\overline{A} \cup \overline{B}$ é fechado; então o complementar de $\overline{A} \cup \overline{B}$, que é precisamente $A \cap B$, é aberto.

Convirá esclarecer que a reunião de uma infinidade de conjuntos fechados pode não ser um conjunto fechado e, do mesmo modo, a intersecção de uma infinidade de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. É fácil encontrar exemplos que mostram essa possibilidade. A este propósito a propriedade seguinte é elucidativa:

P23 : *Qualquer conjunto fechado é a intersecção de uma infinidade numerável de conjuntos abertos. Qualquer conjunto aberto é a união de uma infinidade numerável de conjuntos fechados.*

Demonstração: Vejamos em primeiro lugar o caso de um conjunto fechado F. Com r número racional positivo, definam-se os conjuntos,

$$I_r = \{\ \bar{x} : \exists\ \bar{a} \in F \ \textit{tal que}\ d(\bar{x}\,,\bar{a}) < r\ \}\,,$$

que como veremos de seguida são todos abertos. Com efeito, dado um $\bar{x} \in I_r$ existirá um $\bar{a} \in F$ tal que $d(\bar{x}\,,\bar{a}) < r$. Fixando $\varepsilon = r - d(\bar{x}\,,\bar{a}) > 0$, prova-se que $V_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq I_r$; de facto, sendo $\bar{y} \in V_\varepsilon(\bar{x})$, tem-se $d(\bar{y}\,,\bar{x}) < \varepsilon = r - d(\bar{x}\,,\bar{a})$, donde resulta,

$$d(\overline{y}\,,\,\overline{a}\,) \leq d(\overline{y}\,,\,\overline{x}\,) + d(\overline{x}\,,\,\overline{a}\,) < r\,,$$

ou seja, $\overline{y} \in I_r$.

Falta provar que a intersecção dos conjuntos abertos I_r é igual ao conjunto fechado F , devendo notar-se que os conjuntos I_r são em infinidade numerável (são tantos quantos os racionais positivos que já sabemos serem em infinidade numerável). Para tal notemos que:

a) O conjunto F está contido em qualquer I_r , tal resultando imediatamente do modo como se definem os conjuntos I_r ;

b) De a) resulta logo que,

$$F \subseteq \bigcap_{r \in Q^+} I_r \;;$$

c) Note-se agora que, sendo $\overline{x} \notin F$, tem-se $\overline{x} \in \overline{F}$ e como $\overline{F}$ é um conjunto aberto (dado que F é fechado) existe uma $V_\varepsilon(\overline{x})$ contida em $\overline{F}$, ou seja, nessa $V_\varepsilon(\overline{x})$ não há pontos do conjunto F ; então, sendo r um racional positivo menor que ε , nenhum ponto $\overline{a} \in F$ é tal que $d(\overline{x}\,,\,\overline{a}\,) < r < \varepsilon$, caso contrário esse $\overline{a}$ seria um ponto de F pertencente a $V_\varepsilon(\overline{x})$, o que já vimos não ser possível; mas então, por definição dos conjuntos I_r tem-se que o ponto $\overline{x}$ que vimos considerando não pertence aos I_r com racionais $r < \varepsilon$; em conclusão,

$$\overline{x} \notin F \Rightarrow \overline{x} \notin \bigcap_{r \in Q^+} I_r \;,$$

o que equivale a ser $\bigcap_{r \in Q^+} I_r \subseteq F$;

d) As inclusões demonstradas em b) e em c) permitem concluir que $\bigcap_{r \in Q^+} I_r = F$, igualdade que se pretendia demonstrar.

O caso de um conjunto aberto A é agora imediato: o complementar de A é fechado, logo é a intersecção de uma infinidade numerável de conjuntos abertos, como acabou de demonstrar-se. Mas então o conjunto A será a reunião de uma infinidade numerável de complementares de conjuntos abertos (2ª lei de De Morgan); ou seja, o conjunto A será a reunião de uma infinidade numerável de conjuntos fechados (dado que os complementares dos abertos são fechados).

P24 : *A condição necessária e suficiente para que $\overline{a}$ seja ponto de acumulação de um conjunto A é que em qualquer vizinhança desse ponto se encontrem infinitos pontos de A*

Demonstração : A condição é obviamente suficiente: se em cada vizinhança do ponto se encontrarem infinitos pontos do conjunto, encontra-se pelo menos um ponto do conjunto e portanto, por definição, trata-se de um ponto de acumulação do conjunto em causa.

Vejamos que a condição é igualmente necessária. Admita-se que $\bar{a}$ é ponto de acumulação do conjunto A. Se em certa $V_\varepsilon(\bar{a})$ apenas se encontrarem finitos pontos do conjunto, sejam $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... , $\bar{x}_k$ os pontos de A distintos de $\bar{a}$ que se encontram naquela vizinhança. Fixando agora,

$$\delta = Mín\ \{\ d(\bar{x}_1\ ,\ \bar{a}\ )\ ; d(\bar{x}_2\ ,\ \bar{a}\ )\ ; ... ; d(\bar{x}_k\ ,\ \bar{a}\ )\ \} > 0\ ,$$

vê-se de imediato que em $V_\delta(\bar{a})$ não existem pontos do conjunto A para além eventualmente do próprio $\bar{a}$: com efeito, se algum $\bar{y} \neq \bar{a}$ pertencesse ao conjunto A e igualmente a $V_\delta(\bar{a})$, ter-se-ia $d(\bar{y}\ ,\ \bar{a}) < \delta < \varepsilon$ e portanto esse $\bar{y}$ pertenceria igualmente a $V_\varepsilon(\bar{a})$; o ponto $\bar{y}$ referido seria então um dos x_j ($j = 1$, 2 , ... , k) o que obrigaria a ser $d(\bar{y}\ ,\ \bar{a}) \geq \delta$, dado o modo como se definiu o valor δ. Mas se em $V_\delta(\bar{a})$ não existem pontos do conjunto A para além eventualmente do próprio $\bar{a}$, conclui-se que o ponto $\bar{a}$ não pode ser ponto de acumulação do conjunto A .

<u>Chega-se assim a uma contradição</u>: se tomarmos um ponto de acumulação de um conjunto A e admitirmos a existência de uma vizinhança desse ponto onde apenas haja um número finito de pontos do conjunto, conclui-se que tal ponto não pode ser ponto de acumulação desse conjunto. Tal significa que, sendo $\bar{a}$ ponto de acumulação de A, então necessariamente em qualquer vizinhança desse ponto existem infinitos pontos do conjunto.

Corolário 1 : *Os conjuntos finitos não admitem pontos de acumulação*

Corolário 2 : *É condição necessária de existência de pontos de acumulação de um conjunto, que este seja um conjunto infinito.*

3. <u>Conjuntos limitados</u>

Um conjunto $A \subset \mathbf{R}^n$ diz-se limitado se e só se existe um número real $k > 0$ tal que $\|\bar{x}\| \leq k$ qualquer que seja $\bar{x} \in A$. Têm-se propriedades semelhantes às estudadas para os subconjuntos limitados de $\mathbf{R}$:

P25 : *Um conjunto* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *é limitado se e só se existe um* $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ *e um* $\varepsilon > 0$ *tal que* $A \subseteq V_\varepsilon(\bar{a})$.

<u>Demonstração</u> : A condição é necessária. Se $A \subseteq \mathbf{R}^n$ é limitado, existe um $k > 0$ tal que $\|\bar{x}\| \leq k$ qualquer que seja $\bar{x} \in A$. Então, tomando $\varepsilon = 2\,k$ e sendo $\bar{0}$ o vector nulo, tem-se $A \subseteq V_\varepsilon(\bar{0})$. A condição é igualmente suficiente, pois de $A \subseteq V_\varepsilon(\bar{a})$ resulta facilmente $\|\bar{x}\| \leq k$ qualquer que seja $\bar{x} \in A$, com $k = \varepsilon + \|\bar{a}\|$: de facto, para $\bar{x} \in A$ tem-se $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$, ou seja, $\|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon$; e claro que,

$$\|\bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{a} + \bar{a}\| \leq \|\bar{x} - \bar{a}\| + \|\bar{a}\| < \varepsilon + \|\bar{a}\| = k\ .$$

P26 : *A união de um número finito de conjuntos limitados é um conjunto limitado*

Demonstração : Sejam A_i , $i = 1, 2, ..., k$, conjuntos limitados. Por definição, para cada conjunto A_i existe um real $k_i > 0$ tal que $\| \bar{x} \| \leq k_i$ qualquer que seja $\bar{x} \in A_i$. Passando a considerar $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, seja $k = \textit{máx}\; k_i$; conclui-se com faci-lidade que $\| \bar{x} \| \leq k$ qualquer que seja $\bar{x} \in A$, ou seja o conjunto A é igualmente limitado.

P27 : *A intersecção de conjuntos limitados (em qualquer número) é um conjunto limitado.*

Demonstração: Basta notar que o subconjunto de um conjunto limitado é igualmente limitado e que a intersecção de conjuntos é sempre um subconjunto de qualquer um deles.

P28 : *O derivado e o fecho de um conjunto limitado são conjuntos limitados*

Demonstração : Basta fazer a demonstração para o derivado, porque sendo o derivado limitado, como o fecho (ou aderência) é a união do conjunto com o seu derivado ele é igualmente limitado (propriedade **P26**). Seja A limitado e vejamos então que A' é igualmente limitado . Seja $V_\varepsilon(\bar{a})$ a vizinhança que contém A e vejamos então que $A' \subseteq V_{2\varepsilon}(\bar{a})$, o que provará ser A' igualmente limitado. Dado um qualquer $\bar{y} \in A'$, tem-se que em $V_\varepsilon(\bar{y})$ existe pelo menos um $\bar{x}_\varepsilon \neq \bar{y}$ que pertence a A , logo também a $V_\varepsilon(\bar{a})$; então por ser $\bar{x}_\varepsilon$ pertencente a $V_\varepsilon(\bar{a})$ e $V_\varepsilon(\bar{y})$, tem-se que $d(\bar{y}, \bar{a}) \leq$ $\leq d(\bar{y}, \bar{x}_\varepsilon) + d(\bar{x}_\varepsilon, \bar{a}) < 2\varepsilon$, ou seja $\bar{y} \in V_{2\varepsilon}(\bar{a})$; em conclusão, $A' \subseteq V_{2\varepsilon}(\bar{a})$ como se queria provar.

4. Pontos impróprios em $\mathbf{R}^n$

Pelas mesmas razões que as apontadas para o caso de **R** , nomeadamente maior generalidade e simplicidade de certos teoremas no âmbito da teoria dos limites, é usual considerar, para além dos elementos de $\mathbf{R}^n$, os chamados pontos impróprios.

No caso presente, chama-se *ponto impróprio* a $\bar{b} = (b_1 , b_2 , \; ... \; , b_n)$ quando pelo menos uma das coordenadas b_i for um dos símbolos $+\infty$ ou $-\infty$. As vizinhanças dos pontos impróprios definem-se como segue:

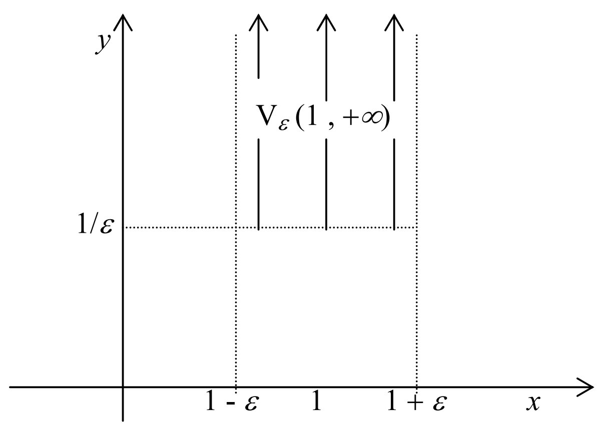
$V_\varepsilon(\bar{b}) = \{ (x_1 , ... , x_n) \; : \; | x_i - b_i | < \varepsilon ,\; se\; b_i \in \mathbf{R} \,;\; x_i > 1/\varepsilon ,\; se\; b_i = +\infty$ **;**

$$x_i < -1/\varepsilon\,,\ se\ \ b_i = -\infty \} \ .$$

Por exemplo,

$$\mathrm{V}_\varepsilon(1\,,+\infty) = \{\,(x\,,y)\ :\ 1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon \quad \wedge \quad y > 1/\varepsilon\,\}\ ,$$

conjunto a que corresponde geometricamente a figura plana que a seguir se representa :



Com esta atribuição de vizinhanças, define-se agora sem qualquer dificuldade o conceito de ponto de acumulação impróprio mas, em qualquer caso, no derivado de um conjunto não se incluem os eventuais pontos impróprios de acumulação. A definição é a seguinte: *diz-se que* $(b_1\,,b_2\,,\ \dots\ ,\ b_n)$, *com pelo menos um dos* b_i *infinito* $(+\infty$ *ou* $-\infty)$ *é ponto impróprio de acumulação de* X *se só se em qualquer* $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{b})$ *se encontra pelo menos um ponto* $\bar{x} \in X$.

5. Sucessões em $\mathbf{R^n}$

5.1 - Generalidades

Uma *sucessão de vectores de* $\mathbf{R^n}$ é uma aplicação de $\mathbf{N}$ em $\mathbf{R^n}$. O vector $\bar{u}_1$ que corresponde ao natural 1 é o primeiro termo da sucessão ; o vector $\bar{u}_2$ que corresponde ao natural 2 é o segundo termo da sucessão ; em geral, o vector $\bar{u}_p$ que corresponde ao natural p é o p-ésimo – *termo geral* ou ainda *termo de ordem* p – da sucessão[1]. Os termos de uma sucessão dispõem-se por ordem crescente dos respectivos índices (por ordem crescente dos naturais a que correspondem) : $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, ... , $\bar{u}_p$, ...

A cada termo $\bar{u}_p = (u_{1\,p} , u_{2\,p} , \ ... \ , u_{n\,p})$, correspondem as n coordenadas reais $u_{j\,p}$, com $j = 1 , 2 , \ \dots \ , n$, pelo que a sucessão de termo geral $\bar{u}_p$ fica perfeitamente conhecida se forem conhecidas as n sucessões de reais de termos gerais $u_{j\,p}$. Assim, no espaço $\mathbf{R^3}$, a sucessão de termo geral $\bar{u}_n = (x_n , y_n , z_n)$ fica perfeitamente conhecida se conhecermos as expressões analíticas dos termos gerais das três sucessões reais x_n , y_n e z_n : por exemplo,

$$x_n = \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 1} \quad , \quad y_n = \frac{n^2 + n - 1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad , \; z_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{(1 + 1/n)^n} \quad .$$

No desenvolvimento da teoria desempenha papel significativo o chamado conjunto dos termos de uma sucessão. Trata-se do conjunto $U = \{ \, \bar{x} \ : \ \exists \ n \in \mathbf{N} \ : \bar{u}_p = \bar{x} \, \}$, conjunto que, dependendo da sucessão, pode ser finito ou infinito numerável tal como no caso das sucessões reais.

Uma sucessão $\bar{u}_p = (u_{1\,p} , u_{2\,p} , \ ... \ , u_{n\,p})$ de vectores de $\mathbf{R^n}$ diz-se *limitada* se e só se for limitado o conjunto U dos seus termos, o que equivale a existir um real $k > 0$ tal que $\|\bar{u}_p\| \leq k$, para $p = 1 , 2 , 3 , \dots$. Facilmente se conclui que sendo $\bar{u}_p$ limitada são também limitadas as n sucessões reais $u_{1\,p}$, $u_{2\,p}$, ... , $u_{n\,p}$ e inversamente. Com efeito, como $|\, u_{i\,p} \,| \leq \|\bar{u}_p\|$ se $\bar{u}_p$ for sucessão limitada também o serão as n sucessões $u_{i\,p}$; inversamente se se tiver $|\, u_{i\,p} \,| \leq k_i$ ($i = 1 , 2 , \dots , n$) ter-se-á,

$$\|\bar{u}_p\| \leq k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2} \qquad (p = 1 , 2 , 3 , \dots) \ .$$

5.2 - Conceito de limite. Teoremas fundamentais

Diz-se que $lim \ \bar{u}_p = \bar{u}$ (vector de $\mathbf{R^n}$ ou ponto impróprio) se só se :

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ p_\varepsilon : \ p > p_\varepsilon \Rightarrow \ \bar{u}_p \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{u}) \ .$$

[1] Usa-se aqui a letra p para designar a ordem do termo geral da sucessão, para evitar confusões com o número n de dimensões do espaço. Porém, sempre que se esteja a considerar uma dimensão em concreto para o espaço (por exemplo nos casos do $\mathbf{R^2}$ ou $\mathbf{R^3}$) retomaremos o uso habitual da letra n para designar a ordem do termo geral da sucessão

Sendo $\bar{u}$ vector de $\mathbf{R^n}$, a condição $\bar{u}_p \in V_\varepsilon(\bar{u})$ pode escrever-se $\| \bar{u}_p - \bar{u} \| < \varepsilon$. Sendo, por outro lado, $\bar{u} = (u_1 , u_2 , \dots , u_n)$ ponto impróprio, a condição $\bar{u}_p \in V_\varepsilon(\bar{u})$ equivale à verificação conjunta das seguintes condições,

$$| u_{i\,p} - u_i | < \varepsilon \ , \ \text{para os } u_i \text{ reais} \ ,$$

$$u_{i\,p} > 1/\varepsilon \ , \ \text{para os } u_i = +\infty \ ,$$

$$u_{i\,p} < -1/\varepsilon \ , \ \text{para os } u_i = -\infty \ .$$

As sucessões com limite pertencente a $\mathbf{R^n}$ dizem-se *convergentes* .

O cálculo do limite de uma sucessão em $\mathbf{R^n}$ não oferece qualquer dificuldade, pois reduz--se ao cálculo dos limites das sucessões reais cujos termos gerais são as coordenadas do termo geral daquela, nos termos do teorema seguinte:

Teorema 1 : *Sendo* $\bar{u}_p = (u_{1\,p} , u_{2\,p} , \ \dots \ , u_{n\,p})$ *uma sucessão em* $\mathbf{R^n}$ *tem-se,*

$$\lim \ \bar{u}_p = \bar{u} = (u_1 , u_2 , \ \dots , u_n)$$

se e só se, $\lim u_{1\,p} = u_1$, $\lim u_{2\,p} = u_2$, ... , $\lim u_{n\,p} = u_n$

<u>Demonstração</u> : Consideram-se separadamente dois casos, consoante $(u_1 , u_2 , \ \dots , u_n)$ seja um vector de $\mathbf{R^n}$ ou um ponto impróprio .

<u>1º Caso</u> : O ponto $(u_1 , u_2 , \ \dots , u_n) \in \mathbf{R^n}$. Neste caso,

a) Se $\lim \ (u_{1\,p} , u_{2\,p} , \ \dots \ , u_{n\,p}) = (u_1 , u_2 , \ \dots , u_n)$, então qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma ordem p_ε tal que para $p > p_\varepsilon$ se tem,

$$\sqrt{(u_{1p} - u_1)^2 + (u_{2p} - u_2)^2 + \cdots + (u_{n\,p} - u_n)^2} < \varepsilon \ ;$$

então a partir da mesma ordem, tem-se,

$$| u_{1\,p} - u_1| < \varepsilon \ , \ | u_{2\,p} - u_2| < \varepsilon \ , \ \dots \ , \ | u_{n\,p} - u_n| < \varepsilon \ ,$$

o que prova ser $\lim u_{1\,p} = u_1$, $\lim u_{2\,p} = u_2$, ... , $\lim u_{n\,p} = u_n$.

b) Inversamente, se $\lim u_{1\,p} = u_1$, $\lim u_{2\,p} = u_2$, ... , $\lim u_{n\,p} = u_n$, então qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem ordens $p_{1\,\varepsilon}$, $p_{2\,\varepsilon}$, ... , $p_{n\,\varepsilon}$, a partir das quais se tem respectivamen-te,

$$| u_{1\,p} - u_1| < \varepsilon/\sqrt{n} \ , \ | u_{2\,p} - u_2| < \varepsilon/\sqrt{n} \ , \ \dots \ , \ | u_{n\,p} - u_n| < \varepsilon/\sqrt{n} \ ;$$

quadrando e somando, obtém-se para $p > p_\varepsilon = Máx \ \{ p_{1\,\varepsilon} , p_{2\,\varepsilon} , \ \dots \ , \ p_{n\,\varepsilon} \}$,

$$\sqrt{(u_{1p}-u_1)^2+(u_{2p}-u_2)^2+\cdots+(u_{np}-u_n)^2} < \varepsilon \ ,$$

o que mostra ser $lim\,(u_{1\,p}\,, u_{2\,p}\,,\ \dots\ , u_{n\,p}) = (u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_n)$.

<u>**2º Caso**</u> **:** O ponto $(u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_n)$ é um ponto impróprio . Neste caso,

a) Se $lim\,(u_{1\,p}\,, u_{2\,p}\,,\ \dots\ , u_{n\,p}) = (u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_n)$, então qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe uma ordem p_ε tal que para $p > p_\varepsilon$ se tem,

$$|\, u_{i\,p} - u_i \,| < \varepsilon \ , \ para\ os\ \ u_i\ \ reais \ ,$$

$$u_{i\,p} > 1/\varepsilon \ , \ \ para\ os\ \ u_i = +\infty \ ,$$

$$u_{i\,p} < -1/\varepsilon \ , \ para\ os\ \ u_i = -\infty \ .$$

sendo portanto, $lim\ u_{1\,p} = u_1$, $lim\ u_{2\,p} = u_2$, ... , $lim\ u_{n\,p} = u_n$.

b) Inversamente, se $lim\ u_{1\,p} = u_1$, $lim\ u_{2\,p} = u_2$, ... , $lim\ u_{n\,p} = u_n$, então qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existem ordens $p_{1\ \varepsilon}$, $p_{2\ \varepsilon}$, ... , $p_{n\ \varepsilon}$, a partir das quais se tem respectivamen-te,

$$|\, u_{i\,p} - u_i \,| < \varepsilon \ , \ para\ os\ \ u_i\ \ reais \ ,$$

$$u_{i\,p} > 1/\varepsilon \ , \ \ para\ os\ \ u_i = +\infty \ ,$$

$$u_{i\,p} < -1/\varepsilon \ , \ para\ os\ \ u_i = -\infty \ .$$

sendo portanto , $lim\,(u_{1\,p}\,, u_{2\,p}\,,\ \dots\ , u_{n\,p}) = (u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_n)$.

Vejamos três exemplos de aplicação.

1) Tem-se,

$$lim\,\left[1/n\ ,\ n/(n+1)\,,\ e^{-n}\right] = (\ 0\ ,\ 1\ ,\ 0\ )$$

2) Tem-se,

$$lim\,\left[n\ ,\ n/(2n+1)\right] = (\ +\infty\ ,\ 1/2\ )\ \ (ponto\ impróprio)$$

3) Não existe o $lim\,\left[(-1)^n\,,\ n/(2n+1)\right]$, porque a sucessão real $(-1)^n$ não tem limite

Estudam-se seguidamente alguns teoremas importantes sobre limites.

Teorema 2 : *Sendo lim* $\overline{u}_p = \overline{u}$ *e* $\overline{v} \neq \overline{u}$ *não pode ter-se* *lim* $\overline{u}_p = \overline{v}$ (**unicidade do limite**)

<u>Demonstração</u> : Com $\overline{v} \neq \overline{u}$ é possível , escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, ter duas vizinhanças $V_\varepsilon(\overline{u})$ e $V_\varepsilon(\overline{v})$ sem elementos comuns (disjuntas). Ora, sendo *lim* $\overline{u}_p = \overline{u}$ tem-se $\overline{u}_p \in V_\varepsilon(\overline{u})$ de certa ordem em diante não podendo portanto ter-se $\overline{u}_p \in V_\varepsilon(\overline{v})$ de certa ordem em diante, ou seja, não pode ter-se *lim* $\overline{u}_p = \overline{v}$.

Teorema 3 : *Sucessão com limite pertencente a* $\mathbf{R^n}$ *é limitada*

<u>Demonstração</u> : Se *lim* $\overline{u}_p = \overline{u} \in \mathbf{R^n}$, tem-se de certa ordem p_1 em diante $\|\overline{u}_p - \overline{u}\| < 1$. Fazendo $k = Máx\,\{1\ ,\ \|\overline{u}_1 - \overline{u}\|\ ,\ \|\overline{u}_2 - \overline{u}\|\ ,\ \dots\ ,\ \|\overline{u}_{p_1} - \overline{u}\|\}$, tem-se $\|\overline{u}_p - \overline{u}\| \leq \leq k$ $(p = 1, 2, 3, \dots)$. Portanto,

$$\|\overline{u}_p\| = \|\overline{u}_p - \overline{u} + \overline{u}\| \leq \|\overline{u}_p - \overline{u}\| + \|\overline{u}\| \leq k^* = k + \|\overline{u}\|\ ,$$

para $p = 1, 2, 3, \dots$, o que mostra ser limitada a sucessão $\overline{u}_p$.

Nos teoremas seguintes intervém uma condição importante verificada por certas sucessões. Uma sucessão de vectores de $\mathbf{R^n}$ verifica a condição de Cauchy se e só se,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, p_\varepsilon : p > m > p_\varepsilon \Rightarrow \|\overline{u}_p - \overline{u}_m\| < \varepsilon\ .$$

Prova-se com facilidade que as sucessões convergentes verificam a condição de Cauchy.

Teorema 4 : *Sendo lim* $\overline{u}_p = \overline{u} \in \mathbf{R^n}$ *, então a sucessão* $\overline{u}_p$ *verifica a condição de Cauchy*

<u>Demonstração</u> : Por ser *lim* $\overline{u}_p = \overline{u} \in \mathbf{R^n}$, tem-se,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, p_\varepsilon : p > p_\varepsilon \Rightarrow \|\overline{u}_p - \overline{u}\| < \varepsilon/2\ .$$

Considerando $p > m > p_\varepsilon$, temos então ,

$$\|\overline{u}_p - \overline{u}_m\| = |\overline{u}_p - \overline{u} + \overline{u} - \overline{u}_m| \leq \|\overline{u}_p - \overline{u}\| + \|\overline{u} - \overline{u}_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ ,$$

ficando assim provado que a sucessão verifica a condição de Cauchy.

No teorema seguinte vamos ver que, inversamente, se uma sucessão verifica a condição de Cauchy. então tem como limite certo vector de $\mathbf{R^n}$.

Teorema 5 : *Se* $\overline{u}_p$ *verifica a condição de Cauchy , então existe certo vector* $\overline{u} \in \mathbf{R^n}$ *tal que lim* $\overline{u}_p = \overline{u}$

<u>Demonstração</u> : A verificação por parte da sucessão $\overline{u}_p = (u_{1\,p}\ ,\ u_{2\,p}\ ,\ \ ...\ \ ,\ u_{n\,p})$ da condição,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ ,\ \exists\, p_\varepsilon\ :\ p > \ m > p_\varepsilon \Rightarrow \|\ \overline{u}_p\ \text{-}\ \overline{u}_m\ \| < \varepsilon\ .$$

implica que cada uma das sucessões reais coordenadas $u_{i\,p}$ ($i = 1\ ,2\ ,\ \ldots\ ,n$) verifica a condição,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ ,\ \exists\, p_\varepsilon\ :\ p > \ m > p_\varepsilon \Rightarrow\ |\ u_{i\,p} - u_{i\,m}\ | < \varepsilon\ ,$$

porque $|\ u_{i\,p} - u_{i\,m}\ | \leq \|\ \overline{u}_p\ \text{-}\ \overline{u}_m\ \|$, tal significando que essas n sucessões reais verificam a condição de Cauchy, as quais portanto têm limites reais,

$$lim\ u_{1\,p} = u_1\ ,\ \ lim\ u_{2\,p} = u_2\ ,\ \ \ ...\ \ ,\ \ lim\ u_{n\,p} = u_n$$

De acordo com o teorema 1 , tal garante que $lim\ \overline{u}_p = \overline{u} = (u_1\ ,u_2\ ,\ \ldots\ ,u_n)$.

Os teoremas que a seguir se demonstram relacionam o conceito de limite de uma sucessão com algumas noções topológicas já estudadas.

Teorema 6 : *Sendo* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *, a condição necessária e suficiente para que* $\overline{a}$ ($\overline{a} \in \mathbf{R^n}$ *, ou* $\overline{a}$ *impróprio*) *seja ponto de acumulação de A é que exista exista uma sucessão* $\overline{u}_p$ *de elementos de A, com infinitos termos distintos de* $\overline{a}$ *, tal que lim* $\overline{u}_p = \overline{a}$

<u>Demonstração</u> : A condição é necessária. Sendo $\overline{a}$ ponto de acumulação de A , em qualquer $V_\varepsilon(\overline{a})$ existe pelo menos um $\overline{u}_\varepsilon \neq \overline{a}$ pertencente a A. Tomando então $\varepsilon_p = 1/p$, tem-se que em $V_{1/p}(\overline{a})$ existe um $\overline{u}_p \neq \overline{a}$ pertencente ao conjunto A. Vejamos que se tem $lim\ \overline{u}_p = \overline{a}$: dado um qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se para $p > p_\varepsilon$ (com certa ordem p_ε) que $1/p < \varepsilon$ e portanto,

$$p > p_\varepsilon \Rightarrow\ \overline{u}_p \in V_{1/p}(\overline{a})\ \ \wedge\ [\ V_{1/p}(\overline{a})\ \subset\ V_\varepsilon(\overline{a})\ ]\ \ \Rightarrow\ \ \overline{u}_p\ \in\ V_\varepsilon(\overline{a})\ \ ,$$

assim se concluindo que $lim\ \overline{u}_p = \overline{a}$.

A condição é suficiente. Se existe uma sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A com infinitos termos distintos de $\overline{a}$ tal que $lim\ \overline{u}_p = \overline{a}$, vejamos que $\overline{a}$ é ponto de acumulação de A. Dada uma qualquer $V_\varepsilon(\overline{a})$ nela se encontram todos os termos $\overline{u}_p$ de certa ordem em diante (por ser $lim\ \overline{u}_p = \overline{a}$) e portanto, dado haver infinitos termos da sucessão distintos de $\overline{a}$, nela se encontra pelo menos um elemento de A distinto de $\overline{a}$, logo $\overline{a}$ é ponto de acumulação do conjunto A , como se pretendia provar.

Teorema 7 : *Um vector $\overline{a}$ é aderente de um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ se e só se existe uma sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A tal que $lim\ \overline{u}_p = \overline{a}$*

Demonstração : Se $\overline{a} \in Ad\,A = A \cup A'$, ou $\overline{a} \in A$ ou $\overline{a} \in A'$. No primeiro caso, a sucessão de termo geral $\overline{u}_p = \overline{a} \in A$ tem por limite o ponto $\overline{a}$; no segundo caso, ou seja, se $\overline{a} \in A'$, o teorema 6 garante que existe uma sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A que tem por limite o ponto $\overline{a}$.

Inversamente, se existe uma sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A que tem por limite o ponto $\overline{a}$, das duas uma: ou os termos da sucessão são todos iguais a $\overline{a}$ de certa ordem em diante e então $\overline{a} \in A$; ou há infinitos termos $\overline{u}_p$ distintos de $\overline{a}$ e então pelo teorema 6 tem-se $\overline{a} \in A'$; em qualquer dos casos $\overline{a} \in Ad\,A = A \cup A'$.

Teorema 8 : *Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ é fechado se e só se, qualquer que seja a sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A tendo como limite certo vector de $\mathbf{R^n}$, esse limite pertence ao conjunto A*

Demonstração : Se A é fechado, então $A = Ad\ A$. Seja $\overline{u}_p$ uma qualquer sucessão de elementos de A tal que $\overline{a} = lim\ \overline{u}_p$ ($\overline{a} \in \mathbf{R^n}$) ; então, pelo teorema 7, esse $\overline{a}$ pertence a $Ad\,A$, logo pertence a A .

Inversamente, se para qualquer sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A com limite em $\mathbf{R^n}$ esse limite pertence a A , então $A = Ad\,A$ (ou seja, A é fechado). Basta provar que $Ad\,A \subseteq A$, porque a inclusão contrária é sempre verdadeira. Ora dado um qualquer $\overline{a} \in Ad\ A$, o teorema 7 garante a existência de uma sucessão $\overline{u}_p$ de elementos de A e com limite $\overline{a} = lim\ \overline{u}_p$ e portanto, por hipótese, $\overline{a} \in A$. Fica assim provada a inclusão desejada.

5.3 - <u>Sublimites. Teoremas fundamentais</u>

Dá-se o nome de *subsucessão* da sucessão $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, ... , $\overline{u}_p$, ... a qualquer sucessão $\overline{u}_{\alpha_1}$, $\overline{u}_{\alpha_2}$, ... , $\overline{u}_{\alpha_p}$, ... em que os α_p constituem uma sucessão estritamente crescente de números naturais. Claro que se $lim\ \overline{u}_p = \overline{u}$, também $lim\ \overline{u}_{\alpha_p} = \overline{u}$, porque se a partir de certa ordem p_ε se tem $\overline{u}_p \in \mathrm{V}_\varepsilon(\overline{u})$, a partir dessa mesma ordem tem-se também $\overline{u}_{\alpha_p} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\overline{u})$, porque $p > p_\varepsilon \Rightarrow \alpha_p \geq p > p_\varepsilon$. Note-se que esta propriedade é válida mesmo no caso mais geral em que α_p é uma sucessão de números naturais, não necessariamente crescente, desde que $lim\ \alpha_p = +\infty$: com efeito, sendo p_ε a ordem a partir da qual se tem $\overline{u}_p \in \mathrm{V}_\varepsilon(\overline{u})$ e sendo k_ε a ordem a partir da qual se tem $\alpha_p > p_\varepsilon$, resulta que $p > k_\varepsilon \Rightarrow \alpha_p > p_\varepsilon \Rightarrow \bar{u}_{\alpha_p} \in V_\varepsilon(\bar{u})$, assim se concluindo que $lim\ \bar{u}_{\alpha_p} = \bar{u}$.

Os limites das subsucessões de uma sucessão de chamam-se *sublimites* da sucessão original.

O teorema seguinte tem grande utilidade prática na determinação dos sublimites de uma sucessão :

Teorema 9 : *Dada a sucessão* $\bar{u}_p$ *considerem-se as seguintes subsucessões em número finito :*

$$\begin{array}{l} \bar{u}_{\alpha_1}, \bar{u}_{\alpha_2}, \dots, \bar{u}_{\alpha_p}, \dots, \ \textit{com limite } \bar{\alpha} \\ \bar{u}_{\beta_1}, \bar{u}_{\beta_2}, \dots, \bar{u}_{\beta_p}, \dots, \ \textit{com limite } \bar{\beta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{u}_{\omega_1}, \bar{u}_{\omega_2}, \dots, \bar{u}_{\omega_p}, \dots, \ \textit{com limite } \bar{\omega} \end{array}$$

e admita-se que cada termo $\bar{u}_p$ *da sucessão está numa e numa só das subsucessões consideradas. Nessas condições, nenhum* $\bar{\lambda} \neq \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots, \bar{\omega}$ *pode ser sublimite de* $\bar{u}_p$ *, ou seja, a sucessão apenas admite os sublimites* $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots, \bar{\omega}$

Demonstração : Dado $\bar{\lambda} \neq \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots, \bar{\omega}$ fixe-se $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que a vizinhança $V_\varepsilon(\bar{\lambda})$ não tenha pontos em comum com nenhuma das vizinhanças $V_\varepsilon(\bar{\alpha})$, $V_\varepsilon(\bar{\beta})$, … , $V_\varepsilon(\bar{\omega})$. Todos os termos de u_{α_p} excepto quando muito um número finito deles pertencem a $V_\varepsilon(\bar{\alpha})$; todos os termos de u_{β_p} excepto quando muito um número finito deles pertencem a $V_\varepsilon(\bar{\beta})$; etc. Como as subsucessões são em número finito e nelas se encontram todos os termos de $\bar{u}_p$, pode concluir-se que quando muito apenas um número finito de termos $\bar{u}_p$ poderão pertencer a $V_\varepsilon(\bar{\lambda})$, o que exclui a possibilidade de $\bar{\lambda}$ ser sublimite da sucessão.

Estudam-se seguidamente alguns importantes teoremas envolvendo o conceito de sublimite.

Teorema 10 : *Qualquer sucessão* $\bar{u}_p$ *de vectores de* $\mathbf{R^n}$*, admite uma subsucessão* $\bar{u}_{\alpha_p}$ *com limite (vector de* $\mathbf{R^n}$ *ou impróprio)*

Demonstração : Vamos usar o método de indução matemática aplicado sobre o número n de dimensões do espaço.

Para $n = 1$ o teorema é verdadeiro, pois nesse caso trata-se de uma sucessão de números reais para os quais já sabemos existir sempre um sublimite, finito ou infinito.

Admita-se o teorema verdadeiro para $n = k$ (hipótese de indução) e vejamos que é também verdadeiro para $n = k + 1$. Dada a sucessão $\overline{u}_p = (u_{1\,p}\,, u_{2\,p}\,,\ \dots\ , u_{k\,p}\,,\ u_{k+1\,:\,p})$ de vectores de $\mathbf{R}^{\mathbf{k+1}}$, a sucessão $\overline{u}^*_p = (u_{1\,p}\,, u_{2\,p}\,,\ \dots\ , u_{k\,p})$ de vectores de $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$ admite uma subsucessão com limite (hipótese de indução) ; seja $\overline{u}^*_{\alpha_p} = (u_{1\alpha_p}\,, u_{2\alpha_p}\ ,\ \dots\ ,\ u_{k\,\alpha_p})$ a subsucessão em causa e $\overline{u}^* = (u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_k)$ o respectivo limite (vector de $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$ ou impróprio). A sucessão real $u_{k+1\,:\,\alpha_p}$ pode não ter limite , mas admite por certo uma subsucessão com limite (finito ou infinito) ; seja $u_{k+1\,:\,\beta_p}$ essa subsucessão e u_{k+1} o respectivo limite . Dado que os β_p são alguns dos α_p , $\overline{u}^*_{\beta_p} = (u_{1\beta_p}\,, u_{2\beta_p}\ ,\ \dots\ ,\ u_{k\,\beta_p})$ é uma subsucessão de $\overline{u}^*_{\alpha_p} = (u_{1\alpha_p}\,, u_{2\alpha_p}\ ,\ \dots\ ,\ u_{k\,\alpha_p})$ e, portanto,

$$lim\ \overline{u}^*_{\beta_p} = lim\ \overline{u}^*_{\alpha_p} = \overline{u}^* = (u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_k)\ ;$$

então ,

$$lim\ \overline{u}_{\beta_p} = lim\,(u_{1\beta_p}\,, u_{2\beta_p}\ ,\ \dots\ ,\ u_{k\,\beta_p}\,, u_{k+1\,:\,\beta_p}) = (u_1\,, u_2\,,\ \dots\ , u_k\,, u_{k+1})\,,.$$

existindo portanto uma subsucessão $\overline{u}_{\beta_p}$ da sucessão original $\overline{u}_p$ que tem limite (vector de $\mathbf{R}^{\mathbf{k}}$ ou impróprio).

São corolários imediatos deste teorema, os seguintes:

Corolário 1 : *Qualquer sucessão limitada $\overline{u}_p$ de vectores de* $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$*, admite uma subsucessão $\overline{u}_{\alpha_p}$ com certo limite vector de* $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

Demonstração : O teorema anterior garante a existência de uma subsucessão com limite, vector de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ ou impróprio . Mas sendo limitada a sucessão, são também limitadas as n sucessões reais suas coordenadas as quais, portanto, não admitem sublimites infinitos. Nessas condições a sucessão de vectores $\overline{u}_p$ não pode admitir qualquer sublimite impróprio porque tal equivaleria a que pelo menos uma das sucessões reais coordenadas tivesse limite infinito.

Corolário 2 : *Sendo $A \subset$* $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ *um conjunto limitado e infinito, existe pelo menos um vector $\overline{a} \in$* $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ *que é ponto de acumulação de A* (**Teorema de Bolzano-Weierstrass**)

Demonstração : Com elementos do conjunto infinito A é possível construir uma sucessão $\overline{u}_p$ de termos todos distintos; claro que se trata de uma sucessão limitada (o conjunto dos seus termos está contido no conjunto limitado A) e admite portanto um sublimite $\overline{a} = lim\ \overline{u}_{\alpha_p}$ pertencente a $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ (corolário 1). O teorema 6 garante então que $\overline{a}$ é ponto de acumulação do conjunto A

Teorema 11 : *Para que um certo* $\overline{b}$ ($\overline{b} \in \mathbf{R^n}$ *ou impróprio*) *seja sublimite de uma suces-são* $\overline{u}_p$ *de vectores de* $\mathbf{R^n}$ *é necessário e suficiente que para qualquer* $V_\varepsilon(\overline{b})$ *e qualquer inteiro m, exista um inteiro* $k > m$ *tal que* $\overline{u}_k \in V_\varepsilon(\overline{b})$

Demonstração : A condição é evidentemente necessária. Vejamos que é igualmente suficiente. Supondo a condição verificada, defina-se a subsucessão $\overline{u}_{\alpha_p}$ de $\overline{u}_p$ pela seguinte condição: $\alpha_0 = 1$ e α_p é o menor inteiro maior que α_{p-1} que faz $\overline{u}_{\alpha_p} \in V_{1/p}(\overline{b})$. Como $1/p < \varepsilon$ a partir de certa ordem p_ε, tem-se $\overline{u}_{\alpha_p} \in V_{1/p}(\overline{b}) \subset V_\varepsilon(\overline{b})$, a partir dessa mesma ordem, ou seja, $\overline{b} = lim\ \overline{u}_{\alpha_p}$, logo b é sublimite de $\overline{u}_p$.

Teorema 12 : *A condição necessária e suficiente para que uma sucessão* $\overline{u}_p$ *de vectores de* $\mathbf{R^n}$ *tenha limite é que não admita dois sublimites distintos.*

Demonstração : Que a condição é necessária ficou demonstrado nas considerações que imediatamente precedem o conceito de sublimite. Como se viu então, se $lim\ \overline{u}_p = \overline{u}$, também $lim\ \overline{u}_{\alpha_p} = \overline{u}$, qualquer que seja a subsucessão $\overline{u}_{\alpha_p}$.
Vejamos que a condição é também suficiente. Admita-se então que $\overline{u}$ (vector de $\mathbf{R^n}$ ou impróprio) é o único sublimite da sucessão $\overline{u}_p$. Caso a sucessão $\overline{u}_p$ não tivesse $\overline{u}$ como limite , então existiria um certo $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{u}_p \notin V_\varepsilon(\overline{u})$ para infinitos valores de p, sejam eles por ordem crescente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \dots$; a correspondente subsucessão $\overline{u}_{\alpha_p}$ não poderia evidentemente ter $\overline{u}$ como limite nem como sublimite mas admitiria um sublimite (pelo teorema 10) o qual seria assim distinto de $\overline{u}$; este sublimite seria também um sublimite da sucessão inicial $\overline{u}_p$, contrariando-se assim a hipótese assumida de $\overline{u}$ ser o único sublimite desta sucessão.

Teorema 13 : *O conjunto S dos sublimites vectores de* $\mathbf{R^n}$ *de uma sucessão* $\overline{u}_p$ *é um conjunto fechado*

Demonstração : Podemos supor que $S \neq \emptyset$, pois no caso de S ser vazio é obviamente fechado. Para provar que S é fechado bastará provar que $S' \subseteq S$. Dado $\overline{u} \in S'$, em qualquer $V_\varepsilon(\overline{u})$ existe pelo menos um $\overline{u}_\varepsilon \neq \overline{u}$ pertencente a S, por definição de ponto de acumulação. Claro que esse $\overline{u}_\varepsilon$, por pertencer a S, será limite de uma certa sub-sucessão $\overline{u}_{\alpha_p}$ de $\overline{u}_p$. Fazendo $\delta = \varepsilon - d(\overline{u}_\varepsilon, \overline{u}) > 0$, tem-se que todos os termos de $\overline{u}_{\alpha_p}$ se encontram em $V_\delta(\overline{u}_\varepsilon)$ de certa ordem p_ε em diante; então, dado um qualquer in-teiro m, basta escolher p_0 a verificar $\alpha_{p_0} > m$ e $p_0 > p_\varepsilon$ para se ter, com $k = \alpha_{p_0} > m$,

$$d(\overline{u}_k\ ,\ \overline{u}\ )\ \leq\ d(\overline{u}_k\ ,\ \overline{u}_\varepsilon)\ +\ d(\overline{u}_\varepsilon\ ,\ \overline{u}\ )\ <\ \delta + d(\overline{u}_\varepsilon , \overline{u}\ )\ =\ \varepsilon\ ,$$

ou seja, $\overline{u}_k \in \mathrm{V}_\varepsilon(\overline{u}\,)$; tal significa, de acordo com o teorema 11, que o ponto $\overline{u}$ é sublimite da sucessão $\overline{u}_p$, ou seja, $\overline{u} \in S$. Assim se prova que $S' \subseteq S$, ou seja, que o conjunto S é fechado.

6. Exercícios

1 - Em $\mathbf{R^n}$ e defina-se para $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

$$\|\bar{x}\|^1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$
$$\|\bar{x}\|^2 = Máx \;\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

a) Mostre que $\|\bar{x}\|^1$ e $\|\bar{x}\|^2$ definem normas em $\mathbf{R^n}$;

b) Escreva as expressões das correspondentes distâncias em $\mathbf{R^n}$;

c) No caso $n = 2$, interprete geometricamente $d_1(\bar{x}, \bar{y})$ e $d_2(\bar{x}, \bar{y})$;

d) No caso $n = 2$, interprete geometricamente as vizinhanças correspondentes às duas distâncias da alínea anterior .

2 - Determine o interior, a fronteira, o exterior, o derivado e aderência ou fecho de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbf{R^2}$:

a) $A = \{ (x, y) : \; y + x \le 1 \;,\; x \ge 0 \;\text{ e }\; y \ge 0 \}$;

b) $B = \{ (x, y) : \; y^2 + x^2 < 1 \}$;

c) $C = \{ (x, y) : \; x = \dfrac{n}{2n+1} \;\; (n \in \mathbf{N}) \;\text{ e }\; 0 \le y + x \le 1 \}$;

d) $D = \{ (x, y) : \; x = y = \dfrac{n}{n+2} \;\; (n \in \mathbf{N}) \}$;

e) $E = \mathbf{Q^2}$, em que $\mathbf{Q}$ designa o conjunto dos números racionais ;

f) $F = \{ (x, y) : \; 0 < x \le 2/\pi \;\text{ e }\; y = sen\;(1/x) \}$.

3 - Calcule os limites (próprios ou impróprios) das seguintes sucessões em $\mathbf{R^3}$:

a) $\bar{x}_p = [\; \dfrac{p}{2p+1} \;,\; (1 + \dfrac{1}{3p})^p \;,\; \log(1 + \dfrac{1}{p})^p \;]$;

b) $\bar{x}_p = (\; \dfrac{1}{p} \;,\; \dfrac{p+1}{p} \;,\; -p \;)$;

c) $\bar{x}_p = (u_p, v_p)$, em que (u_p, v_p) é solução do sistema:

$$\begin{cases} p\,v + \dfrac{p}{p+1}\,u + 1 = 0 \\ (p+1)\;v - 2\,u + 3 = 0 \end{cases} .$$

4 - Calcule os sublimites das seguintes sucessões :

a) $\overline{u}_n = \left[(-1)^n \cdot \dfrac{n+1}{n} \quad , \quad (-1)^{3n+1} \cdot \dfrac{n-1}{2n} \right]$;

b) $\overline{u}_n = \left[sen\,(n\pi/2) \;\; , \;\; cos\,(n\pi/2) \;\; , \;\; cos(n\pi) \right]$;

c) $\overline{u}_n = \left[(-1)^n . cos\,(n\pi/2) \quad , \quad tang \left(\pi + (-1)^n \cdot \dfrac{n\pi}{2n+1} \right) \right]$.

5 - Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$:

$$B_p = \{(x\,,y)\;:\;(x\,,y) \in \mathbf{R}^2 \;\wedge\; x+y = 1/p\;\} \;\;(\,p \in \mathbf{N}\,)$$

a) Justifique que os conjuntos B_p são fechados ;

b) Justifique que (0 , 0) é ponto de acumulação de $B = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$ e em seguida diga, justificando, se o conjunto B é ou não fechado .

6 - Determine a aderência do conjunto $A = \{\;(1/n\;,\;1/m)\;:\;n\;,m \in \mathbf{N}\;\}$.

7 - Dê exemplo de um conjunto $B \subset \mathbf{R}^2$ cuja fronteira seja distinta da fronteira do respectivo interior .

8 - Sendo $A_n = \{(x\,,y)\;:\;(x\,,y) \in \mathbf{R}^2 \;\wedge\; x^2 + y^2 \;\geq 1/n^2\;\}(\;n \in \mathbf{N}\;)$, determine $lim\; A_n$, justifique que este conjunto é aberto e indique a respectiva fronteira.

9 - Sendo $A_n = \{(x\,,y)\;:\;(x\,,y) \in \mathbf{R}^2 \;\wedge\; y \;\leq (\text{-}1\;)^n\;.\;x + 1/n\;\}(\;n \in \mathbf{N}\;)$, utilize uma argumentação geométrica para determinar o interior, a fronteira e o derivado do conjunto $A = lim\; min\; A_n$.

10 - Sendo $A_n = \{(x\,,y)\;:\;(x\,,y) \in \mathbf{R}^2 \;\wedge\; 1/n \leq\; x\text{ - }y\; < 2\;\}(\;n \in \mathbf{N}\;)$,

a) Utilize uma argumentação geométrica para determinar o interior, a fronteira e o derivado do conjunto $A = lim\; A_n$;

b) Diga justificando se o conjunto A é ou não aberto ;

c) Diga justificando se o conjunto A é ou não fechado .

RESPOSTAS

2 - a) $INT\ A = \{(x, y) : y + x < 1 , x > 0 , y > 0\}$,
$FRONT\ A = \{(x, y) : y + x = 1 , 0 < x < 1\} \cup \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y \leq 1\}$,
$EXT\ A = \mathbf{R}^2 - A$, $A' = Ad\, A = A$;

b) $INT\ B = B$, $FRONT\ B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $EXT\ B = \mathbf{R}^2 - \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
$B' = Ad\, B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

c) $INT\ C = \emptyset$, $FRONT\ C = C \cup \{(1/2, y) : -1/2 \leq y \leq 1/2\}$,
$EXT\ C = \mathbf{R}^2 - [C \cup \{(1/2, y) : -1/2 \leq y \leq 1/2\}]$,
$C' = Ad\, C = C \cup \{(1/2, y) : -1/2 \leq y \leq 1/2\}$;

d) $INT\ D = \emptyset$, $FRONT\ D = D \cup \{(1,1)\}$, $EXT\ D = \mathbf{R}^2 - [D \cup \{(1,1)\}]$,
$D' = \{(1,1)\}$, $Ad\, D = D \cup \{(1,1)\}$;

e) $INT\ E = \emptyset$, $FRONT\ E = \mathbf{R}^2$, $EXT\ E = \emptyset$, $E' = Ad\, E = \mathbf{R}^2$;

f) $INT\ F = \emptyset$, $FRONT\ F = F \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$,
$EXT\ F = \mathbf{R}^2 - [F \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}]$, $F' = Ad\, F = F \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$.

3 - a) $(1/2 , e^{1/3} , 1)$; **b)** $(0 , 1 , -\infty)$; **c)** $(2/3 , 0)$.

4 - a) $(1 , -1/2)$ e $(-1 , 1/2)$; **b)** $(0 , 1 , 1)$, $(0 , -1 , 1)$, $(1 , 0 , -1)$ e $(-1 , 0 , -1)$;

c) $(1 , +\infty)$, $(-1 , +\infty)$ e $(0 , -\infty)$.

5 - b) B Não é fechado .

6 - $Ad\, A = A \cup \{(1/n , 0) : n \in \mathbf{N}\} \cup \{(0 , 1/m) : m \in \mathbf{N}\} \cup \{(0 , 0)\}$.

7 - $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2 , 2)\}$.

8 - $FRONT\ (lim\ A_n) = \{(0 , 0)\}$.

9 - $INT\ A = \{(x, y) : y < x\} \cap \{(x, y) : y < -x\}$,
$FRONT\ A = \{(x, y) : y = x \wedge x \leq 0\} \cup \{(x, y) : y = -x \wedge x \geq 0\}$,
$A' = \{(x, y) : y \leq x\} \cup \{(x, y) : y \leq -x\}$.

10 - a) $INT\ A = \{(x, y) : 0 < x - y < 2\}$,
$FRONT\ A = \{(x, y) : y = x\} \cup \{(x, y) : y = x - 2\}$,
$A' = \{(x, y) : 0 \leq x - y \leq 2\}$.

b) É aberto ; **c)** Não é fechado .

CAPITULO VI

LIMITES E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES EM $\mathbf{R}^n$

1. Generalidades

O conceito geral de função e outros associados foram já estudados quando se tratou da teoria dos conjuntos. Foi igualmente estudado com algum detalhe o caso particular das funções reais de variável real (funções com domínio contido em **R** e tendo também **R** como conjunto de chegada) .

No presente capítulo estudam-se os limites e continuidade das funções com domínio contido em $\mathbf{R}^n$ e tendo $\mathbf{R}^m$ como conjunto de chegada, das quais as funções reais de variável real são um caso particular.

Nos pontos seguintes serão feitas algumas considerações particulares sobre as funções que serão objecto de estudo neste capítulo, sobre o ponto de vista dos limites e continuidade.

1.1 - Funções reais de variável vectorial *n*-dimensional

Uma função real de variável vectorial n - dimensional , associa a cada vector $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in A \subseteq \mathbf{R}^n$ um número real $y = f(\bar{x}) = f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$, ou seja, trata-se de uma função f de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$. Como a variável (vectorial) independente $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ é um énuplo ordenado de variáveis reais $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ é usual chamar a estas funções "*funções reais de n variáveis reais*'' em vez de " *funções reais de variável vectorial n-dimensional* '' .

Tal como no caso das funções reais de variável real, já estudadas anteriormente, o cálculo dos valores $f(\bar{x})$ ou $f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ que a função f de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ associa a cada vector $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in A$ faz-se usualmente utilizando uma expressão analítica ou mesmo diversas expressões analíticas válidas cada uma delas numa certa parte do domínio da função. São exemplos,

a) A função f de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}$ que a cada $(x_1 , x_2 , x_3) \in \mathbf{R}^3$ associa o número real $y = f(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 x_2 + (x_1 - x_3)^2$;

b) A função g de $A = \{(x , y) : x \geq 0 , y \geq 0\}$ em $\mathbf{R}$ que a cada $(x , y) \in A$ associa o número real $z = g(x , y) = \sqrt{1 + x y}$;

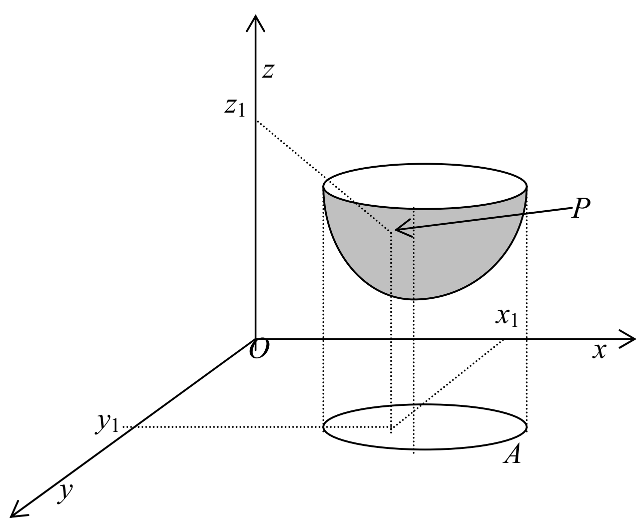
c) A função h de $A = \{(u , v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$ em $\mathbf{R}$ que a cada $(u , v) \in A$ associa o número real ,

$$z = h(u , v) = \begin{cases} u + v & , \ u^2 + v^2 < 1 \\ 2u & , \ u^2 + v^2 = 1 \end{cases} .$$

São aqui inteiramente aplicáveis as considerações feitas no caso das funções reais de variável real sobre a conveniência de não confundir domínio da função com domínio da expressão analítica utilizada para calcular os valores que a função faz corresponder aos pontos do respectivo domínio.

Assim como no caso das funções reais de variável real, é também usual embora incorrecto dizer " *função* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$ *com domínio* $A = \dots$ '' em vez de " *função* f de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ *que a cada* $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ *associa o número real* $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \dots$ '', podendo mesmo omitir-se a referência explícita ao domínio da função, caso em que se subentende que a função é definida em todo o domínio da expressão analítica utilizada para calcular os valores $f(\bar{x})$.

Com $n = 2$ é também possível a representação gráfica da função $f(x, y)$. Tal representação obtém-se no espaço ordinário, fixando um sistema de eixos coordenados e representando os pontos de coordenadas $[x, y, z = f(x, y)]$ para todos os (x, y) pertencentes ao domínio da função, como se ilustra na figura seguinte :



> **Nota :** *O ponto P tem coordenadas* $[x_1, y_1, z_1 = f(x_1, y_1)]$. *Quando o ponto* (x_1, y_1) *"percorre" o domínio A* (*conjunto do plano xOy*) *o ponto P do espaço "percorre" a superfície a sombreado que é assim a imagem da função.*

1.2 - Funções vectoriais *m*-dimensionais de variável real

Trata-se de funções cujo domínio é um certo subconjunto de $\mathbf{R}$ e cujo conjunto de chegada é o conjunto $\mathbf{R}^m$. Uma função f de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}^m$ associa a cada $x \in A \subseteq$

R um vector de $\mathbf{R^m}$, $\bar{y} = (y_1 , y_2 , ... , y_m) = f(x)$. A correspondência que a cada $x \in A$ associa um ponto $(y_1 , y_2 , ... , y_m)$ de $\mathbf{R^m}$, pode ser considerada como um sistema de m funções reais de variável real, f_1 , f_2 , ... , f_m , em que a função f_i associa a cada $x \in A$ a i-ésima coordenada de $(y_1 , y_2 , ... , y_m)$.

Vejamos um exemplo . A função que a cada $t \in \mathbf{R}$ associa o ponto (x , y) tal que, $x = 2t + 1$ e $y = -3t - 2$ é uma função f de **R** em $\mathbf{R^2}$, podendo considerar-se como o sistema das duas seguintes funções reais de variável real:

f_1 de **R** em **R** *que a cada* $t \in \mathbf{R}$ *associa* $x = 2t + 1$;

f_2 de **R** em **R** *que a cada* $t \in \mathbf{R}$ *associa* $y = -3t - 2$.

Um caso particular importante deste tipo de funções é aquele em que o domínio é um certo intervalo $I \subseteq \mathbf{R}$. Estas funções são usadas para representar analíticamente (*representação paramétrica*) curvas no espaço $\mathbf{R^m}$, especialmente no plano ($m = 2$) e no espaço ordinário ($m = 3$). Assim, por exemplo no caso do plano, o sistema de funções reais de variável real,

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t - 2 \end{cases} ,$$

ambas com domínio em **R** representam parametricamente uma recta no plano: quando t (o parâmetro) "*percorre*'' o domínio **R** a imagem do ponto $(x , y) = (2t + 1 , -3t - 2)$ no plano "*percorre*'' a recta que passa pelos pontos (1 , -2) e (3 , -5) , ou seja, a recta de equação,

$$y = -\frac{3}{2}\, x - \frac{1}{2} \;;$$

a mesma recta poderia também ser representada paramétricamente por outros sistemas de funções reais de variável real, por exemplo,

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{3}{2}\, t - \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

Outro exemplo. Uma circunferência no plano, com centro no ponto *(a,b)* e raio igual a r , cuja equação se sabe ser,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 ,$$

pode ser representada paramétricamente pelo seguinte sistema de funções reais de variável real,

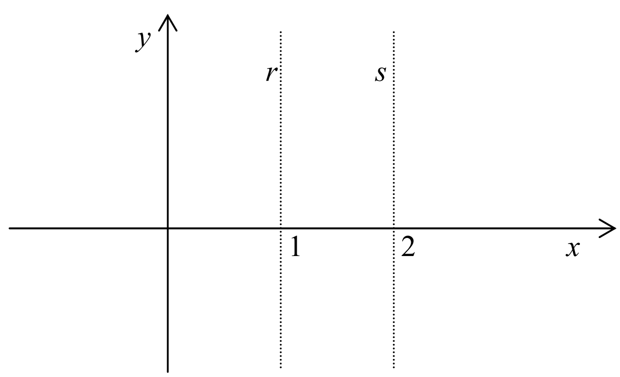
$$\begin{cases} x = a + r \, . \, cos \; t \\ y = b + r \, . \, sen \; t \end{cases}$$

ambas com domínio em $[0 \, , 2\pi \, [$; com efeito, é fácil verificar que um ponto $(x_0 \, , y_0)$ do plano pertence à circunferência referida se e só se existe um $t_0 \in [0 \, , 2\pi \, [$ tal que $x = a + r \, . \, cos \; t_0$ e $y = b + r \, . \, sen \; t_0$.

Não obstante se utilizem os sistemas de m funções reais de variável real, com domínio comum em certo intervalo I de números reais, ou seja as funções f de $I \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R^m}$, para representar parametricamente as curvas no espaço $\mathbf{R^m}$, especialmente no plano (m = 2) e no espaço ordinário (m = 3), não é razoável chamar curva a qualquer conjunto de pontos que seja gerado em $\mathbf{R^m}$ por um tal sistema de funções, sem que a estas se imponham certas restrições. De facto, dando liberdade absoluta quanto à escolha das funções em causa, pode-se chegar a curvas bem estranhas, como é o caso em $\mathbf{R^2}$ da curva com representação paramétrica dada por,

$$\begin{cases} x = \begin{cases} 1 \;\; , \;\; t \; racional \\ 2 \;\; , \;\; t \; irracional \end{cases} \\ y = t \end{cases}$$

curva essa constituída (ver gráfico) por todos os pontos da recta vertical r com ordenada racional e ainda por todos os pontos da recta vertical s com ordenada irracional :



No mínimo, para se falar em curva, impõe-se a continuidade das funções paramétricas, mas mesmo assim ainda se tem um conceito de curva muito generoso. Por exemplo é possível definir duas funções contínuas em certo intervalo de números reais, $x = \varphi\,(t)$ e $y = \theta\,(t)$, de tal modo que o conjunto dos pontos (x, y) "*gerado*" por essas funções, quando t "*percorre*" o intervalo domínio, seja um quadrado (*curva de Peano*). Trata--se de uma "*curva*" bem bizarra que, desafiando o que o bom senso e a intuição dizem ser uma curva, passa por todos os pontos de um quadrado, como se fosse um fio transformado em tecido .

1.3 - <u>Funções vectoriais *m*-dimensionais de variável vectorial *n*-dimensional</u>

Trata-se de funções cujo domínio é um certo subconjunto de $\mathbf{R^n}$ e cujo conjunto de chegada é o conjunto $\mathbf{R^m}$. Uma função f de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ associa a cada vector

$\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in A \subseteq \mathbf{R^n}$ um certo vector de $\mathbf{R^m}$, $\bar{y} = (y_1 , y_2 , \dots , y_m) = f(\bar{x})$ $= = f(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$. A função que a cada $\bar{x} \in A$ associa um ponto $(y_1 , y_2 , \dots , y_m)$ de $\mathbf{R^m}$, pode considerar-se como um sistema de m correspondências ou funções reais de n variáveis reais, $f_1 , f_2 , \dots , f_m$, em que a função f_i associa a cada $\bar{x} \in A$ a i-ésima coordenada de $(y_1 , y_2 , \dots , y_m)$, ou seja,

$$\begin{cases} y_1 = f_1 \ (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \\ y_2 = f_2 \ (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \end{cases} .$$

Vejamos um exemplo. A função f que a cada $(x , y) \in \{(x , y) : x \geq 0 , \ y \leq 0 \}$ associa o ponto (z_1 , z_2 , z_3) tal que $z_1 = 2\,x - y$, $z_2 = y + \sqrt{x}$ e $z_3 = \sqrt{-y}$ é uma função de $A = \{(x , y) : x \geq 0 , \ y \leq 0 \} \subset \mathbf{R^2}$ em $\mathbf{R^3}$, podendo ser considerada como um sistema de três funções cada uma delas de duas variáveis reais:

$$\begin{cases} z_1 = f_1 (x,y) = 2\,x - y \\ z_2 = f_2 (x,y) = y + \sqrt{x} \\ z_3 = f_3 (x,y) = \sqrt{-y} \end{cases} .$$

2. <u>Definição de limite de uma função num ponto</u>

Considere-se o caso geral de uma função f de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ e seja $\bar{a}$ um ponto de acumulação de A (ponto de acumulação próprio ou impróprio, pertencente ou não ao conjunto). As definições de limite de $f(\bar{x})$ em $\bar{a}$, segundo Heine e segundo Cauchy são formalmente as mesmas que foram apresentadas para as funções reais de variável real. Assim, segundo Heine :

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \Leftrightarrow \forall \ \bar{x}_p \in A \ , \ \bar{x}_p \neq \bar{a} \ \wedge \ \lim \bar{x}_p = \bar{a} \ \Rightarrow \ \lim f(\bar{x}_p) = \bar{b} \,,$$

podendo nesta definição $\bar{b}$ ser um vector de $\mathbf{R^m}$ ou um ponto impróprio .

Segundo Cauchy :

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \Leftrightarrow \forall \delta > 0, \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 : \ x \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}] \Rightarrow f(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{b}),$$

podendo também agora $\bar{b}$ ser um vector de $\mathbf{R^m}$ ou um ponto impróprio . Nesta definição deve notar-se que as vizinhanças $V_\varepsilon(\bar{a})$ e $V_\delta(\bar{b})$ são respectivamente subconjuntos de $\mathbf{R^n}$ e de $\mathbf{R^m}$.

Tal como no caso das funções reais de variável real, podemos provar a equivalência de ambas as definições :

Teorema 1 : *As duas definições de limite, segundo Heine e segundo Cauchy, são equivalentes*

<u>Demonstração</u> : **a)** Supondo que $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ segundo Cauchy, considere-se uma qualquer sucessão $\bar{x}_p$, de termos pertencentes ao domínio A da função, tal que $\bar{x}_p \neq \bar{a}$ e $\lim \bar{x}_p = \bar{a}$. Fixado um qualquer $\delta > 0$, determine-se o correspondente $\varepsilon > 0$ com o qual se verifica a condição que traduz a definição de Cauchy. Com esse ε , determine-se a ordem a partir da qual $\bar{x}_p \in V_\varepsilon(\bar{a})$; a partir dessa ordem tem-se que $\bar{x}_p \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}]$ o que implica ser $f(\bar{x}_p) \in V_\delta(\bar{b})$, ficando assim provado que $\lim f(\bar{x}_p) = \bar{b}$. Em conclusão: tem-se $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ segundo Heine.

b) Supondo agora que $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ segundo Heine, admitamos por absurdo que tal não sucedia segundo a definição de Cauchy. Existiria então um particular $\delta > 0$ para o qual , com qualquer $\varepsilon > 0$, sempre se encontraria um $\bar{x}_\varepsilon \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}]$ tal que $f(\bar{x}_\varepsilon) \notin V_\delta(\bar{b})$. Tomando $\varepsilon_p = 1/p$, para $p = 1, 2, \ldots$, existiriam vectores $\bar{x}_p \in V_{1/p}(a) \cap [A - \{\bar{a}\}]$ tais que $f(\bar{x}_p) \notin V_\delta(\bar{b})$. Claro que os $\bar{x}_p$ pertenceriam a A , seriam distintos de $\bar{a}$ e $\lim \bar{x}_p = \bar{a}$; no entanto, como $f(\bar{x}_p) \notin V_\delta(\bar{b})$ para todo o p , não seria $\lim f(\bar{x}_p) = \bar{b}$, contrariando-se assim a hipótese de ser $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b}$ segundo Heine .

3 - <u>Condição necessária e suficiente para existência de limite pertencente a $\mathbf{R}^m$</u>

Pode demonstrar-se com facilidade uma condição necessária e suficiente para que $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \in \mathbf{R}^m$. Trata-se de uma condição semelhante à condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão (condição de Cauchy) .

Teorema 2 : *Sendo $f(\bar{x})$ uma função com domínio em $A \subseteq \mathbf{R}^n$ e $\bar{a}$ um ponto de acumulação de A (vector de $\mathbf{R}^n$ ou ponto impróprio), a condição necessária suficiente para que $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \in \mathbf{R}^m$ é que,*

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0\ :\ \bar{x}',\ \bar{x}'' \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}] \Rightarrow |f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')| < \delta$$

<u>Demonstração</u> : **a)** A condição é necessária. Sendo $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \in \mathbf{R}^m$ então, de acordo com a definição de Cauchy,

$$\forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0\ :\ \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}] \Rightarrow \|\ f(\bar{x}) - \bar{b}\ \| < \delta/2\ .$$

Tomando então quaisquer $\bar{x}',\ \bar{x}'' \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}]$ tem-se,

$$\|f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')\| \leq \|f(\bar{x}') - \bar{b}\| + \|\bar{b} - f(\bar{x}'')\| < \delta/2 + \delta/2 = \delta \ ,$$

verificando-se portanto a condição do enunciado,

b) A condição é suficiente. Suponha-se verificada a condição do enunciado. Considere-se uma qualquer sucessão de termos $\bar{x}_p \in A$, tal que $\bar{x}_p \neq \bar{a}$ e $lim\ \bar{x}_p = \bar{a}$. Dado um $\delta > 0$, considere-se o correspondente $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ cuja existência é assegurada pela condição do enunciado (supostamente verificada). De certa ordem $p_{\varepsilon(\delta)}$ em diante, tem-se $\bar{x}_p \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e portanto com $p > m > p_{\varepsilon(\delta)}$, tem-se $\bar{x}_p$, $\bar{x}_m \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}]$, o que implica $\| f(\bar{x}_p) - f(\bar{x}_m)\| < \delta$ (pela condição do enunciado). Mas tal traduz precisamente a convergência da sucessão $f(\bar{x}_p)$. Seja $\bar{b} = lim\ f(\bar{x}_p) \in \mathbf{R^m}$ e veja-mos que para qualquer outra sucessão $\bar{x}_p^*$, nas condições de $\bar{x}_p$, também se tem $\bar{b} = lim\, f(\bar{x}_p^*)$ o que, de acordo com a definição de Heine , mostrará que $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \in \mathbf{R^m}$: para qualquer outra sucessão $\bar{x}_p^*$, nas mesmas condições que $\bar{x}_p$, existirá $\bar{b}^* = lim\, f(\bar{x}_p^*)$; e como $\bar{x}_p$, $\bar{x}_p^*$ pertencem a $V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}]$, a partir de certa ordem, tem-se $\| f(\bar{x}_p) - f(\bar{x}_p^*)\| < \delta$ donde resulta, passando ao limite, que $\|\bar{b} - \bar{b}^*\| \leq \delta$; devido à arbitrariedade de δ, tem-se $\bar{b} = \bar{b}^*$, o que com-pleta a demonstração.

4 – Sublimites

Dada a função $f(\bar{x})$ com domínio em $A \subseteq \mathbf{R^n}$, seja $B \subseteq A$ e $\bar{a}$ um ponto de acumulação (vector de $\mathbf{R^n}$ ou ponto impróprio) do domínio A e também do conjunto B. Representando por $f_B(\bar{x})$ a restrição de $f(\bar{x})$ ao conjunto B , caso exista $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f_B(\bar{x})$, a esse limite chama-se *sublimite* da função em $\bar{a}$ relativo ao conjunto B . Também se usa o símbolo $\lim\limits_{\substack{\bar{x} \to \bar{a} \\ \bar{x} \in B}} f(\bar{x})$ para representar o sublimite em $\bar{a}$ relativo ao conjunto B .

Conclui-se sem dificuldade que caso exista $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$, com esse limite coincidem todos os sublimites de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$, porque com $B \subseteq A$, a condição que define limite segundo Cauchy,

$$\forall \delta > 0 \,, \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 : \ \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}] \ \Rightarrow f(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{b}) \,,$$

implica a condição que define segundo Cauchy o sublimite relativo ao conjunto B,

$$\forall \delta > 0 \,, \exists \varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0 : \ \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [B - \{\bar{a}\}] \ \Rightarrow f(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{b}) \,.$$

Daqui resulta que existindo em $\bar{x} = \bar{a}$ sublimites distintos para a função esta não pode ter limite no referido ponto.

O teorema seguinte tem utilidade prática na determinação dos possíveis sublimites de uma função num ponto.

Teorema 3 : *Dada a função* $f(\bar{x})$ *com domínio em* A *, sendo* $\bar{a}$ *um ponto de acumulação de* A (vector de $\mathbf{R}^n$ ou ponto impróprio) *e sendo* B_1 *,* B_2 *, … ,* B_k *conjuntos em número finito, dois a dois disjuntos, tais que* $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$ *, admita-se que* $\bar{a}$ *é ponto de acumulação de cada um dos* B_j *e que existem os sublimites* $\bar{\lambda}_j$ *da função em* $\bar{x} = \bar{a}$ *relativos a cada um dos referidos* B_j *. Nessas condições nenhum* $\bar{\lambda}$ *distinto de todos os* $\bar{\lambda}_j$ *pode ser sublimite da função em* $\bar{x} = \bar{a}$

<u>Demonstração</u> : Seja $\bar{\lambda}$ distinto de todos os $\bar{\lambda}_j$. Nessas condições é possível fixar $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que a vizinhança $V_\delta(\bar{\lambda})$ não tenha pontos em comum com nenhuma das vizinhanças $V_\delta(\bar{\lambda}_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Como cada $\bar{\lambda}_j$ é por hipótese sublimite de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ relativamente ao respectivo B_j , existem valores $\varepsilon_j > 0$ tais que,

$$\bar{x} \in V_{\varepsilon_j}(\bar{a}) \cap [B_j - \{\bar{a}\}] \Rightarrow f(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{\lambda}_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, k) .$$

Com $\varepsilon = Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\} > 0$ tem-se então, por ser $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$,

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap [A - \{\bar{a}\}] \Rightarrow f(\bar{x}) \in \bigcup_{j=1}^{k} V_\delta(\bar{\lambda}_j) \Rightarrow f(\bar{x}) \notin V_\delta(\bar{\lambda}) .$$

Pode agora ver-se com facilidade que $\bar{\lambda}$ não pode ser sublimite de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ relativo a certo conjunto $B \subseteq A$ de que $\bar{a}$ seja ponto de acumulação . Se o fosse, para o $\delta > 0$ fixado acima – como para qualquer outro – existiria um ε^* positivo tal que

$$\bar{x} \in V_{\varepsilon^*}(\bar{a}) \cap [B - \{\bar{a}\}] \Rightarrow f(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{\lambda}) ,$$

e então para vectores $\bar{x} \in B - \{\bar{a}\}$ pertencentes à mais estreita das vizinhanças $V_\varepsilon(\bar{a})$ e $V_{\varepsilon^*}(\bar{a})$ – e tais vectores existem por ser $\bar{a}$ ponto de acumulação de B – ter-se-ia simultaneamente $f(\bar{x}) \notin V_\delta(\bar{\lambda})$ e $f(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{\lambda})$ o que é manifestamente absurdo.

O teorema precedente não é válido se os conjuntos B_j envolvidos forem em número infinito, falhando a demonstração neste caso porque então nada garante que seja $Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots\} > 0$ e tal é essencial para a validade do argumento apresentado.

Se , nas condições do teorema precedente os $\overline{\lambda}_j$ forem todos iguais , ou seja, se tivermos $\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2 = \ldots = \overline{\lambda}_k = \overline{\mu}$ tem-se que para cada $\delta > 0$ existem $\varepsilon_j > 0$ tais que,

$$\overline{x} \in \mathrm{V}_{\varepsilon_j}(\overline{a}) \cap [B_j - \{\overline{a}\}] \Rightarrow f(\overline{x}) \in \mathrm{V}_{\delta}(\overline{\mu}) \quad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Com $\varepsilon = Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k\} > 0$ tem-se então, por ser $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$,

$$\overline{x} \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(\overline{a}) \cap [A - \{\overline{a}\}] \Rightarrow f(\overline{x}) \in \mathrm{V}_{\delta}(\overline{\mu}) .$$

Daqui se tira que $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = \overline{\mu}$. Pode pois enunciar-se o seguinte

Teorema 4 : *Dada a função* $f(\overline{x})$ *com domínio em* A *, sendo* $\overline{a}$ *um ponto de acumulação de* A (vector de $\mathbf{R}^n$ ou ponto impróprio) *e sendo* $B_1, B_2, \ldots, B_k$ *conjuntos em número finito, dois a dois disjuntos, tais que* $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$ *, admita-se que* $\overline{a}$ *é ponto de acumulação de cada um dos* B_j *, que existem os sublimites* $\overline{\lambda}_j$ *da função em* $\overline{x} = \overline{a}$ *relativos a cada um dos referidos* B_j *e que tais sublimites são todos iguais a certo* $\overline{\mu}$ *. Nessas condições* $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{a}} f(\overline{x}) = \overline{\mu}$

Refira-se que tal como no caso do teorema 3, o teorema precedente não é válido se os conjuntos B_j envolvidos forem em número infinito, falhando a demonstração neste caso porque então nada garante que seja $Min\,\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots\} > 0$ e tal é essencial para a validade do argumento apresentado.

5. Regras de cálculo de limites

5.1 - Caso das funções de $A \subset \mathbf{R}^n$ em R

As regras básicas de cálculo de limites de funções são já conhecidas para o caso das funções reais de variável real. Para as funções de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em **R** (funções reais de n variáveis reais) , as regras de cálculo são exactamente as mesmas, com as mesmas convenções relativas aos limites infinitos e com os mesmos casos de indeterminação.

Com efeito, também agora, a definição de Heine permite-nos transferir para o cálculo de limites das funções reais de n variáveis reais as regras relativas ao cálculo de limites de sucessões.

A título meramente exemplificativo vejamos a fundamentação da regra relativa ao limite do produto de funções.

Dadas as funções $f(\bar{x})$ e $g(\bar{x})$ seja $\bar{a}$ ponto de acumulação dos respectivos domínios e admita-se que existem os limites,

$$\theta = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \mu = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x}) \ ,$$

com θ e μ reais ou infinitos. Considere-se a função produto $h(\bar{x}) = f(\bar{x}) \,.\, g(\bar{x})$, cujo domínio é formado pelos vectores $\bar{x}$ comuns aos domínios das funções factores, e admita-se que $\bar{a}$ é igualmente ponto de acumulação do domínio de $h(\bar{x})$. Então, dada uma qualquer sucessão de termos $\bar{x}_p$ pertencentes ao domínio de $h(\bar{x})$, tal que $\bar{x}_p \neq \bar{a}$ e $\lim \bar{x}_p = \bar{a}$, tem-se $\lim f(\bar{x}_p) = \theta$ e $\lim g(\bar{x}_p) = \mu$ (definição de limite segundo Heine) ; tem-se portanto , pela regra do limite do produto de sucessões, $\lim h(\bar{x}_p) = \theta \,.\, \mu$, com as convenções seguintes,

$$\theta \,.\, (\pm\infty) = \pm\infty \ \ (\theta > 0) \ , \ \theta \,.\, (\pm\infty) = \mp\infty \ \ (\theta < 0) \ ,$$

$$(\pm\infty) \,.\, \mu = \pm\infty \ \ (\mu > 0) \ , \ (\pm\infty) \,.\, \mu = \mp\infty \ \ (\mu < 0) \ ,$$

$$(+\infty) \,.\, (+\infty) = (-\infty) \,.\, (-\infty) = +\infty \quad \text{e} \quad (+\infty) \,.\, (-\infty) = (-\infty) \,.\, (+\infty) = -\infty$$

e com os casos de indeterminação $0 \,.\, (\pm\infty)$ e $(\pm\infty) \,.\, 0$.

Tem-se então, de novo pela definição de Heine,

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} h(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \left[f(\bar{x}).g(\bar{x}) \right] = \theta \,.\, \mu = \left[\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) \,.\, \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} g(\bar{x}) \right] \ ,$$

com as convenções e casos de indeterminação acima mencionados.

As regras de cálculo, conjugadas com as observações que se seguem, permitem calcular os limites ou mostrar que estes não existem, em grande número de casos práticos.

<u>1ª OBSERVAÇÃO</u> : Sendo $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ e $\bar{a} = (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$, conclui-se facilmente que para as funções $\varphi_1(\bar{x}) = x_1$, $\varphi_2(\bar{x}) = x_2$, … , $\varphi_n(\bar{x}) = x_n$, se tem,

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} \varphi_j(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{a}} x_j = a_j \quad (j = 1 , 2 , \ldots , n) \ ,$$

bastando para tal notar que, sendo $\bar{x}_p = (x_{1p} , x_{2p} , \ldots , x_{np})$ uma sucessão de vectores de $\mathbf{R}^n$,

$$\lim \bar{x}_p = \lim (x_{1p} , x_{2p} , \ldots , x_{np}) = \bar{a} = (a_1 , a_2 , \ldots , a_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim x_{jp} = a_j \quad (j = 1 , 2 , \ldots , n)$$

e atender à definição de limite segundo Heine. Esta observação sugere a substituição do símbolo $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$ por este outro,

$$\lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ \vdots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad ,$$

explicitando este novo símbolo que o limite pode determinar-se a partir da expressão analítica que define a função notando que $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} x_j = a_j$ e aplicando as regras de cálculo de limites que foram acima referidas como sendo as mesmas das sucessões reais.

Por exemplo,

$$\lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{x+y}{1+x+y^2} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \frac{x+y}{1+x+y^2} = \frac{1+2}{1+1+2^2} = 1/2 \quad .$$

2ª OBSERVAÇÃO : Para o caso das funções reais de n variáveis reais $(n \geq 2)$ surgem com frequência, mesmo em exemplos simples, situações de indeterminação que escondem realmente casos de inexistência de limite. Nestes casos dá frequentemente bons resultados procurar obter sublimites distintos para a função e assim concluir pela não existência de limite. Alguns exemplos ajudarão a ver o que pode e o que não pode concluir-se com esta técnica.

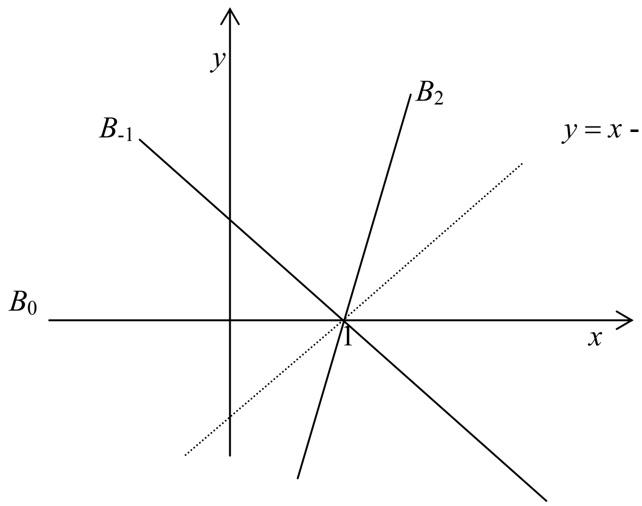
Exemplo 1 : A aplicação da regra do quociente para calcular,

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{x-1}{y-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{x-1}{y-x+1} \quad ,$$

conduz a uma indeterminação do tipo 0/0. Vejamos que o limite não existe, dado haver sublimites distintos para a função no ponto (1 , 0) .

Repare-se em primeiro lugar que a função tem como domínio $A = \{(x\,,y) : y \neq x - 1\}$, ou seja, todos os pontos de $\mathbf{R}^2$ com excepção dos situados sobre a recta de equação $y = x - 1$. O ponto (1 , 0) onde se pretende calcular o limite não pertence ao domínio A da função, mas é ponto de acumulação sendo portanto legal determinar o limite da função nesse ponto ou provar a sua inexistência.

Considerem-se os conjuntos $B_m = \{(x\,,y) : \; y = m\,.\,(x - 1) \;\wedge\; x \neq 1\}$, com o parâmetro $m \neq 1$. Claro que $B_m \subset A$ para todos os $m \neq 1$ e claro que (1 , 0) é ponto de acumulação de tos os B_m . A situação é ilustrada no gráfico seguinte, onde se representam o ponto (1 , 0) , a recta $y = x - 1$ dos pontos $(x\,,y)$ que não são do domínio da função e alguns dos conjuntos B_m :



Tem-se, considerando um B_m genérico $(m \neq 1)$:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0 \\ (x\,,\,y) \in B_m}} \frac{x-1}{y-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{x-1}{m.(x-1)-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m-1} \ ,$$

pelo que, dependendo o resultado do valor do parâmetro m , a função admite sublimites distintos no ponto (1 , 0) não tendo portanto limite nesse ponto.

Exemplo 2 : No caso do cálculo de,

$$\lim_{(x,y) \to (1,0)} \frac{(x-1)^2}{y-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^2}{y-x+1} \ ,$$

a aplicação da regra do quociente também conduz a uma indeterminação 0/0. Mas tentando repetir os cálculos do exemplo anterior, com os mesmos subconjuntos B_m do domínio $A = \{(x\,,\,y) : y \neq x - 1\}$ da função, obter-se-ia sempre,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0 \\ (x\,,\,y) \in B_m}} \frac{(x-1)^2}{y-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^2}{m.(x-1)-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{x-1}{m-1} = 0 \,,$$

nada se podendo concluir. Mas bastará considerar $B = \{(x\,,\,y) :\ y = x^2 - x \wedge x \neq 1\}$, para se obter,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0 \\ (x\,,\,y) \in B_m}} \frac{(x-1)^2}{y-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^2}{x^2-x-x+1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1 \ ,$$

assim se obtendo um sublimite distinto de um já anteriormente obtido, o que permite concluir que a função não tem limite no ponto (1 , 0)

Exemplo 3 : No caso do cálculo de,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ,$$

de novo se obtém uma indeterminação 0/0, mas neste caso, contrariamente aos dois anteriores, o limite existe e é nulo, De facto,

$$0 \le \frac{|x\,y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x\,y|}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x\,y|}{|y|} = |\,x\,| \le \sqrt{x^2+y^2} = \|(x\,,y)\| \ ,$$

pelo que para cada $\delta > 0$ existe $\varepsilon = \delta$ tal que,

$$\|\,(x\,,y\,)\,\| < \varepsilon \ \wedge \ (x\,,y) \ne (0\,,0) \ \Rightarrow \ \frac{|x\,y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \delta \ ,$$

assim se concluindo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \ .$$

Neste caso seria vã toda a tentativa de encontrar sublimites distintos para a função, mostrando o presente exemplo que a questão de achar o limite ou provar a sua inexistência pode ser mais complicada que aquilo que os dois primeiros exemplos podem sugerir.

3ª OBSERVAÇÃO : Uma outra técnica por vezes usada para provar que não existe limite, consiste no cálculo dos chamados limites sucessivos ou reiterados de que trataremos a seguir.

Seja $f(\overline{x}) = f(x_1\,, x_2\,, \ \ldots \ , x_n)$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ em **R** e considere-se um ponto $\overline{a} = (a_1\,, \ a_2\,, \ \ldots \ , \ a_n)$ de acumulação (próprio ou impróprio) do respectivo domínio. Agrupem-se as n variáveis (e as n coordenadas do ponto $\overline{a}$) num par ordenado de blocos, como se indica :

1º Bloco : $\overline{x}_\alpha = (\, x_{\alpha_1}\,,\ x_{\alpha_2}\,,\ \ldots\ ,\ x_{\alpha_r}\,)$, $\overline{a}_\alpha = (\, a_{\alpha_1}\,,\ a_{\alpha_2}\,,\ \ldots\ ,\ a_{\alpha_r}\,)$

2º Bloco : $\overline{x}_\beta = (\, x_{\beta_1}\,,\ x_{\beta_2}\,,\ \ldots\ ,\ x_{\beta_s}\,)$, $\overline{a}_\beta = (\, a_{\beta_1}\,,\ a_{\beta_2}\,,\ \ldots\ ,\ a_{\beta_s}\,)$;

cada uma das variáveis x_i (e das coordenadas a_i) figura num e apenas num dos dois blocos.

Represente-se por $A_\beta \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n\text{-}s}}$ o conjunto dos pontos $\overline{x}_\alpha$ para os quais $\overline{a}_\beta$ é ponto de acumulação do domínio da variável $\overline{x}_\beta$ e existe finito,

$$\lim_{\overline{x}_\beta \to \overline{a}_\beta} f(x_1, x_2, \ldots , x_n) \ ,$$

e admita-se que $\bar{a}_\alpha$ é ponto de acumulação de A_β . Este limite é então uma função $f_\beta(\bar{x}_\alpha)$ de cujo domínio A_β , $\bar{a}_\alpha$ é ponto de acumulação.

Caso exista $\lim\limits_{\bar{x}_\alpha \to \bar{a}_\alpha} f_\beta(\bar{x}_\alpha)$ este limite chama-se *duplo limite sucessivo ou reiterado* de $f(\bar{x})$ em $\bar{a}$ e representa-se pelo símbolo,

$$\lim_{\bar{x}_\alpha \to \bar{a}_\alpha} \lim_{\bar{x}_\beta \to \bar{a}_\beta} f(x_1, x_2, \dots , x_n) \ .$$

Como a partição das n variáveis de f num par ordenado de blocos se pode fazer de diversas maneiras, são concebíveis diversos duplos limites sucessivos de uma função num ponto, alguns dos quais podem eventualmente não existir .

De modo semelhante se pode introduzir o conceito de triplo limite sucessivo. Para tal agrupam-se as n variáveis (e as n coordenadas do ponto $\bar{a}$) num terno ordenado de blocos, $\bar{x}_\alpha$, $\bar{x}_\beta$, $\bar{x}_\eta$ ($\bar{a}_\alpha$, $\bar{a}_\beta$, $\bar{a}_\eta$). Represente-se por A_η o conjunto dos pontos $(\bar{x}_\alpha , \bar{x}_\beta)$ para os quais $\bar{a}_\eta$ é ponto de acumulação do domínio da variável $\bar{x}_\eta$ e existe finito,

$$\lim_{\bar{x}_\eta \to \bar{a}_\eta} f(x_1, x_2, \dots , x_n) \ ,$$

e admita-se que $(\bar{a}_\alpha , \bar{a}_\beta)$ é ponto de acumulação de A_η . Este limite é então uma função $f_\eta(\bar{x}_\alpha , \bar{x}_\beta)$ de cujo domínio A_η , $(\bar{a}_\alpha , \bar{a}_\beta)$ é ponto de acumulação. O duplo limite sucessivo,

$$\lim_{\bar{x}_\alpha \to \bar{a}_\alpha} \lim_{\bar{x}_\beta \to \bar{a}_\beta} f_\eta(\bar{x}_\alpha , \bar{x}_\beta),$$

caso exista , designa-se por triplo limite sucessivo ou reiterado de $f(\bar{x})$ em $\bar{a}$ e representa-se pelo símbolo,

$$\lim_{\bar{x}_\alpha \to \bar{a}_\alpha} \lim_{\bar{x}_\beta \to \bar{a}_\beta} \lim_{\bar{x}_\eta \to \bar{a}_\eta} f(x_1, x_2, \dots , x_n).$$

Tal como no caso do duplo limite sucessivo, a partição das n variáveis num terno ordenado pode fazer-se de diversas maneiras, sendo portanto concebíveis diversos triplos limite sucessivos, alguns dos quais podem eventualmente não existir.

Por um processo de recorrência, semelhante ao utilizado para definir triplo limite sucessivo, pode definir-se quádruplo limite sucessivo e, em geral, limite sucessivo de qualquer multiplicidade que seja compatível com o número de variáveis (não se pode, por exemplo, definir limite sucessivo quádruplo, quando a função tenha apenas três variáveis !)

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1 : Considere-se a função,

$$f(x\,,y\,,z)\;=\;\frac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}\;,$$

com domínio $A=\{(x\,,y\,,z):\;x^2+y^2+z^2\neq 0\;\}$ e o ponto $(0\,,0\,,0)$. Tem-se:

a) $\varphi(x)=\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ z\to 0}}\dfrac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}\;=\begin{cases}x & , \quad x\neq 0\\ -1 & , \quad x=0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\;\lim_{\substack{y\to 0\\ z\to 0}}\frac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}\;=\;0\;;$$

b) $\varphi(y\,,z)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}\;=\begin{cases}-1 & , \quad y^2+z^2\neq 0\\ 0 & , \quad y^2+z^2=0\end{cases}$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ z\to 0}}\varphi(y\,,z)=\text{-}1$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ z\to 0}}\;\lim_{x\to 0}\frac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}=\text{-}1\;;$$

c) $\varphi(x\,,y)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}\;=\;\dfrac{x^3\;-\;y^2}{x^2\;+\;y^2}\qquad(\,x^2+y^2\neq 0\,)$

$$\theta(x)\;=\;\lim_{y\to 0}\varphi(x\,,y)=\lim_{y\to 0}\frac{x^3\;-\;y^2}{x^2\;+\;y^2}\;=\begin{cases}x & , \quad x\neq 0\\ -1 & , \quad x=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)\;=\;0$$

$$\lim_{x\to 0}\;\lim_{y\to 0}\;\lim_{z\to 0}\frac{x^3\;-\;y^2\;-\;z^2}{x^2\;+\;y^2\;+\;z^2}\;=\;0\;.$$

Exemplo 2 : Considere-se a função,

$$f(x,y)=\frac{y\;+\;x\;-\;1}{x^3}\;,$$

com domínio $A = \{(x, y) :\ x \neq 0\}$ e o ponto $(0 , 1)$. Tem-se:

$$\lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 1} \frac{y + x - 1}{x^3} = +\infty \ .$$

Exemplo 3 : Considere-se a função, $f(x, y) = x \,.\, sen\,(1/y)$ cujo domínio é o conjunto $A = \{(x, y) :\ y \neq 0\}$ e o ponto $(0 , 0)$. Facilmente se conclui que,

$$\lim_{y\to 0}\ \lim_{x\to 0}\ x \,.\, sen\,(1/y) = 0\ ,$$

e no entanto não existe ,

$$\lim_{x\to 0}\ \lim_{y\to 0}\ x \,.\, sen\,(1/y)\ ,$$

porque a função $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to 0}\ x \,.\, sen\,(1/y)$ só é definida para $x = 0$. Repare-se que no entanto,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\ x \,.\, sen\,(1/y) = 0\ ,$$

dado que $|\, x \,.\, sen\,(1/x)\,| \leq |\, x\,|$.

O teorema seguinte permite utilizar os limites sucessivos para provar que uma função não tem limite num ponto.

Teorema 5 : *Existindo* $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = k$ *, próprio ou impróprio, qualquer limite sucessivo de f em* $\bar{a}$ *, desde que exista, coincide com* k *.*

<u>Demonstração</u> : Consideraremos apenas o caso do duplo limite sucessivo, valendo idêntico argumento no caso do limite sucessivo de qualquer multiplicidade.

Considere-se então a partição $(\bar{x}_\alpha , \bar{x}_\beta)$ das coordenadas de $\bar{x}$ e a correspondente partição $(\bar{a}_\alpha\,,\ \bar{a}_\beta)$ das coordenadas de $\bar{a}$. Tem-se, com $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ e com $\varepsilon^* = \varepsilon\,/\sqrt{2}$

$$\bar{x}_\alpha \in V_{\varepsilon^*}(\bar{a}_\alpha) \wedge \bar{x}_\beta \in V_{\varepsilon^*}(\bar{a}_\beta) \Rightarrow \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}),$$

o mesmo se verificando com $\bar{a}$ ponto impróprio.

De $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = k$ resulta, usando a definição de Cauchy, que , fixado $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que, se $\bar{x} \in [V_\varepsilon(\bar{a}) - \{\bar{a}\}] \cap A$, então,

$$f(\bar{x}) \in V_{\delta}(k) = \begin{cases}]k-\delta\,,\,k+\delta[& , \quad k \ \ finito \\ ]1/\delta\,,\,+\infty[& , \quad k = +\infty \\ ]-\infty\,,\,-1/\delta[& , \quad k = -\infty \end{cases} .$$

Quando, para um dado $\bar{x}_\alpha \in [V_{\varepsilon^*}(\bar{a}_\alpha) - \{\bar{a}\}] \cap A_\beta$, fazemos tender $\bar{x}_\beta$ para $\bar{a}_\beta$, o limite $f_\beta(\bar{x}_\alpha) = \lim\limits_{\bar{x}_\beta \to \bar{a}_\beta} f(\bar{x})$, caso exista, pertence a :

a) $[\,k - \delta, k + \delta\,]$, se k finito ;
b) $[\,1/\delta, +\infty\,[$, se $k = +\infty$;
c) $]\,-\infty, -1/\delta\,]$, se $k = -\infty$.

E então , caso exista,

$$\lambda = \lim_{\bar{x}_\alpha \to \bar{a}_\alpha} f_\beta(\bar{x}_\alpha) = \lim_{\bar{x}_\alpha \to \bar{a}_\alpha} \lim_{\bar{x}_\beta \to \bar{a}_\beta} f(\bar{x}) ,$$

tem-se também: a) $k - \delta \le \lambda \le k + \delta$, se k for finito ; b) $\lambda \ge 1/\delta$, se $k = +\infty$; c) $\lambda \le -1/\delta$, se $k = -\infty$.

Devido à arbitrariedade do $\delta > 0$ fixado, tem-se necessariamente $\lambda = k$, em todos os casos quanto ao valor de k , como se queria demonstrar.

Exemplo 4 : a) Para provar que não existe $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x + y^2}{x - y}$, basta notar que,

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x + y^2}{x - y} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x + y^2}{x - y} = 0 .$$

b) Para provar que não existe $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 1}} \dfrac{x - y + z - 1}{x + y + z - 1}$, basta notar que,

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \lim_{z \to 1} \frac{x - y + z - 1}{x + y + z - 1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \to 0} \lim_{\substack{x \to 0 \\ z \to 1}} \frac{x - y + z - 1}{x + y + z - 1} = -1 .$$

Para terminar convém observar que, da eventual existência e igualdade de todos os limites sucessivos, nada se pode inferir quanto à existência de limite da função no ponto. Apenas da obtenção de limites sucessivos distintos se conclui que a função não tem limite.

Deve também observar-se que pelo facto de não existirem alguns dos limites sucessivos, não se pode concluir pela inexistência de limite para a função.

5.2 – Caso das funções de $A \subset \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$

Como se viu anteriormente , uma função f de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$ associa a cada vector $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in A \subseteq \mathbf{R}^n$ um certo vector de $\mathbf{R}^m$,

$$\bar{y} = (y_1 , y_2 , \dots , y_m) = f(\bar{x}) = [\ f_1(\bar{x}) ,\ f_2(\bar{x}) ,\ \dots ,\ f_m(\bar{x})\ ] ,$$

podendo considerar-se como um sistema de m funções reais de n variáveis reais,

$$\begin{cases} y_1 = f_1(\bar{x}) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(\bar{x}) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ y_m = f_m(\bar{x}) = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} ,$$

em que a função $f_j(\bar{x})$ associa a cada $\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_n) \in A$ a j-ésima coordenada de $\bar{y} = (y_1 , y_2 , \dots , y_m) = f(\bar{x})$.

De acordo com a definição de Heine, tem-se,

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \Leftrightarrow \forall\ \bar{x}_p \in A \ ,\ \bar{x}_p \neq \bar{a} \ \wedge\ \lim \bar{x}_p = \bar{a} \ \Rightarrow\ \lim f(\bar{x}_p) = \bar{b} ,$$

e como,

$$\lim f(\bar{x}_p) = [\ \lim f_1(\bar{x}_p) ,\ \lim f_2(\bar{x}_p) ,\ \dots ,\ \lim f_m(\bar{x}_p)\ ] ,$$

facilmente se conclui que ,

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = \bar{b} \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f_j(\bar{x}) = b_j \quad (\ j = 1 , 2 ,\ \dots ,\ m)$$

podendo assim, para as funções f de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$, reduzir-se o cálculo de $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$ ao cálculo dos m limites $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f_j(\bar{x})$, cada um deles relativo a uma função real de n variáveis reais, questão já tratada em 5.1. Nada mais é necessário acrescentar, apresentan-do-se apenas os seguintes exemplos:

1) Sendo $f(x , y) = [\ x + y^2 \ ,\ x - y \ ,\ x/(1 + y^2)]$ uma função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^3$, tem-se, por exemplo,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} f(x , y) = [\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} x + y^2 \ ,\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} x - y \ ,\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} x/(1 + y^2)] = (\ 5 , - 1 , 1/5\ ) \ ;$$

2) Sendo $f(x , y , z) = [\ x + y + z \ ,\ (x + z)/(y + z)]$ uma função com domínio no conjunto $A = \{(x , y , z) : y \neq -z\} \subset \mathbf{R}^3$, não existe o respectivo limite no ponto (0 , 0 , 0), uma vez que não existe o limite,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 0}} (x+z)/(y+z) \ .$$

6. Continuidade pontual

Seja $f(\overline{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ e $\overline{a} \in A$. Diz-se que $f(\overline{x})$ é *contínua* em $\overline{x} = \overline{a}$ se e só se,

$$\forall \ \delta > 0 \ , \ \exists \ \varepsilon = \varepsilon(\delta) \ : \ x \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(\overline{a}) \cap A \ \Rightarrow \ f(\overline{x}) \in \mathrm{V}_{\delta}[f(\overline{a})] \ ,$$

ou seja, se e só se,

$$\forall \ \delta > 0 \ , \ \exists \ \varepsilon = \varepsilon(\delta) \ : \ \|\overline{x} - \overline{a}\| < \varepsilon \ \wedge \ \overline{x} \in A \Rightarrow \| f(\overline{x}) - f(\overline{a}) \| < \delta .$$

Quando $\overline{a} \in A$ não seja ponto de acumulação de A (nesse caso diz-se que $\overline{a}$ é ponto isolado do domínio da função), existe sempre certa vizinhança de $\overline{a}$ em que o único ponto de A que aí se encontra é o próprio $\overline{a}$; portanto, neste caso, a condição que define a continuidade de $f(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$ é sempre verificada. Quando $\overline{a} \in A$ seja ponto de acumulação de A , a condição que define a continuidade de $f(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$ equivale a ser $\lim\limits_{x \to a} f(\overline{x}) = f(\overline{a})$.

Com um argumento semelhante ao utilizado quando se demonstrou a equivalência das definições de limite de Heine e Cauchy, pode concluir-se que $\overline{a} \in A$ (ponto isolado ou não) é ponto de continuidade da função $f(\overline{x})$ se e só se para qualquer sucessão $\overline{x}_p$ de elementos de A que tenha por limite o real $\overline{a}$ a correspondente sucessão $f(\overline{x}_p)$ tiver por limite $f(\overline{a})$.

Quando seja $m \geq 2$ a função $f(\overline{x})$ pode, como vimos, considerar-se como um sistema de m funções $f_j(\overline{x})$ reais de n variáveis reais e facilmente se conclui que a continui-dade de $f(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$ equivale à continuidade nesse mesmo ponto das m funções $f_j(\overline{x})$. Com efeito , por ser $| f_j(\overline{x}) - f_j(\overline{a}) | \leq \| f(\overline{x}) - f(\overline{a}) \|$, a continuidade de $f(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$ implica a continuidade da cada uma das $f_j(\overline{x})$ no mesmo ponto; inver-samente, sendo todas as m funções $f_j(\overline{x})$ contínuas em $\overline{x} = \overline{a}$, tem-se ,

$$\forall \ \delta > 0 \ , \ \exists \ \varepsilon_j = \varepsilon_j(\delta) \ : \ \|\overline{x} - \overline{a}\| < \varepsilon_j \ \wedge \ \overline{x} \in A \ \Rightarrow \ |f_j(\overline{x}) - f_j(\overline{a})| < \delta/\sqrt{m} \ .$$

$$(j = 1 \ , 2 \ , \ \ldots \ , \ m)$$

e portanto, com ε igual ao menor dos ε_j, tem-se ,

$$\forall \ \delta > 0 \ , \ \exists \ \varepsilon = \varepsilon(\delta) \ : \ \|\overline{x} - \overline{a}\| < \varepsilon \ \wedge \ \overline{x} \in A \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_j(\overline{x}) - f_j(\overline{a})| < \delta/\sqrt{m} \ \ (j = 1 \ , 2 \ , \ \ldots \ , \ m) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |f_j(\bar{x}) - f_j(\bar{a})|^2} = \| f(\bar{x}) - f(\bar{a}) \| < \delta \,,$$

ficando assim justificada a continuidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$.

O teorema seguinte garante a continuidade da função composta $\bar{z} = [f \circ g](\bar{x})$ a partir da continuidade das funções $\bar{y} = g(\bar{x})$ e $\bar{z} = f(\bar{y})$.

Teorema 6 : *Admita-se que a função* $\bar{y} = g(\bar{x})$ *de* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$ *é contínua em certo ponto* $\bar{a} \in A$ *e que a função* $\bar{z} = f(\bar{y})$ *de* $B = g(A) \subseteq \mathbf{R}^m$ em $\mathbf{R}^p$ *é contínua no ponto correspondente* $\bar{b} = g(\bar{a}) \in B$. *Então a função composta* $[f \circ g](\bar{x})$ *é contínua em* $\bar{x} = \bar{a}$

<u>Demonstração</u>: A continuidade de $f(\bar{y})$ em $\bar{b} = g(\bar{a})$ e de $g(\bar{x})$ em $\bar{a}$ traduz-se respectivamente por,

$$1)\ \forall\, \delta > 0 \;\;,\;\; \exists\, \eta = \eta(\delta) \;:\;\; \bar{y} \in V_\eta(\bar{b}) \cap g(A) \Rightarrow f(\bar{y}) \in V_\delta[f(\bar{b})]$$
$$2)\ \forall\, \eta > 0 \;\;,\;\; \exists\, \varepsilon = \varepsilon(\eta) \;:\;\; \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \Rightarrow g(\bar{x}) \in V_\eta[g(\bar{a})] \;\;,$$

Então, dado $\delta > 0$, determina-se $\eta = \eta(\delta)$ pela condição 1) e a partir deste determina-se $\varepsilon = \varepsilon(\eta) = \varepsilon[\eta(\delta)]$ pela condição 2); claro que então, com o ε e η assim determinados,

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \Rightarrow g(\bar{x}) \in V_\eta[g(\bar{a})] \Rightarrow g(\bar{x}) \in V_\eta[g(\bar{a})] \cap g(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f[g(\bar{x})] \in V_\delta[f(\bar{b})] \Rightarrow f[g(\bar{x})] \in V_\delta\{f[g(\bar{a})]\}\,,$$

assim se provando a continuidade de $[f \circ g](\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$.

Embora o teorema precedente tenha sido enunciado para o caso $B = g(A)$ - domínio de $f(\bar{y})$ coincidente com o contradomínio de $g(\bar{x})$ - , ele adapta-se com facilidade ao caso da composição de funções em que $B \neq g(A)$ e $B \cap g(A) \neq \emptyset$. De facto, restringindo o domínio de $g(\bar{x})$ ao conjunto A_0 de todos os $\bar{x} \in A$ que fazem $g(\bar{x}) \in B$, restringindo o domínio de $f(\bar{y})$ ao conjunto $g(A_0)$ e atendendo a que a continuidade de $g(\bar{x})$ em $\bar{a}$ se mantém quando se restringe o domínio da função, o mesmo acontecendo quanto à continuidade de $f(\bar{y})$ em $\bar{b}$, o teorema é aplicável à função composta $\bar{z} = f[g(\bar{x})]$ definida em A_0.

7. <u>Descontinuidades</u>

Dada a função $f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$, considere-se $\bar{a} \in Ad\ A = A \cup A'$. Como já sabemos, a função é contínua em $\bar{x} = \bar{a}$, nos seguintes casos : **1)** $\bar{a} \in A$ e $\bar{a} \notin A'$ ($\bar{a}$ é ponto isolado do domínio) ; **2)** $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \in A'$ e $\lim\limits_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$.

A função diz-se *descontínua* em $\bar{x} = \bar{a}$, nos seguintes casos : **1)** $\bar{a} \in A$, $\bar{a} \in A'$ e $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$ ou não existe ou existindo é distinto de $f(\bar{a})$; **2)** $\bar{a} \notin A$, $\bar{a} \in A'$ e $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$ ou não existe ou existindo é impróprio .

Há ainda outro caso possível : $\bar{a} \notin A$, $\bar{a} \in A'$ e $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$ existe em $\mathbf{R^m}$. Neste caso a função $f(\bar{x})$ diz-se *quase contínua* em $\bar{x} = \bar{a}$, no sentido de que é possível, alargando o domínio da função a $\bar{x} = \bar{a}$ e definindo $f(\bar{a}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x})$, obter uma função contínua.

8. Continuidade num conjunto. Propriedades especiais das funções contínuas

8.1 - Definição de função contínua num conjunto

A definição de continuidade num conjunto é semelhante à que foi dada para o caso das funções reais de variável real. Dada a função $f(\bar{x})$de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$, ela diz-se *contínua no seu domínio* se e só se for contínua em todos os $\bar{a} \in A$. Por outro lado , $f(\bar{x})$ diz-se *contínua no conjunto* $B \subset A$ se e só se a restrição de $f(\bar{x})$ a B for contínua em todos os $\bar{a} \in B$.

Estudam-se seguidamente algumas propriedades especiais das funções contínuas em conjuntos especiais. Estas propriedades são generalizações de idênticas propriedades estudadas para as funções reais de variável real.

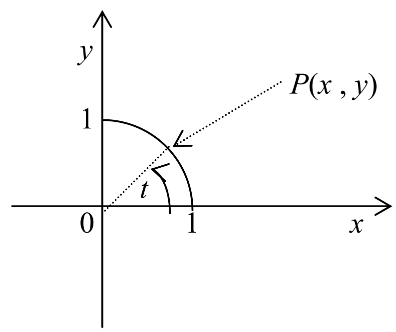
8.2 - Generalização do Teorema de Cauchy

8.2.1 - Conexão por arcos

A generalização do teorema de Cauchy ao caso das funções com domínio contido no espaço $\mathbf{R^n}$, pressupõe a definição da conexão por arcos para os subconjuntos de um espaço $\mathbf{R^n}$.

Seja $\bar{x} = g(t)$ uma função de $I = [a\,,\,b] \subset \mathbf{R}$ em $\mathbf{R^n}$ e admita-se a respectiva continuidade nesse intervalo. Ao conjunto $C = \{\,\bar{x} \;:\; \bar{x} = g(t) \;\wedge\; a \le t \le b\}$ chama-se *arco de curva* de extremidades $\bar{a} = g(a)$ e $\bar{b} = g(b)$. A função $\bar{x} = g(t)$ corresponde a um sistema de n funções reais de variável real, cada uma das quais dá uma das coordenadas de $\bar{x}$ em função de t , $x_1 = g_1(t)$, $x_2 = g_2(t)$, … , $x_n = g_n(t)$, sendo que a continuidade de $\bar{x} = g(t)$ equivale , como sabemos, à continuidade de cada uma das $g_j(t)$ no mesmo intervalo. As funções $x_1 = g_1(t)$, $x_2 = g_2(t)$, … , $x_n = g_n(t)$ que origi-nam as n coordenadas do ponto $\bar{x} \in C$ correspondente a cada valor de $t \in [a\,,\,b]$ chamam-se *funções paramétricas* do arco C .

Nos casos $n = 2$ ou $n = 3$, os arcos de curva podem representar-se geometricamente no plano ou no espaço ordinário, fixando um sistema de eixos coordenados. Assim, por exemplo com as funções paramétricas $x = cos\ t$ e $y = sen\ t$, com $t \in [0\ ,\ \pi/2]$, tem--se o arco de curva $C = \{(x\ ,\ y)\ :\ x = cos\ t\ \wedge\ y = sen\ t \wedge\ 0 \leq t \leq \pi/2\} \subset \mathbf{R}^2$ que facilmente se constata ser representado no plano por um arco de círculo de centro na origem e raio unitário, sendo que as respectivas extremidades são os pontos (1 , 0) e (0 , 1) :



Nota : *A variável real t representa o ângulo representado na figura e para cada valor de t do intervalo* $[0\ ,\ \pi/2]$*, tem-se o ponto de coordenadas x = cos t e y = sen t do arco de círculo representado. Quando t percorre o respectivo intervalo de variação o ponto P(x , y) descreve o referido arco de círculo .*

Refira-se que o mesmo arco de curva pode em geral ser representado parametricamente de diferentes modos. Por exemplo, no caso do arco de círculo acima considerado podemos, entre outras, considerar as duas seguintes alternativas de representação para-métrica:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{cases} \quad (\,0\ \leq\ t\ \leq 1\,) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = cos\ (e^t - 1) \\ y = sen\ (e^t - 1) \end{cases} \quad (\,0 \leq\ t\ \leq\ log\, 2\,)$$

Tipos especiais de arcos de curva em $\mathbf{R}^n$ são os segmentos e as poligonais. Dados dois vectores $\overline{a} \in \mathbf{R}^n$ e $\overline{b} \in \mathbf{R}^n$ chama-se *segmento de extremidades* $\overline{a}$ *e* $\overline{b}$ ao arco de curva $S(\overline{a}\ ,\ \overline{b}\,) = \{\ \overline{x} :\ \overline{x} = \overline{a} +\ t.(\overline{b} - \overline{a}\,)\ \wedge\ 0 \leq t \leq 1\ \}$, sendo as funções paramétricas correspondentes,

$$x_1 = a_1 +\ t.(b_1 - a_1)\ ,\ x_2 = a_2 +\ t.(b_2 - a_2)\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = a_n +\ t.(b_n - a_n)$$

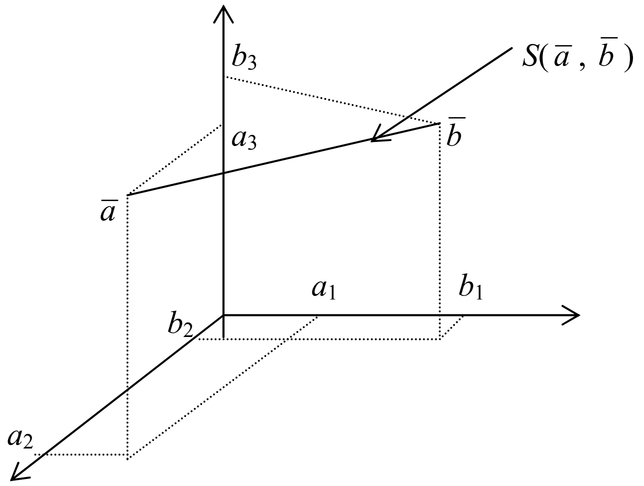
em que os a_j e b_j são respectivamente as coordenadas dos vectores $\overline{a}$ e $\overline{b}$.

Note-se que segmento $S(\overline{a}\ ,\ \overline{b}\,)$, admite ainda, entre outras, as seguintes representações paramétricas :

$$\overline{x} = \overline{a} +\ (t-k)\ .(\overline{b} - \overline{a}\,)\quad ,\quad k \leq t \leq k+1\quad ,$$

em que k é um qualquer real fixo.

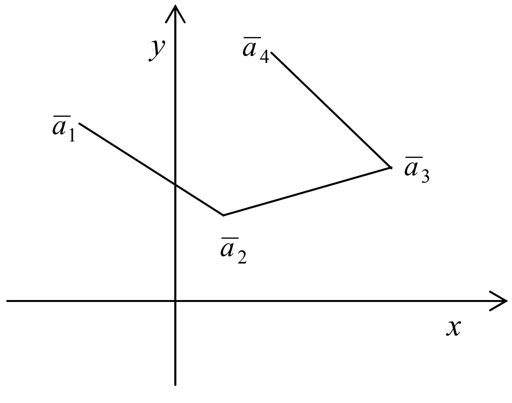
Nos casos $n = 2$ e $n = 3$, a representação geométrica dos segmentos conduz a segmentos de recta, como se ilustra no figura seguinte (correspondente ao caso $n = 3$) :



Vejamos agora o conceito de poligonal. Dados os vectores $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, … , $\bar{a}_k$ por esta ordem e em número finito, chama-se *poligonal de vértices* $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, … , $\bar{a}_k$ (por esta ordem) ao arco de curva $P(\bar{a}_1\ ,\ \bar{a}_2\ ,\ \dots\ ,\ \bar{a}_k)$ representado parametricamente pela seguinte função contínua de $[0\ ,\ k\text{-}1]$ em $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$:

$$\bar{x} = g(t) = \begin{cases} \bar{a}_1 + t\,.(\bar{a}_2 - \bar{a}_1) & ,\ \ 0 \le t < 1 \\ \bar{a}_2 + (t-1).(\bar{a}_3 - \bar{a}_2) & ,\ 1 \le t < 2 \\ \dots & \\ \bar{a}_{k-1} + (t-k+2).(\bar{a}_k - \bar{a}_{k-1}) & ,\ k-2 \le t \le k-1 \end{cases}$$

Notando que o primeiro ramo da função representa o segmento $S(\bar{a}_1\ ,\ \bar{a}_2)$ expurgado da respectiva extremidade final , o segundo ramo da função representa o segmento $S(\bar{a}_2\ ,\ \bar{a}_3)$ expurgado da respectiva extremidade final , etc. , facilmente se conclui que a poligonal $P(\bar{a}_1\ ,\ \bar{a}_2\ ,\ \dots\ ,\ \bar{a}_k)$ é a união dos segmentos $S(\bar{a}_1\ ,\ \bar{a}_2)$, $S(\bar{a}_2\ ,\ \bar{a}_3)$, etc. . Na figura seguinte representa-se geometricamente uma poligonal no espaço $\mathbf{R}^2$:



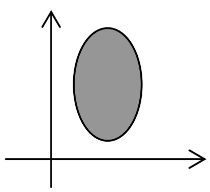
Este exemplo serve ainda para mostrar que a ordenação dos vértices é relevante, pois claramente se vê que $P(\bar{a}_1\ ,\ \bar{a}_2\ ,\ \bar{a}_3\ ,\ \bar{a}_4) \ne P(\bar{a}_1\ ,\bar{a}_4\ ,\ \bar{a}_3\ ,\ \bar{a}_2)$.

Com o conceito de arco de curva pode agora definir-se o conceito de conjunto conexo por arcos. Um conjunto $A \subseteq \mathbf{R^n}$ diz-se *conexo por arcos* se e só se quaisquer que sejam os vectores $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$ existe um arco de curva C de extremidades nesses vectores que está contido em A , isto é, existe uma função contínua $\bar{x} = g(t)$ de $I = [a\ ,\ b] \subset \mathbf{R}$ em $\mathbf{R^n}$ tal que,

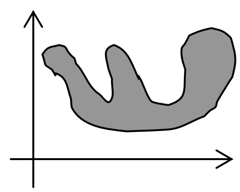
i) $\bar{a} = g(a)$ e $\bar{b} = g(b)$;
ii) $C = \{\ \bar{x}\ :\ \bar{x} = g(t)\ \wedge\ a \le t \le b\} \subseteq A$.

O caso mais simples de conjuntos conexos por arcos, são os conjuntos conexos por segmentos: o conjunto A diz-se *conexo por segmentos* (ou conjunto *convexo*) se e só se quaisquer que sejam os vectores $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$ o segmento $S(\bar{a}\ ,\ \bar{b}\ )$ está contido em A . É igualmente simples, mas mais geral que o anterior, o caso de conjuntos conexos por poligonais : o conjunto A diz-se *conexo por poligonais* se e só se quaisquer que sejam os vectores $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$ existe uma poligonal $P(\,\bar{a}_1 = \bar{a}\ ,\ \bar{a}_2\ ,\ \dots\ ,\ \bar{a}_k = \bar{b}\,)$ contida em A .

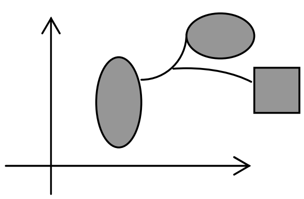
Na figura seguinte representam-se geometricamente (no caso de $\mathbf{R^2}$) quatro situações para ilustrar os conceitos precedentes (conjuntos a sombreado) :



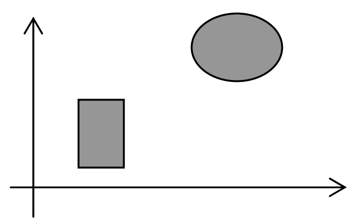
Caso 1 : Conjunto conexo por segmentos



Caso 2 : Conjunto conexo por poligonais



Caso 3 : Conjunto conexo por arcos, mas não por poligonais



Caso 4 : Conjunto não conexo por arcos

No caso muito especial de $n = 1$ é fácil ver que um conjunto $A \subseteq \mathbf{R}$ é conexo por arcos se e só se for um intervalo. Com efeito,

a) Se $I \subseteq \mathbf{R}$ for um intervalo, dados quaisquer reais $a < b$ desse intervalo, tem-se que o segmento $S(a\ ,\ b) = \{x:\ x = a + t.(b - a)\ \wedge\ 0 \le t \le 1\ \} = [a\ ,\ b] \subseteq I$, sendo portanto o intervalo I conexo por segmentos ;

b) Se $A \subseteq \mathbf{R}$ for conexo por arcos, dados quaisquer reais $a < b$ desse conjunto existe uma função real de variável real $x = g(t)$ com $t \in [t_0\ ,\ t_1]$, contínua nesse intervalo tal que: **i)** $a = g(t_0)$ e $b = g(t_1)$; **ii)** $C = \{x : x = g(t) \wedge t_0 \le t \le t_1\} \subseteq A$. Então dado um qualquer c compreendido entre a e b $(a < c < b)$, o teorema de Cauchy , estudado para funções reais de variável real, garante que existe um $t^* \in]\, t_0 , t_1 [$ tal que $c = g(t^*)$. Resulta então que $c \in C$ e portanto $c \in A$, assim se concluindo que dados dois quais-quer reais $a < b$ do conjunto A (conexo por arcos), qualquer real entre a e b pertence também a A , o que implica ser A um intervalo

8.2.2 – <u>Teorema de Cauchy</u>

Pode agora enunciar-se e demonstrar-se o teorema de Cauchy, generalização de um resultado já estudado para as funções reais de variável real

Teorema 7 : *Seja $f(\bar{x})$ função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$, admita-se que a função é contínua em $B \subseteq A$ e que B é conexo por arcos. Então o conjunto transformado de B por f , ou seja, $f(B) = \{\, \bar{y} : \bar{y} = f(\bar{x}) \wedge \bar{x} \in B \,\} \subseteq \mathbf{R^m}$ é igualmente conexo por arcos*

<u>Demonstração</u> : Considerem-se dois quaisquer vectores $\bar{u}$, $\bar{v} \in f(B)$ e sejam $\bar{a}$ e $\bar{b}$ vectores de B tais que $\bar{u} = f(\bar{a})$ e $\bar{v} = f(\bar{b})$, sendo que tais vectores existem por definição do conjunto $f(B)$. Por ser B conexo por arcos existe uma função contínua $\bar{x} = g(t)$ de $I = [a , b] \subset \mathbf{R}$ em $\mathbf{R^n}$ tal que,

i) $\bar{a} = g(a)$ e $\bar{b} = g(b)$;
ii) $C = \{\, \bar{x} : \bar{x} = g(t) \wedge a \le t \le b \,\} \subseteq B$.

Então, a função composta $\bar{y} = h(t) = f[g(t)]$ é também função contínua de $I = [a , b] \subset$ $\subset \mathbf{R}$ em $\mathbf{R^m}$ (devido à continuidade de f e de g) , tal que :

i) $\bar{u} = f[g(a)]$ e $\bar{v} = f[g(b)]$;
ii) $C^* = \{\, \bar{y} : \bar{y} = f[g(t)] \wedge a \le t \le b \,\} \subseteq f(B)$,

resultando ii) de,

$$a \le t \le b \Rightarrow \bar{x} = g(t) \in C \Rightarrow \bar{x} = g(t) \in B \Rightarrow \bar{y} = f[g(t)] \in f(B)$$

Fica assim provado que $f(B)$ é igualmente conexo por arcos, como se pretendia.

Do teorema anterior resultam os seguintes corolários :

Corolário 1 : *Sendo $f(\bar{x})$ função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$, admita-se que a função é contínua em $B \subseteq A$ e que B é conexo por arcos. Então o conjunto transformado de B por f , ou seja, $f(B) = \{\, \bar{y} : \bar{y} = f(\bar{x}) \wedge \bar{x} \in B \,\}$ é um intervalo*

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do teorema, considerando que em **R** os conjuntos conexos são apenas os intervalos.

Corolário 2 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *, admita-se que a função é contínua em* $B \subseteq A$ *e que este conjunto é conexo por arcos. Então a função não muda de sinal em B sem se anular*

<u>Demonstração</u>: O transformado de B pela função é um intervalo (corolário 1). Se a função muda de sinal em B , ao intervalo $f(B)$ pertence uma valor positivo e um valor negativo, logo $0 \in f(B)$. Existe então um $\bar{x}_0 \in B$ tal que $f(\bar{x}_0) = 0$, como se queria mostrar.

8.3 - <u>Funções contínuas num conjunto limitado e fechado</u>

Para as funções $f(\bar{x})$ *de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R^m}$ contínuas num conjunto $B \subseteq A$ limitado e fechado, tem-se um resultado semelhante ao já estudado para as funções reais de variável real.

Teorema 8 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R^m}$ *contínua no conjunto* $B \subseteq A$ *limitado e fechado, então o conjunto* $f(B) = \{\, \bar{y} \;:\; \bar{y} = f(\bar{x}) \wedge \bar{x} \in B \,\} \subseteq \mathbf{R^m}$ *é igualmente limitado e fechado*

<u>Demonstração</u> : **a)** Vejamos em primeiro lugar que $f(B)$ é limitado. Se $f(B)$ não fosse um conjunto limitado , então para $p = 1, 2, \ldots$, existiria sempre um $\bar{x}_p \in B$ tal que $\| f(\bar{x}_p) \| > n$ e seria então $\lim \| f(\bar{x}_p) \| = +\infty$. A sucessão limitada $\bar{x}_p$ admitiria uma subsucessão $\bar{x}_{\alpha_p}$ com limite $\bar{\lambda} \in B$ (dado B ser fechado) ; seria então $\lim f(\bar{x}_{\alpha_p}) = f(\bar{\lambda})$, devido à continuidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{\lambda}$; mas então $f(\bar{x}_{\alpha_p})$ seria uma sucessão limitada (por ter limite em $\mathbf{R^m}$), ou seja, ter-se-ia $\| f(\bar{x}_{\alpha_p}) \| \leq k$ com certo $k \in \mathbf{R}$, o que é incompatível com a conclusão supra de se ter $\lim \| f(\bar{x}_p) \| = +\infty$.

b) Vejamos agora que $f(B)$ é um conjunto fechado. Seja $\bar{y}_p = f(\bar{x}_p)$ uma qualquer sucessão de vectores de $f(B)$ com limite $\bar{y} \in \mathbf{R^m}$. Se se provar que $\bar{y} \in f(B)$, tal será suficiente para garantir que $f(B)$ é fechado. A sucessão limitada $\bar{x}_p$ admite uma sub-sucessão $\bar{x}_{\alpha_p}$ com limite $\bar{\lambda} \in B$ (dado B ser fechado) ; e então $\lim f(\bar{x}_{\alpha_p}) = f(\bar{\lambda})$, de-vido à continuidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{\lambda}$; tem-se então que $\bar{y} = f(\bar{\lambda})$, ou seja, $\bar{y} \in f(B)$, como se pretendia provar.

Corolário : *Sendo* $f(\bar{x})$ *função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *contínua no conjunto* $B \subseteq A$ *limitado e fechado, então* $f(\bar{x})$ *admite em B mínimo e máximo absolutos*

<u>Demonstração</u>: Resulta de imediato do teorema. O conjunto $f(B) \subset \mathbf{R}$ é limitado e fechado, admitindo por isso máximo e mínimo sendo estes o máximo e mínimo absolutos da função no conjunto B .

9. Continuidade da função inversa

Tal como para as funções reais de variável real, também agora o facto de uma função $f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$ ser contínua e injectiva no seu domínio A não é suficiente para garantir que a respectiva função inversa f^{-1} seja contínua no seu domínio $f(A)$.

No entanto,

Teorema 9 : *Sendo $f(\bar{x})$ contínua e injectiva no conjunto limitado e fechado A, então a respectiva inversa f^{-1} é também contínua em $f(A)$*

Demonstração : Tome-se um qualquer $\bar{b} \in f(A)$, ou seja, $\bar{b} = f(\bar{a})$ com certo $\bar{a} \in A$. Seja $\bar{y}_p = f(\bar{x}_p)$ uma sucessão (qualquer) de elementos de $f(A)$ tal que $\lim \bar{y}_p = \bar{b}$. Vejamos que $\lim f^{-1}(\bar{y}_p) = f^{-1}(\bar{b})$, o que provará ser f^{-1} contínua em $\bar{b} \in f(A)$ e, portanto, dada a arbitrariedade desse $\bar{b}$, ficará provada a continuidade de f^{-1} em $f(A)$.

Como os termos $\bar{x}_p$ pertencem a A e este conjunto é limitado e fechado , a sucessão $\bar{x}_p$ é limitada e vamos ver que tem limite coincidente com $\bar{a}$. Para tal provaremos que essa sucessão não admite nenhum sublimite distinto de $\bar{a}$. Considere-se então uma qualquer subsucessão $\bar{x}_{\alpha_p}$ que tenha limite, seja ele $\bar{\lambda}$; tem-se que $\bar{\lambda} \in A$ (por ser A fechado) e, devido à continuidade de $f(\bar{x})$, sai $\lim f(\bar{x}_{\alpha_p}) = f(\bar{\lambda}) = f(\bar{a})$ sendo a segunda igualdade assegurada por ser $f(\bar{x}_{\alpha_p})$ subsucessão de $\bar{y}_p = f(\bar{x}_p)$ que por hipótese tende para $\bar{b} = f(\bar{a})$. Dada a injectividade de $f(\bar{x})$, a igualdade $f(\bar{\lambda}) = f(\bar{a})$ implica $\bar{\lambda} = \bar{a}$, o que permite concluir que todos os sublimites da sucessão $\bar{x}_p$ coincidem com $\bar{a}$, donde resulta ser $\lim \bar{x}_p = \bar{a}$. Mas , dado que $\bar{x}_p = f^{-1}(\bar{y}_p)$ e $\bar{a} = f^{-1}(\bar{b})$, tal significa ser $\lim f^{-1}(\bar{y}_p) = f^{-1}(\bar{b})$, como e pretendia provar.

10 . Continuidade uniforme. Teorema de Heine – Cantor

Relembremos o conceito de função contínua num conjunto. Dada a função $f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^m$ e sendo $B \subseteq A$,

$$f \text{ é contínua em } B \Leftrightarrow \forall\ \bar{a} \in B\ ,\ \forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\bar{a}\ ,\delta)\ :$$
$$:\ \bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap B \Rightarrow f(\bar{x}) \in \mathrm{V}_\delta[f(\bar{a})]\ ,$$

ou, em termos de distâncias,

$$f \text{ é contínua em } B \Leftrightarrow \forall\ \bar{a} \in B\ ,\ \forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\bar{a}\ ,\delta)\ :$$

$$: d(\bar{x}\ , \bar{a}) = \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon \text{ e } \bar{x} \in B \Rightarrow d[f(\bar{x})\ , f(\bar{a})] = \|f(\bar{x}) - f(\bar{a})\| < \delta .$$

Refira-se que na definição precedente, o valor ε indicado depende em geral do $\delta > 0$ fixado e do ponto $\bar{a} \in B$ que se está a considerar. Caso seja possível determinar, para cada $\delta > 0$, um $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, só dependente de δ, que assegure para todos os pontos $\bar{a} \in B$,

$$d(\bar{x}\ , \bar{a}) = \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon(\delta) \text{ e } \bar{x} \in B \Rightarrow d[f(\bar{x})\ , f(\bar{a})] = \|f(\bar{x}) - f(\bar{a})\| < \delta ,$$

a função diz-se *uniformemente contínua* no conjunto *B*, ou seja,

f é uniformemente contínua em B $\Leftrightarrow \forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta)$:

$$: \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon \text{ e } \bar{x}\ , \bar{a} \in B \Rightarrow \|f(\bar{x}) - f(\bar{a})\| < \delta ,$$

ou ainda, na forma equivalente mais usual ,

f é uniformemente contínua em B $\Leftrightarrow \forall\ \delta > 0\ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta)$:

$$: \|\bar{x}' - \bar{x}''\| < \varepsilon \text{ e } \bar{x}',\ \bar{x}'' \in B \Rightarrow \|f(\bar{x}') - f(\bar{x}'')\| < \delta .$$

O teorema seguinte é frequentemente útil para estudar a eventual continuidade uniforme de uma função num conjunto.

Teorema 10 : *A função* $f(\bar{x})$ *de* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *em* $\mathbf{R}^m$ *é uniformemente contínua no conjunto* $B \subseteq A$ *se e só se quaisquer que sejam as sucessões* $\bar{x}_p'$ *e* $\bar{x}_p''$ *de pontos do conjunto B, tais que* $\lim d(\bar{x}_p', \bar{x}_p'') = 0$ *, também* $\lim d[f(\bar{x}_p')\ , f(\bar{x}_p'')] = 0$

<u>Demonstração</u> : Suponha-se $f(\bar{x})$ uniformemente contínua em *B* e sejam $\bar{x}_p'$ e $\bar{x}_p''$ duas sucessões de pontos do conjunto *B* tais que $\lim d(\bar{x}_p', \bar{x}_p'') = 0$. Dado um qualquer $\delta > 0$, existe $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ tal que,

$$d(\bar{x}',\ \bar{x}'') < \varepsilon \text{ e } \bar{x}',\ \bar{x}'' \in B \Rightarrow d[f(\bar{x}')\ , f(\bar{x}'')] < \delta ;$$

como, de certa ordem em diante, $d(\bar{x}_p', \bar{x}_p'') < \varepsilon$, tem-se , a partir da mesma ordem, $d[f(\bar{x}_p')\ , f(\bar{x}_p'')] < \delta$, o que prova ser $\lim\ d[f(\bar{x}_p')\ , f(\bar{x}_p'')] = 0$.

Inversamente, admita-se que para quaisquer $\bar{x}_p'\ ,\ \bar{x}_p'' \in B$ tais que, $\lim d(\bar{x}_p'\ ,\ \bar{x}_p'') =$ $= 0$, se tem também $\lim d[f(\bar{x}_p')\ , f(\bar{x}_p'')] = 0$. Vejamos que então, a função $f(\bar{x})$ é uniformemente contínua no conjunto.

Se, por absurdo, tal não acontecesse, haveria um δ_0 relativamente ao qual, para qualquer $\varepsilon > 0$, existiriam pontos $\bar{x}_\varepsilon^{'}$, $\bar{x}_\varepsilon^{''} \in B$ tais que,

$$d(\bar{x}_\varepsilon^{'}, \bar{x}_\varepsilon^{''}) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d[f(\bar{x}_\varepsilon^{'}), f(\bar{x}_\varepsilon^{''})] \geq \delta_0 ;$$

considerando então, $\varepsilon_p = 1/p$, existiriam pontos $\bar{x}_p^{'}$, $\bar{x}_p^{''} \in B$ tais que,

$$d(\bar{x}_p^{'}, \bar{x}_p^{''}) < 1/p \quad \text{e} \quad d[f(\bar{x}_p^{'}), f(\bar{x}_p^{''})] \geq \delta_0 ,$$

sendo então $\lim d(\bar{x}_p^{'}, \bar{x}_p^{''}) = 0$, sem que em correspondência se tivesse,

$$\lim d[f(\bar{x}_p^{'}), f(\bar{x}_p^{''})] = 0 ,$$

o que seria contrário à hipótese admitida inicialmente. Logo, $f(\bar{x})$ deverá ser uniformemente contínua em B como se queria provar.

Embora, em geral, uma função possa ser contínua num conjunto sem que aí seja uniformemente contínua, vamos estudar o teorema de Heine-Cantor onde se garante que uma função contínua num conjunto limitado e fechado é sempre uniformemente contínua nesse conjunto.

Teorema 11 : *Sendo $f(\bar{x})$ função de $A \subseteq$* $\mathbf{R}^n$ *em* $\mathbf{R}^m$ *contínua no conjunto limitado e fechado $B \subseteq A$, então $f(\bar{x})$ é uniformemente contínua em B* (**Heine-Cantor**)

<u>Demonstração</u> : Seja $f(\bar{x})$ contínua no conjunto limitado e fechado B e considere-se por absurdo que não é uniformemente contínua nesse conjunto . Existiria então certo $\delta > 0$ tal que, qualquer que fosse $\varepsilon > 0$, sempre haveria pontos $\bar{x}_\varepsilon^{'}$, $\bar{x}_\varepsilon^{''} \in B$ de modo a ser,

$$d(\bar{x}_\varepsilon^{'}, \bar{x}_\varepsilon^{''}) < \varepsilon \quad \text{e} \quad d[f(\bar{x}_\varepsilon^{'}), f(\bar{x}_\varepsilon^{''})] \geq \delta$$

Em particular com $\varepsilon_p = 1/p$, existiriam pontos $\bar{x}_p^{'}$, $\bar{x}_p^{''} \in B$ tais que,

$$d(\bar{x}_p^{'}, \bar{x}_p^{''}) < 1/p \quad \text{e} \quad d[f(\bar{x}_p^{'}), f(\bar{x}_p^{''})] \geq \delta .$$

Como a sucessão $\bar{x}'_p$ é limitada existe uma sua subsucessão $\bar{x}'_{\alpha_p}$ com limite $\bar{a} \in B$ e vê-se com facilidade que ,

$$lim\ \bar{x}'_{\alpha_p} = \bar{a} \quad \wedge\ d\,(\bar{x}'_{\alpha_p}, \bar{x}''_{\alpha_p}) = \|\bar{x}'_{\alpha_p} - \bar{x}''_{\alpha_p}\| < 1/\alpha_p \quad \Rightarrow\ lim\ \bar{x}''_{\alpha_p} = \bar{a}$$

Por outro lado, $lim\, f\,(\bar{x}'_{\alpha_p}) = lim\, f\,(\bar{x}''_{\alpha_p}) = f\,(\bar{a})$ devido à continuidade de $f\,(\bar{x})$ em $\bar{a} \in B$, daqui resultando,

$$lim\ d\,[f\,(\bar{x}'_{\alpha_p}),\, f\,(\bar{x}''_{\alpha_p})] = lim\ \|f\,(\bar{x}'_{\alpha_p}) - f\,(\bar{x}''_{\alpha_p})\| = 0\,,$$

em contradição com a condição $d\,[\,f\,(\bar{x}'_p)\,,\ f\,(\bar{x}''_p)] \geq \delta$ que deveria ser verificada para todo o natural $p \in \mathbf{N}$.

11 - <u>Noção de contracção. Teorema do ponto fixo</u>

Dada a função $f\,(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ diz-se que se trata de uma *função contínua segundo Lipschitz* no conjunto $B \subseteq A$ se e só se existe um real $c > 0$ tal que,

$$\|f\,(\bar{x}') - f\,(\bar{x}'')\| \leq c\,.\,\|\bar{x}' - \bar{x}''\|\ ,$$

quaisquer que sejam $\bar{x}',\ \bar{x}'' \in B$. É muito fácil de provar que, sendo $f\,(\bar{x})$ uma função contínua segundo Lipschitz no conjunto B é aí uniformemente contínua , não sendo porém a inversa verdadeira.

Dada a função $f\,(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^n}$, tal função diz-se uma *contracção* se e só se:

i) $f\,(A) \subseteq A \subseteq \mathbf{R^n}$;
ii) A função verifica a condição de Lipschitz com $0 < c < 1$ no domínio A, ou seja, existe $c \in\,]\,0{,}1\,[$ tal que,

$$\forall\ \bar{x}',\ \bar{x}'' \in A \quad , \quad \|f\,(\bar{x}') - f\,(\bar{x}'')\| \leq c\,.\,\|\bar{x}' - \bar{x}''\|\ .$$

O teorema seguinte, conhecido em Análise Matemática por *teorema do ponto fixo* , é importante em diversas aplicações:

Teorema 12 : *Se a função f de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^n}$ for uma contracção e A for um conjunto fechado , então a equação $f\,(\bar{x}) = \bar{x}$ tem uma e uma só solução em A*

<u>Demonstração</u> : Considere-se um ponto arbitrário $\bar{x}_0 \in A$ e construa-se a seguinte sucessão de pontos de A :

$$\bar{x}_1 = f\,(\bar{x}_0)\,,\ \ \bar{x}_2 = f\,(\bar{x}_1)\,,\ \ \ldots\ ,\ \ \bar{x}_p = f\,(\bar{x}_{p-1})\,,\ \ \ldots\ .$$

Como f é uma contracção , tem-se (com certo $c \in]\,0\,,1\,[$) :

$$\| \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \| = \| f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_0) \| \leq c \,.\, \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| \,,$$

$$\| \bar{x}_3 - \bar{x}_2 \| = \| f(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_1) \| \leq c \,.\, \| \bar{x}_2 - \bar{x}_1 \| \leq c^2 \,.\, \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| \,,$$

e, em geral, para $p = 2\,,3\,,\ldots\,,\ \| \bar{x}_p - \bar{x}_{p-1} \| \leq c^{p-1} \,.\, \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \|$.

Então, com $p > m$,

$$\| \bar{x}_p - \bar{x}_m \| \leq \| \bar{x}_p - \bar{x}_{p-1} \| + \| \bar{x}_{p-1} - \bar{x}_{p-2} \| + \ldots + \| \bar{x}_{m+1} - \bar{x}_m \| \leq$$

$$\leq (c^{p-1} + c^{p-2} + \ldots + c^m) \,.\, \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| \leq \frac{c^m}{1-c} \cdot \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| \,.$$

Por ser $0 < c < 1$, tem-se que a sucessão real de termo geral $u_m = c^m$ tende para zero e, portanto,

$$\| \bar{x}_p - \bar{x}_m \| \leq \frac{c^m}{1-c} \cdot \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \| < \varepsilon \,,$$

de certa ordem p_ε em diante , ou seja , para $p > m > p_\varepsilon$, tem-se a seguinte desigualdade: $\| \bar{x}_p - \bar{x}_m \| < \varepsilon$. Tal significa que a sucessão $\bar{x}_p$ verifica a condição de Cauchy; portanto, existe $\bar{a} = lim\ \bar{x}_p$ e claro que $\bar{a} \in A$ (por ser A um conjunto fechado) . Por ser $\bar{x}_p = f(\bar{x}_{p-1})$ e f função contínua em $\bar{a}$ (note-se que, sendo f função contínua segundo Lipschitz no conjunto A , é ai uniformemente contínua, logo contínua em qualquer ponto pertencente a esse conjunto), tem-se $\bar{a} = f(\bar{a})$, ou seja, o ponto $\bar{a} = lim\ \bar{x}_p$ do conjunto A é uma solução da equação $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Para concluir que o ponto $\bar{a}$ obtido anteriormente é a única solução em A da equação $f(\bar{x}) = \bar{x}$, considere-se uma eventual solução alternativa $\bar{b} \in A$; tem-se,

$$f(\bar{a}) = \bar{a} \ \wedge\ f(\bar{b}) = \bar{b} \ \Rightarrow\ \| \bar{a} - \bar{b} \| = \| f(\bar{a}) - f(\bar{b}) \| \leq c \,.\, \| \bar{a} - \bar{b} \| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - c) \,.\, \| \bar{a} - \bar{b} \| \leq 0 \,;$$

por ser $1 - c > 0$, resulta $\| \bar{a} - \bar{b} \| \leq 0$, o que implica $\| \bar{a} - \bar{b} \| = 0$, ou seja, $\bar{a} = \bar{b}$.

12. Exercícios

1 - Utlize a definição de limite segundo Cauchy para mostrar que,

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2\, y^2}{x^2 + y^2} = 0$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} \dfrac{1}{x + y} = 0$.

2 - Dada a função f de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}$ tal que,

$$f(x\,,y) = \begin{cases} 3x & , \quad x \text{ racional ou } y \text{ racional} \\ x.(y^2 - 1) & , \quad x \text{ e } y \text{ irracionais} \end{cases}$$

e os conjuntos,

$$A = \{(x\,,y)\ :\ x \in \mathbf{Q} \ \vee\ y \in \mathbf{Q}\} \quad \text{e} \quad B = \{(x\,,y)\ :\ x \in \mathbf{R}\text{ - }\mathbf{Q} \ \wedge\ y \in \mathbf{R}\text{ - }\mathbf{Q}\},$$

a) Utilize a definição de limite segundo Heine para determinar os sublimites da função no ponto de coordenadas $x = y = 1$, relativos aos conjuntos A e B ;

b) Para $(a\ ,\ b) \in \mathbf{R}^2$, em que condições existe limite da função no ponto em causa ? Justifique.

3 - Considere a função $f(x\,,y) = x\,.\,(y + x)^{-1}$ e o ponto (0,0) .

a) Calcule os sublimites de f no ponto dado, relativos aos conjuntos,

$M = \{(x\,,y) : y = 2\,x \ \wedge\ x \neq 0\}$, $N = \{(x\,,y) : y = 3x \ \wedge\ x \neq 0\}$ e

$R = \{(x\,,y) : y = x^2 - x \ \wedge\ x > 0\}$;

b) Determine o conjunto S dos sublimites (próprios ou impróprios) da função no ponto dado;

c) Face aos resultados das alíneas anteriores, que pode afirmar sobre a existência do limite da função no ponto em causa ? Justifique.

4 - Considere a função,

$$f(x\,,y) = \frac{x\,y}{2y - x^2}\ ,$$

e calcule os respectivos sublimites no ponto de coordenadas $x = y = 0$, relativos aos seguintes subconjuntos:

a) Recta de equações paramétricas, $x = t$, $y = 2t$;

b) Curva de equações paramétricas, $x = t$, $y = t^3$.

5 - Considere a seguinte função,

$$f(x, y, z) = \frac{x + y - 1}{x + z - 1} \quad .$$

a) Utilize os conjuntos $A_\alpha = \{(x, y, z) : x = 0 , y = t , z = \alpha(t-1) + 1\}$ $(\alpha \neq 0)$ para mostrar que qualquer real diferente de zero é sublimite da função no ponto (0 , 1 , 1) ;

b) Mostre que também 0 , $+\infty$ e - ∞ são sublimites da função no mesmo ponto.

6 - Determine o parâmetro real α de modo que a seguinte função tenha limite no ponto (1 , 1) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} + \alpha \ , & x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ e \ y \neq x \\ \dfrac{x^2 + 1}{y^2 + 1} - \alpha & , outros \ (x, y) \end{cases} \quad .$$

7 - Considere a seguinte função,

$$f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{x^4 y^4 + (x - y)^2} \quad .$$

a) Mostre que existem e são iguais os limites sucessivos da função na origem ;

b) Mostre que a função não tem limite na origem .

8 - Calcule os seguintes limites ou prove a sua inexistência :

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{sen\ x}{y}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ z \to 1}} \dfrac{x^2 + xy + zx}{x + y - 1}$; **c)** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} y \,.\, sen\,(1/x)$;

d) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty \\ z \to 1}} \dfrac{x + y + z - 1}{x - y}$; **e)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1 \\ z \to 0}} \dfrac{x + y - 2}{xyz}$; **f)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\sqrt{x + y} - \sqrt{x}}{y . \sqrt{x}}$;

g) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^5}{x^8 + (y - x^2)^2}$; **h)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2 \\ z \to 0}} \dfrac{xy + z}{1 + x^2 + y^2}$.

9 - Calculando os limites sucessivos, mostre que não existem,

a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^3 - xy^2}{x^4 + y^4}$; **b)** $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{(x - 1)y - (x - 1)}{y + x - 1}$.

10 - Estude a existência de,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x^3 + y - 1}{3x^3 + y^3 - 1} \ .$$

11 - Mostre que não existe,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1 \\ z \to 0}} \frac{z + (x-1)\,y + z^2}{1 - xy + zx} \ ,$$

calculando os possíveis limites sucessivos até encontrar dois que sejam distintos.

12 - Considere a função, $f(x\,,y) = [sen\,(1/x)\,,\,1/y\,,\,sen\,(1/y)]$, com domínio no seguinte subconjunto de $\mathbf{R}^2$: $A = \{(x\,,y):\ x \neq 0\ \wedge\ y \neq 0\}$. Determine o conjunto dos sublimites (próprios ou impróprios) da função no ponto de coordenadas $x = y = 0$.

13 - Estude a continuidade da seguinte função, na origem,

$$f(x\,,y) = \begin{cases} y\,/\,x & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \ ,$$

estudando também a continuidade das funções parciais $f\ (x\ ,\ 0)$ e $f\ (0\ ,\ y)$, respectivamente em $x = 0$ e $y = 0$.

14 - O mesmo que no exercício anterior para a função,

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + y^2} & , \ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \ x = y = 0 \end{cases} \ .$$

15 - Determine os pontos de descontinuidade das seguintes funções reais de duas variáveis reais,

a) $f(x\,,y) = \begin{cases} y^2\,.\,x^{-2} & , \ x \neq 1 \ \ e \ \ x \neq 0 \\ 1 + y & , \ x = 0 \\ y & , \ x = 1 \end{cases}$;

b) $f(x\,,y) = (y^2 - 4\,y + 3)\,.\,sen\,(1/x)$.

16 - Estude a continuidade das seguintes funções nos conjuntos indicados:

a) $f(x\,,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)^{-1} & , \ y \neq \pm\, x \\ 0 & , \ y = \pm\, x \end{cases}$, em $\mathbf{R}^2$ e $B = \{(x\,,y):\ y = \pm\, x\}$;

b) $f(x\,,y\,,z) = \begin{cases} x + y + z & , \ x \geq 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0 \\ 1 - z & , \ x < 0\,,\, y \geq 0\,,\, z \geq 0 \\ x\,y + z - 1 & , \ outros \ (x,y,z) \end{cases}$

em $B = \{(x\,,y\,,z) \ : \ x \geq 0\,, y \geq 0\,, z \geq 0\}$ e $\mathbf{R^3}$.

17 - Justifique a existência de mínimo e máximo absoluto da função ,

$$f(x\,,y) = 3\,x \ + \ 4\,y \quad , \ \text{em} \ \ B = \{(x\,,y) \ : \ x^2 + \ y^2 \leq 2\} \ .$$

18 - Seja f função de $A = [0\,,2\pi[$ em $\mathbf{R^2}$, tal que $f(\,t\,) = (cos\,t \ , \ sen\,t)$.

a) Mostre que $f(A) = B = \{(x\,,y) : \ x^2 + y^2 = 1\}$;

b) Mostre que f é contínua em A ;

c) Mostre que existe a função inversa f^{-1} de B em $\mathbf{R}$ tal que ,

$$f^{-1}(x\,,y) = t \ : \ t \in [0\,,2\pi[\ \wedge \ cos\,t = x \ \wedge \ sen\,t = y \ ;$$

d) Calcule $f^{-1}(1\,,0)$;

e) Calcule os sublimites seguintes,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0 \\ (x,y) \in B_0}} f^{-1}(x\,,y) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0 \\ (x,y) \in B_1}} f^{-1}(x\,,y) \quad ,$$

em que ,

$$B_0 = \{(x\,,y) \ : \ (x\,,y) \in B \ \wedge \ y > 0\} \ \text{ e } \ B_1 = \{(x\,,y) \ : \ (x\,,y) \in B \ \wedge \ y \leq 0\} \ ;$$

f) Utilize os resultados das alíneas anteriores para mostrar que, embora f seja contínua em A , a sua inversa não é contínua em $B = f(A)$.

19 - Estude a continuidade uniforme das seguintes funções nos conjuntos indicados:

a) $f(x\,,y) = x/y$, em $A = \{(x\,,y) \ : \ y > 0\}$ e $B = \{(x\,,y) \ : 0 < x < 1\,,\, 1 \leq y < 2\}$;

b) $f(x\,,y\,,z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, em $B = \{(x\,,y\,,z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

20 - Com a função $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ e o conjunto $B = \{(x\,,y) : 0 \leq x \leq 1\;,\; 0 \leq y \leq 1\}$ para mostrar que uma função pode ser uniformemente contínua num conjunto sem que aí verifique a condição de Lipschitz.

21 - Considere-se a função f de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ tal que $f(x\,,y) = (x^2\,,y^2)$.

a) Determine as soluções da equação $f(x\,,y) = (x\,,y)$;

b) A função $f(x\,,y)$ poderá ser uma contracção ? Justifique.

<u>**RESPOSTAS**</u> **:**

2 - **a)** Sublimite relativo a $A = 3$ e sublimite relativo a $B = 0$;

b) Existe limite para a função no ponto $(a\,,b)$ se e só se $a = 0$ ou $b = \pm\,2$.

3 - **a)** Sublimites: relativo a M , 1/3 ; relativo a N , 1/4 ; e relativo a R , $+\infty$;
b) $S = \mathbf{R} \cup \{-\infty\,,+\infty\}$; **c)** A função não tem limite no ponto (0 , 0) .

4 - **a)** 0 ; **b)** 0 .

6 - $\alpha = 1/4$.

8 - **a)** Não existe ; **b)** 0 ; **c)** 0 ; **d)** Não existe ; **e)** Não existe ; **f)** 1/2 ; **g)** Não existe ; **h)** 1/3 .

10 - Não existe .

12 - $S = \{(u\,,v\,,w) : -1 \leq u \leq 1\;,\; v = \pm\,\infty\;,\; -1 \leq w \leq 1\}$.

13 - A função não é contínua na origem. As funções parciais $f(x\,,0)$ e $f(0\,,y)$ são contínuas, respectivamente em $x = 0$ e $y = 0$.

14 - A função não é contínua na origem, a função parcial $f(x\,,0)$ não é contínua em $x = 0$ e a função parcial $f(0\,,y)$ é contínua em $y = 0$.

15 - **a)** Todos os pontos $(0\,,b)$, com $b \in \mathbf{R}$ e ainda os pontos $(1\,,b)$ com b diferente de 0 e de 1;
b) Todos os pontos $(0\,,b)$, com excepção de (0 , 1) e (0 , 3) .

16 - **a)** Não contínua em $\mathbf{R}^2$, contínua em B ; **b)** Contínua em B , não contínua em $\mathbf{R}^3$.

17 - Função contínua no conjunto limitado e fechado B .
18 - **d)** 0 ; **e)** Sublimite em relação a $B_0 = 0$ e sublimite em relação a $B_1 = 2\pi$.

19 - **a)** Não é uniformemente contínua em A , mas é uniformemente contínua em B ;
b) É uniformemente contínua.

21 - a) $(0\ ,\ 1)$, $(1\ ,\ 0)$, $(0\ ,\ 0)$ e $(1\ ,\ 1)$; **b)** Não pode ser uma contracção, porque o teorema do ponto fixo garantiria nesse caso que a equação $f\,(x\ ,\ y) = (x\ ,\ y)$ teria uma e uma só solução.

CAPITULO VII

DERIVAÇÃO E DIFERENCIAÇÃO EM $\mathbf{R^n}$

1. Derivadas parciais de funções reais de *n* variáveis reais

Seja $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$ e considere-se um ponto $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$. Fixando $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$, ... , $x_n = a_n$, considere-se a *função parcial* $\varphi_1(x_1) = f(x_1, a_2, \dots, a_n)$ e admita-se que é definida em certa vizinhança $]\, a_1 - \varepsilon_1 , a_1 + \varepsilon_1 \,[$. Caso exista finita a derivada da função parcial $\varphi_1(x_1)$ em $x_1 = a_1$,

$$\varphi'_1(a_1) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{\varphi_1(a_1 + h_1) - \varphi_1(a_1)}{h_1} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{h_1} \quad ,$$

o respectivo valor é a *derivada parcial* de $f(\bar{x})$ em relação a x_1 no ponto $\bar{x} = \bar{a}$ e representa-se por qualquer dos símbolos,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]_{(\bar{a})} \quad , \quad f'_{x_1}(\bar{a}) \quad \text{ou} \quad \left[D_{x_1} f\right]_{(\bar{a})} \quad ,$$

podendo evidentemente na simbologia, sempre que seja conveniente evidenciar as coordenadas, substituir-se $\bar{a}$ por $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Se eventualmente a função parcial $\varphi_1(x_1)$ apenas for definida em certa semi-vizinhança de a_1 , só pode definir-se uma das derivadas laterais desta função (direita ou esquerda, conforme os casos) e então é este o valor que se toma para derivada parcial de $f(\bar{x})$ em relação a x_1 no ponto $\bar{x} = \bar{a}$.

A definição de derivada parcial de $f(\bar{x})$ em relação a qualquer outra variável x_j no ponto $\bar{x} = \bar{a}$ é análoga :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{(\bar{a})} = \lim_{h_j \to 0} \frac{f(a_1 , \cdots , a_j + h_j , \cdots , a_n) - f(a_1 , \cdots , a_j , \cdots , a_n)}{h_j} \quad ,$$

caso este limite exista finito ; claro que, tal como na derivada parcial em relação a x_1 , também agora são utilizadas as seguintes simbologias alternativas,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]_{(\bar{a})} \quad , \quad f'_{x_j}(\bar{a}) \quad \text{ou} \quad \left[D_{x_j} f\right]_{(\bar{a})} \quad .$$

Se a função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tiver derivada parcial em relação a x_j em todos os pontos do conjunto $X_j \subseteq A$, chama-se *função derivada parcial* de $f(\bar{x})$ em relação a x_j à função que a cada $\bar{x} \in X_j$ associa $f'_{x_j}(\bar{x})$; esta função é usualmente representada por,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \quad , \quad f'_{x_j} \quad \text{ou} \quad D_{x_j} f \quad .$$

Como na definição de cada $f'_{x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ são mantidas constantes as variáveis x_i com $i \neq j$ (ou seja, o acréscimo $\bar{h}$ tem nulas todas as suas coordenadas à excepção de h_j), as derivadas parciais podem ser obtidas pelas regras usuais de derivação das funções reais de variável real. Assim, por exemplo,

$$f(x, y, z) = 3xy + zxy - 2y \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 3y + zy \\ f'_y = 3x + zx - 2 \\ f'_z = xy \end{cases} .$$

Caso a função $f'_{x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ admita, por sua vez, derivadas parciais em relação a x_i nos pontos do conjunto $X_{ji} \subseteq X_j \subseteq A$, então $f''_{x_j x_i}(\bar{x})$ será a segunda derivada parcial de $f(\bar{x})$ em relação às variáveis x_j e x_i (por esta ordem). Para a segundas derivadas parciais usam-se os símbolos,

$$f''_{x_j x_i} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} \quad \text{ou} \quad D^2_{x_j\, x_i} f \quad ,$$

com a particularidade de, para $i = j$, serem usados ,

$$f''_{x_j^2} \ \text{em vez de} \ f''_{x_j x_j} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \ \text{em vez de} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_j}$$

$$D^2_{x_j^2} f \ \text{em vez de} \ D^2_{x_j\, x_j} f \quad .$$

A partir das segundas derivadas parciais podem definir-se as derivadas parciais de terceira ordem ,

$$f'''_{x_j x_i x_\alpha} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \, \partial x_i \, \partial x_\alpha} \quad \text{ou} \quad D^3_{x_j\, x_i\, x_\alpha} f \quad ,$$

sendo a notação simplificada - mediante o uso de expoentes simbólicos para as variáveis de derivação - quando duas ou mais derivações consecutivas sejam feitas em relação à mesma variável, como se exemplifica:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \, \partial x_2^2} \quad \text{em vez de} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \partial x_2} \quad ,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3} \quad \text{em vez de} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \, \partial x_1 \, \partial x_1} \quad ,$$

Etc. .

A partir das terceiras derivadas parciais podem definir-se as quartas derivadas parciais e assim por diante, conquanto vão sendo possíveis as sucessivas derivações.

Deve notar-se que em princípio a derivada parcial de certa ordem em relação a certas variáveis depende da ordenação destas. Ou seja, tem-se por exemplo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \partial x_1} \neq \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2 \, \partial x_2} \quad ,$$

porque o primeiro símbolo representa a terceira derivada da função $f(\overline{x})$, primeiro em relação a x_1, depois em relação a x_2 e finalmente em relação de novo a x_1, enquanto que o segundo símbolo representa a terceira derivada de $f(\overline{x})$ duas vezes seguidas em relação a x_1 e depois em relação a x_2. Ou seja, nas duas terceiras derivadas em confronto entram as mesmas variáveis de derivação, o mesmo número de vezes, mas por ordem diversa; e em tais casos as derivadas em causa não são necessariamente iguais, questão que adiante será retomada.

2. Derivadas segundo vectores para funções reais de *n* variáveis reais

Seja $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ e considere-se um ponto $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in INT\,A$. Sendo $\overline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ um vector não nulo de $\mathbf{R}^n$, chama-se derivada de $f(\overline{x})$ no ponto $\overline{x} = \overline{a}$ segundo o vector $\overline{u}$ ao limite (caso exista):

$$f'_{\overline{u}}(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t.\overline{u}) - f(\overline{a})}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t.u_1 \, , a_2 + t.u_2 \, , \cdots \, , a_n + t.u_n) - f(a_1, a_2 \, , \cdots, a_n)}{t} \; .$$

Quando em particular $\overline{u} = (1, 0, \ldots, 0)$ tem-se que $f'_{\overline{u}}(\overline{a}) = f'_{x_1}(\overline{a})$; para o vector $\overline{u} = (0, 1, \ldots, 0)$ tem-se $f'_{\overline{u}}(\overline{a}) = f'_{x_2}(\overline{a})$; e assim sucessivamente para os restantes vectores da seguinte base de $\mathbf{R}^n$:

$$\{(1, 0, \ldots, 0), \ (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots \ , \ (0, 0, \ldots, 1)\} \; .$$

Note-se que tal como é possível a existência de derivada parcial em relação a algumas das variáveis sem que exista em relação a outras, também, mais geralmente, podem existir derivadas num ponto segundo certos vectores e não existirem segundo outros.

Vejamos por exemplo o caso da função,

$$f(x\,,y)=\begin{cases} x\,y & ,\quad x\neq 0 \\ \sqrt[3]{y} & ,\quad x=0 \end{cases}\;;$$

tem-se para o ponto $(0\,,0)$ e segundo um vector não nulo $\bar{u}=(u_1\,,u_2)$,

$$f'_{\bar{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t.u_1\,,t.u_2)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t.u_1\,,t.u_2)}{t}=$$

$$=\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t.u_1\,.\,t.u_2}{t}=0 & ,\; u_1\neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{t.u_2}}{t}\;\; não\;\; existe & ,\; u_1=0\,\wedge\,u_2\neq 0 \end{cases}\,,$$

assim se concluindo que $f'_{\bar{u}}(0,0)$ só existe (e é nula) segundo vectores $\bar{u}=(u_1\,,u_2)$ tais que $u_1\neq 0$.

Dado o vector não nulo $\bar{u}$, ao vector $vers\;\bar{u}=\dfrac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}\cdot\bar{u}$ chama-se *versor* de $\bar{u}$ e é óbvio que $\|\,vers\;\bar{u}\,\|=1$. A derivada de $f(\bar{x})$ no ponto $\bar{x}=\bar{a}$ segundo o vector $vers\;\bar{u}$, ou seja, $f'_{vers\;\bar{u}}(\bar{a})$, caso exista, chama-se derivada em $\bar{x}=\bar{a}$ *dirigida* segundo a direcção do vector $\bar{u}$. Tem-se,

$$f'_{vers\;\bar{u}}(\bar{a})=\lim_{t\to 0}\frac{f(\bar{a}+t\,.\,vers\;\bar{u})-f(\bar{a})}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\bar{a}+t\cdot\dfrac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}\cdot\bar{u}\right)-f(\bar{a})}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\bar{a}+t\cdot\dfrac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}\cdot\bar{u}\right)-f(\bar{a})}{t\cdot\dfrac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}}\cdot\frac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}=$$

$$=\frac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}\cdot\lim_{t^*\to 0}\frac{f(\bar{a}+t^*.\,\bar{u})-f(\bar{a})}{t^*}=\frac{1}{\|\,\bar{u}\,\|}\cdot f'_{\bar{u}}(\bar{a})\,,$$

ou seja: a derivada em $\bar{x}=\bar{a}$ *dirigida* segundo a direcção do vector $\bar{u}$ é igual ao produto do inverso da norma do vector $\bar{u}$ pela derivada da função em $\bar{x}=\bar{a}$ segundo o vector $\bar{u}$.

3. Diferenciabilidade de funções reais de *n* variáveis reais

Seja $f(\overline{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ e considere-se um ponto $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in INT\,A$ (ponto interior do domínio da função). Diz-se que $f(\overline{x})$ é *diferenciável* no ponto $\overline{a}$ se e só se existe um $\delta > 0$, tal que, com $\|\overline{h}\| < \delta$,

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} k_i\, h_i + \|\overline{h}\| \,.\, \varepsilon\,(\overline{h})\,,$$

em que $k_i \in \mathbf{R}$, $\overline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ e $\lim\limits_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon\,(\overline{h}) = 0$.

Caso $f(\overline{x})$ seja diferenciável em $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in INT\,A$, duas conclusões são imediatas:

a) A função é contínua em $\overline{a}$ porque, fazendo $\overline{h} \to \overline{0}$ no segundo membro da igualdade que exprime a diferenciabilidade, se obtém de imediato,

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} f(\overline{a} + \overline{h}) = f(\overline{a})\,,$$

igualdade que traduz a continuidade de $f(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$;

b) As constantes k_i que figuram no segundo membro da igualdade podem facilmente ser interpretados como as derivadas parciais $f'_{x_i}(\overline{a})$, cuja existência fica portanto assegurada em caso de diferenciabilidade : com efeito, tomando por exemplo $\overline{h} = (h_1, 0, \ldots, 0)$ na igualdade que exprime a diferenciabilidade , obtém-se,

$$f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = k_1 \,.\, h_1 + |\, h_1| \,.\, \varepsilon(\,h_1)\,,$$

donde resulta, para $h_1 \neq 0$,

$$\frac{f(a_1 + h_1\,,\ a_2\,,\ \cdots\,,\ a_n) - f(a_1\,,\ a_2\,,\ \cdots\,,\ a_n)}{h_1} = k_1 + \frac{|h_1|}{h_1} \cdot \varepsilon\,(h_1)\,,$$

ou ainda,

$$f'_{x_1}(\overline{a}) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1\,,\ a_2\,,\ \cdots\,,\ a_n) - f(a_1\,,\ a_2\,,\ \cdots\,,\ a_n)}{h_1} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0} \left[k_1 + \frac{|h_1|}{h_1} \cdot \varepsilon\,(h_1) \right] = k_1 + 0 = k_1\,,$$

assim se concluindo que $k_1 = f'_{x_1}(\overline{a})$ como se pretendia mostrar ; e do mesmo modo se pode concluir quanto às restantes derivadas parciais da função no ponto $\overline{x} = \overline{a}$.

Note-se que, no entanto, a continuidade da função no ponto em causa em conjunto com a existência das suas n derivadas parciais nesse mesmo ponto, não é suficiente para garantir a diferenciabilidade, como mostra o seguinte exemplo. A função,

$$f(x\,,y) = \begin{cases} x \;,\; x \neq 0 \\ y \;,\; x = 0 \end{cases} \;,$$

é contínua e admite derivadas parciais no ponto (0 , 0) :

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 \,,$$

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{k}{k} = 1 \,;$$

no entanto, a função não é diferenciável na origem porque de,

$$f(h\,,k) - f(0\,,0) = h\,.\,1 + k\,.\,1 + \sqrt{h^2 + k^2}\;.\,\varepsilon(\,h\,,k) \;,$$

tira-se,

$$\varepsilon(\,h\,,k) = \frac{f(h,k) - h - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \begin{cases} -\dfrac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} & ,\; h \neq 0 \\ -\dfrac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 & ,\; h = 0 \end{cases} \;,$$

e vê-se com facilidade que $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \varepsilon(\,h\,,k)$ não é nulo.

Sendo $f(\overline{x})$ diferenciável em $\overline{x} = \overline{a}$ (ponto interior do domínio da função), tem-se,

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^{'}(\overline{a})\,.\,h_i + \|\overline{h}\|\,.\,\varepsilon\,(\overline{h}) \text{ , com } \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon\,(\overline{h}) = 0 \,,$$

e a expressão $\sum\limits_{i=1}^{n} f_{x_i}^{'}(\overline{a})\,.\,h_i$ recebe o nome de *diferencial* de $f(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$ segundo o vector $\overline{h}$, ou seja ,

$$\left[\,d\,f\,\right]_{\overline{h}}(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}^{'}(\overline{a})\,.\,h_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]_{(\overline{a})} .\,h_i \;,$$

constituindo uma aproximação - a menos de um infinitésimo de ordem superior a $\|\,\overline{h}\,\|$ - da diferença $f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a})$.

Quando $f(\bar{x})$ seja diferenciável em todos os pontos de um aberto A, a diferencial da função num ponto genérico $\bar{x} \in A$ segundo o vector $\bar{h}$ representa--se por,

$$[d\,f]_{\bar{h}}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}'(\bar{x}) \,.\, h_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \,.\, h_i \ ,$$

podendo ainda usar-se a seguinte representação matricial,

$$[d\,f]_{\bar{h}}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1}'(\bar{x}) & f_{x_2}'(\bar{x}) & \cdots & f_{x_n}'(\bar{x}) \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T =$$

$$= \nabla f(\bar{x}) \,.\, H \ ,$$

em que $H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T$ representa uma matriz coluna (transposta de uma matriz linha) cujos elementos são as coordenadas do vector $\bar{h}$. A matriz linha $\nabla f(\bar{x})$ = $= \begin{bmatrix} f_{x_1}'(\bar{x}) & f_{x_2}'(\bar{x}) & \cdots & f_{x_n}'(\bar{x}) \end{bmatrix}$ designa-se por *gradiente* da função $f(\bar{x})$.

Para uma função diferenciável num ponto interior do respectivo domínio, tem-se o seguinte,

Teorema 1 : *Sendo $f(\bar{x})$ diferenciável em $\bar{x} = \bar{a}$ (ponto interior do domínio da função) e sendo $\bar{u} \neq \bar{0}$, tem-se,*

$$f_{\bar{u}}'(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}'(\bar{a}) \,.\, u_i = [d\,f]_{\bar{u}}(\bar{a}) \ ,$$

ou seja, a derivada em $\bar{x} = \bar{a}$ segundo o vector $\bar{u}$ coincide com a diferencial da função no mesmo ponto $\bar{a}$ segundo o mesmo vector $\bar{u}$

Demonstração : Pela diferenciabilidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$, tem-se, com certo $\delta > 0$ e para $\|\bar{h}\| < \delta$,

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}'(\bar{a}) \,.\, h_i + \|\bar{h}\| \,.\, \varepsilon(\bar{h}) \text{ , com } \varepsilon(\bar{0}) = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon(\bar{h}) = 0 \ ,$$

Tomando $\bar{h} = t \,.\, \bar{u}$, com $|t| < \delta / \|\bar{u}\|$, obtém-se,

$$f(\bar{a} + t \,.\, \bar{u}) - f(\bar{a}) = t \,.\, \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}'(\bar{a}) \,.\, u_i + |t| \,.\, \|\bar{u}\| \,.\, \varepsilon(t \,.\, \bar{u}) \ ,$$

com $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t \,.\, \bar{u}) = 0$. Então, com $0 < |t| < \delta / \|\bar{u}\|$, resulta,

$$\frac{f(\bar{a} + t \,.\, \bar{u}) - f(\bar{a})}{t} = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{a}) \,.\, u_i + \frac{|t|}{t} \,.\, \|\bar{u}\| \,.\, \varepsilon\,(t \,.\, \bar{u}) \,,$$

e passando ao limite quando $t \to 0$, em ambos os membros , resulta imediatamente,

$$f'_{\bar{u}}(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{a}) \,.\, u_i = \left[d\, f \right]_{\bar{u}} (\bar{a}) \,,$$

como se queria provar.

Como comentário ao teorema que acaba de ser demonstrado convirá referir que pode existir $f'_{\bar{u}}(\bar{a})$ sem que a função seja diferenciável e, nesse caso, esta derivada pode ser distinta do valor dado pela expressão do enunciado do teorema. É o que acontece com a função,

$$f(x\,,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} & , \; x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \; x = y = 0 \end{cases} \,,$$

no ponto $(0\,,0)$. Para $\bar{u} = (1\,,1)$, tem-se,

$$f'_{\bar{u}}(0\,,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,,t) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{(2t^2)^{3/2} \,.\, t} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad ;$$

por outro lado,

$$f'_x(0\,,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\,,0) - 0}{h} = 0 \,,$$

$$f'_y(0\,,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0\,,k) - 0}{k} = 0 \,,$$

sendo portanto,

$$f'_{\bar{u}}(0\,,0) = \frac{\sqrt{2}}{4} \neq f'_x(0\,,0) \,.\, 1 + f'_y(0\,,0) \,.\, 1 = 0 \,.$$

4. <u>Condição suficiente de diferenciabilidade</u>

O teorema seguinte dá uma condição suficiente de diferenciabilidade de uma função num ponto interior do respectivo domínio.

Teorema 2 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *e* $\bar{a} \in INT\, A$ *, se existem finitas as* n *derivadas parciais* f'_{x_i} *em* $\bar{x} = \bar{a}$ *e, além disso, se* $n - 1$ *dessas derivadas parciais existem finitas em certa* $V_\delta(\bar{a})$ *e são contínuas no ponto* $\bar{a}$ *, então* $f(\bar{x})$ *é diferenciável nesse ponto*

<u>Demonstração</u> : Admita-se, para facilitar a notação, que as n - 1 derivadas a que se refere o enunciado são f'_{x_2} , f'_{x_3} , ... , f'_{x_n} . Esta suposição em nada diminui a generalidade da demonstração porque, caso as n - 1 derivadas em causa não sejam as relativas às variá-veis x_2 , x_3 , ... , x_n , podemos sempre, por reordenação conveniente das variáveis, reconduzir tal caso à situação suposta.

Notemos em primeiro lugar que sendo $\overline{a} = (a_1 , a_2 , ... , a_n)$, $\overline{h} = (h_1 , h_2 , ... , h_n)$ e $\| \overline{h} \| < \delta$, então com x_i pertencente ao intervalo de extremidades a_i , $a_i + h_i$ tem-se que,

$$\overline{x}_i = (a_1 + h_1 , a_2 + h_2 , \dots , a_{i-1} + h_{i-1} , x_i , a_{i+1} , \dots , a_n) \in V_\delta(\overline{a}) ,$$

uma vez que,

$$\| \overline{x}_i - \overline{a} \| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_{i-1}^2 + (x_i - a_i)^2 + 0 + \cdots + 0} \leq$$

$$\leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_{i-1}^2 + h_i^2 + 0 + \cdots + 0} \leq \| \overline{h} \| < \delta$$

E note-se ainda que o resultado anterior é válido para $i = 2 , 3 , \dots , n$.

Passe-se agora propriamente à demonstração do teorema . Devido à existência em $V_\delta(\overline{a})$ das derivadas parciais f'_{x_2} , f'_{x_3} , ... , f'_{x_n} , recorrendo ao resultado supra e supondo que $\| \overline{h} \| < \delta$, tem-se,

$\varphi_2(x_2) = f(a_1 + h_1 , x_2 , a_3 , ... , a_n)$ é regular no intervalo de extremidades a_2 e $a_2 + h_2$;

$\varphi_3(x_3) = f(a_1 + h_1 , a_2 + h_2 , x_3 , ... , a_n)$ é regular no intervalo de extremidades a_3 e $a_3 + h_3$;

...

$\varphi_n(x_n) = f(a_1 + h_1 , a_2 + h_2 , ... , a_{n-1} + h_{n-1} , x_n)$ é regular no intervalo de extremidades a_n e $a_n + h_n$.

Da existência de derivada parcial $f'_{x_1}(\overline{a})$, obtém-se a igualdade,

1) $f(a_1 + h_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n) - f(a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n) =$

$$= h_1 . [f'_{x_1}(\overline{a}) + \varepsilon_1(h_1)] \quad , \text{ com } \lim_{h_1 \to 0} \varepsilon_1(h_1) = 0 .$$

Aplicando a seguir o teorema de Lagrange às funções reais de variável real $\varphi_2(x_2)$, $\varphi_3(x_3)$, ... , $\varphi_n(x_n)$ que vimos serem regulares nos intervalos indicados e atendendo ainda à continuidade em $\overline{x} = \overline{a}$ das derivadas f'_{x_2} , f'_{x_3} , ... , f'_{x_n} , obtêm-se as seguin-tes n-1 igualdades :

2) $f(a_1+h_1\,, a_2+h_2\,, a_3\,, \dots, a_n) - f(a_1+h_1\,, a_2\,, a_3\,, \dots, a_n) =$

$$= h_2\,.\, f'_{x_2}(a_1+h_1\;, a_2+\theta_2\,.\,h_2\;, a_3\,, \cdots\,, a_n) = \qquad (0<\theta_2<1)$$

$$= h_2\,.\left[f'_{x_2}(\bar{a}) + \varepsilon_2(h_1\,, h_2)\right]\quad,\ \text{com}\ \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}} \varepsilon_2(h_1\,, h_2) = 0\ ;$$

3) $f(a_1+h_1\,, a_2+h_2\,, a_3+h_3\,, \dots, a_n) - f(a_1+h_1\,, a_2+h_2\,, a_3\,, \dots, a_n) =$

$$= h_3\,.\, f'_{x_3}(a_1+h_1\;, a_2+h_2\;, a_3+\theta_3\,.\,h_3\;, \cdots, a_n) = \quad (0<\theta_3<1)$$

$$= h_3\,.\left[f'_{x_3}(\bar{a}) + \varepsilon_3(h_1\,, h_2\,, h_3)\right],\ \text{com}\ \lim_{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0\\ h_3\to 0}} \varepsilon_3(h_1\,, h_2\,, h_3) = 0\ ;$$

....

n) $f(a_1+h_1\,, a_2+h_2\,, \dots, a_n+h_n) - f(a_1+h_1\,, a_2+h_2\,, \dots, a_{n-1}+h_{n-1}\,, a_n) =$

$$= h_n\,.\, f'_{x_n}(a_1+h_1\;, a_2+h_2\;, a_3+h_3\;, \cdots, a_{n-1}+h_{n-1}\,, a_n+\theta_n\,.\,h_n) = (0<\theta_n<1)$$

$$= h_n\,.\left[f'_{x_n}(\bar{a}) + \varepsilon_n(\bar{h})\right]\ ,\ \text{com}\ \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \varepsilon_n(\bar{h}) = 0\ .$$

Somando membro a membro as igualdades 1) , 2) , ... n) , obtém-se, após as simplificações a efectuar no primeiro membro,

$f(a_1+h_1\,, a_2+h_2\,, \dots, a_n+h_n) - f(a_1\,, a_2\,, \dots, a_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{a})\,.\,h_i + \left[h_1\,.\,\varepsilon_1(h_1) + h_2\,.\,\varepsilon_2(h_1\,, h_2) + \cdots + h_n\,.\,\varepsilon_n(h_1\,, h_2\,, \cdots, h_n)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\bar{a})\,.\,h_i + \|\bar{h}\|\,.\,\varepsilon(\bar{h})\ ,$$

com ,

$$\varepsilon(\bar{h}) = \frac{h_1\,.\varepsilon_1(h_1) + h_2\,.\varepsilon_2(h_1,h_2) + \cdots + h_n\,.\,\varepsilon_n(h_1,h_2\,, \cdots, h_n)}{\|\bar{h}\|} \qquad (\bar{h}\neq\bar{0})$$

Atendendo à igualdade obtida, bastará provar que $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \varepsilon(\bar{h}) = 0$, para ficar demonstrado que $f(\bar{x})$ é diferenciável no ponto $\bar{x} = \bar{a}$. Ora, tendo em conta que $|\,h_i\,| \leq \|\,\bar{h}\,\|$, obtém-se,

$$| \varepsilon (\overline{h}) | \leq | \varepsilon_1 (h_1) | + | \varepsilon_2 (h_1 , h_2) | + \ \dots \ + | \varepsilon_n (h_1 , h_2 , \dots , h_n) | ,$$

ou ainda,

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \\ \dots \\ h_n \to 0}} \big[| \varepsilon_1 (h_1) | + | \varepsilon_2 (h_1 , h_2) | + \ \dots \ + | \varepsilon_n (h_1 , h_2 , \dots , h_n) | \big] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \\ \dots \\ h_n \to 0}} | \varepsilon (\overline{h}) | = 0 \Rightarrow \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \varepsilon (\overline{h}) = 0 \ .$$

O teorema que acaba de ser demonstrado admite os seguintes corolários, os quais envolvem a noção de função de classe C^r num aberto . Diz-se que $f(\overline{x})$ é de *classe* C^r *no aberto* A se e só se admite derivadas parciais contínuas até à ordem r em todos os pontos do conjunto aberto A . Posto isto, tem-se :

Corolário 1 : *Qualquer função de classe* C^1 *no aberto* A *é diferenciável em todos os pontos de* A

<u>Demonstração</u> : Dado qualquer $\overline{a} \in A = INT . A$ (A é aberto) , existe uma vizinhança $V_\delta(\overline{a}) \subseteq A$ em cujos pontos as derivadas parciais da função são contínuas. Verificam-se assim, por maioria de razão, as hipóteses do teorema 2 relativamente ao ponto $\overline{a}$ considerado e, assim, a função é diferenciável nesse ponto.

Corolário 2 : *Qualquer função de classe* C^r *no aberto* A *é diferenciável e tem derivadas parciais até à ordem* r -1 *diferenciáveis em todos os pontos do conjunto* A

<u>Demonstração</u> : Quer a função, quer as suas derivadas parciais até à ordem r - 1 admitem primeiras derivadas parciais contínuas no aberto A , ou seja, são de classe C^1 nesse aberto . Logo, pelo corolário 1, são diferenciáveis em todos os pontos de A .

5. <u>Derivação parcial e diferenciabilidade de funções de $A \subset \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$</u>

O exposto anteriormente pode generalizar-se sem dificuldade ao caso das funções vectoriais de variável vectorial, ou seja, funções de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$.

Em primeiro lugar, vejamos o conceito de derivada parcial. Sendo,

$$f(\overline{x}) = \left[f_1(\overline{x}) \quad f_2(\overline{x}) \quad \cdots \quad f_m(\overline{x}) \right]^T ,$$

uma função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ (que como se sabe pode ser representada por uma matriz coluna de funções de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$), define-se ,

$$f'_{x_j}(\overline{a}) = \lim_{h_j \to 0} \frac{f(a_1 , \cdots , a_j + h_j , \cdots , a_n) - f(a_1 , \cdots , a_j , \cdots , a_n)}{h_j} ,$$

caso o limite exista finito. Note-se que agora o numerador da razão incremental é a diferença de dois vectores de $\mathbf{R^m}$ e que portanto o limite em causa existe se e só se existirem os m limites ,

$$f'_{i\,x_j}(\overline{a}) = \lim_{h_j \to 0} \frac{f_i(a_1 , \cdots , a_j + h_j , \cdots , a_n) - f_i(a_1 , \cdots , a_j , \cdots , a_n)}{h_j} ,$$

$i = 1 , 2 , \ldots , m$,

cada um correspondente a uma das coordenadas de $f(\overline{x})$ em $\mathbf{R^m}$. Por outras palavras, existirá $f'_{x_j}(\overline{a})$ se e só se existirem as m derivadas parciais $f'_{i\,x_j}(\overline{a})$ das m funções reais de n variáveis reais $f_i(\overline{x})$ e, em caso de existência, $f'_{x_j}(\overline{a})$ será um vector de $\mathbf{R^m}$ cujas coordenadas são precisamente as derivadas parciais (em relação à variável em causa) das coordenadas $f_i(\overline{x})$ em $\overline{x} = \overline{a}$. Matricialmente, se representarmos os vectores de $\mathbf{R^m}$ pelas matrizes colunas das respectivas coordenadas, podemos então representar $f'_{x_j}(\overline{a})$ do seguinte modo:

$$f'_{x_j}(\overline{a}) = \left[f'_{1x_j}(\overline{a}) \quad f'_{2x_j}(\overline{a}) \quad \cdots \quad f'_{mx_j}(\overline{a}) \right]^T .$$

A noção de derivada num ponto $\overline{a} \in \mathbf{R^n}$ segundo um vector não nulo $\overline{u} \in \mathbf{R^n}$ pode também generalizar-se sem qualquer dificuldade para o caso das funções de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$:

$$f'_{\overline{u}}(\overline{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overline{a} + t\,.\,\overline{u}) - f(\overline{a})}{t} ,$$

e, tal como no caso das derivadas parciais, conclui-se que $f'_{\overline{u}}(\overline{a})$ existe se e só se existirem as m derivadas em $\overline{a}$ segundo o vector $\overline{u}$ das m funções reais de n variáveis reais $f_i(\overline{x})$ e, em caso de existência, $f'_{\overline{u}}(\overline{a})$ será um vector de $\mathbf{R^m}$ cujas coordenadas são precisamente as derivadas em $\overline{a}$ segundo o vector $\overline{u}$ das coordenadas $f_i(\overline{x})$:

$$f'_{\overline{u}}(\overline{a}) = \left[f'_{1\,\overline{u}}(\overline{a}) \quad f'_{2\,\overline{u}}(\overline{a}) \quad \cdots \quad f'_{m\,\overline{u}}(\overline{a}) \right]^T .$$

Vejamos finalmente a generalização da noção de função diferenciável.

Sendo $f(\overline{x}) = \left[f_1(\overline{x}) \quad f_2(\overline{x}) \quad \cdots \quad f_m(\overline{x}) \right]^T$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ e $\overline{a}$ um ponto interior do domínio A da função , diz-se que $f(\overline{x})$ é diferenciável no ponto $\overline{a}$

se e só se existe uma transformação linear T de $\mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^m}$ tal que, para $\|\bar{h}\| < \delta$ (com certo $\delta > 0$) ,

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = T(\bar{h}) + \|\bar{h}\| . \varepsilon(\bar{h}) \text{ , com } \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon(\bar{h}) = \bar{0} \text{ .}$$

A $T(\bar{h})$ chama-se diferencial da função $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ segundo o vector $\bar{h}$, ou seja, $\left[d f\right]_{\bar{h}}(\bar{a}) = T(\bar{h})$. Sendo $T = [\, k_{ij} \,]$ a matriz m x n que representa a transformação T e sendo,

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_n \end{bmatrix}^T \text{ e } E = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(\bar{h}) & \varepsilon_2(\bar{h}) & \cdots & \varepsilon_m(\bar{h}) \end{bmatrix}^T \text{ ,}$$

as matrizes colunas que representam, respectivamente, os vectores $\bar{h}$ e $\varepsilon(\bar{h})$, a igualdade vectorial que traduz a diferenciabilidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ pode escrever-se do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} f_1(\bar{a} + \bar{h}) - f_1(\bar{a}) & f_2(\bar{a} + \bar{h}) - f_2(\bar{a}) & \cdots & f_m(\bar{a} + \bar{h}) - f_m(\bar{a}) \end{bmatrix}^T =$$

$$= T \,.\, H + \|\bar{h}\| \,.\, E =$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{1n} \\ \cdots & & & \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + \|\bar{h}\| \,.\, \begin{bmatrix} \varepsilon_1(\bar{h}) \\ \varepsilon_2(\bar{h}) \\ \vdots \\ \varepsilon_m(\bar{h}) \end{bmatrix} \text{ ,}$$

equivalendo por sua vez a condição $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon(\bar{h}) = \bar{0}$ a ser,

$$\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon_1(\bar{h}) = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon_2(\bar{h}) = \ldots = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon_m(\bar{h}) = 0 \text{ ,}$$

A notação matricial permite imediatamente concluir que a diferenciabilidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{a}$ equivale à verificação conjunta das seguintes m condições:

$$f_i(\bar{a} + \bar{h}) - f_i(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} \,.\, h_j + \|\bar{h}\| \,.\, \varepsilon_i(\bar{h}) \text{ , com } \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon_i(\bar{h}) = 0 \text{ ,}$$

$i = 1 , 2 , \ldots , m$;

ou seja, equivale à diferenciabilidade conjunta em $\bar{x} = \bar{a}$ das m funções reais de n variáveis reais $f_i(\bar{x})$, coordenadas de $f(\bar{x})$. Esta conclusão permite, por sua vez, identificar os elementos k_{ij} da matriz T:

$$k_{ij} = f'_{i\,x_j}(\bar{a}) \quad (i = 1\,,2\,,\ldots,m\ ;\ j = 1\,,2\,,\ldots,n)\,,$$

sendo portanto,

$$T = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(\bar{a}) & f'_{1x_2}(\bar{a}) & \cdots & f'_{1x_n}(\bar{a}) \\ f'_{2x_1}(\bar{a}) & f'_{2x_2}(\bar{a}) & \cdots & f'_{2x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & & & \\ f'_{mx_1}(\bar{a}) & f'_{mx_2}(\bar{a}) & \cdots & f'_{mx_n}(\bar{a}) \end{bmatrix} \quad ,$$

matriz que se designa por *Matriz Jacobiana* de $f(\bar{x})$ - ou do sistema de m funções $f_i(\bar{x})$ - no ponto $\bar{x} = \bar{a}$. Por outro lado, em notação matricial, a diferencial de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ pode representar-se como segue:

$$[d\,f]_{\bar{h}}(\bar{a}) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(\bar{a}) & f'_{1x_2}(\bar{a}) & \cdots & f'_{1x_n}(\bar{a}) \\ f'_{2x_1}(\bar{a}) & f'_{2x_2}(\bar{a}) & \cdots & f'_{2x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & & & \\ f'_{mx_1}(\bar{a}) & f'_{mx_2}(\bar{a}) & \cdots & f'_{mx_n}(\bar{a}) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [d\,f_1]_{\bar{h}}(\bar{a}) \\ [d\,f_2]_{\bar{h}}(\bar{a}) \\ \vdots \\ [d\,f_m]_{\bar{h}}(\bar{a}) \end{bmatrix} = \Big[[d\,f_1]_{\bar{h}}(\bar{a}) \quad [d\,f_2]_{\bar{h}}(\bar{a}) \quad \cdots \quad [d\,f_m]_{\bar{h}}(\bar{a}) \Big]^T \,.$$

Finalmente, tendo em atenção o disposto no teorema 1, conclui-se que em caso de diferenciabilidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$,

$$\begin{aligned} f'_{\bar{u}}(\bar{a}) &= \Big[f'_{1\,\bar{u}}(\bar{a}) \quad f'_{2\,\bar{u}}(\bar{a}) \quad \cdots \quad f'_{m\,\bar{u}}(\bar{a}) \Big]^T = \\ &= \Big[[d f_1]_{\bar{u}}(\bar{a}) \quad [d f_2]_{\bar{u}}(\bar{a}) \quad \cdots \quad [d f_m]_{\bar{u}}(\bar{a}) \Big]^T = [d f]_{\bar{u}}(\bar{a}) \,. \end{aligned}$$

6. <u>Diferenciabilidade de uma função composta</u>

Vamos agora estudar um teorema que dá a regra de diferenciação da função composta e como corolário a regra de derivação parcial da função composta. Este teorema generaliza a regra de derivação já conhecida para a composição de funções reais de variável real, caso já estudado anteriormente.

Teorema 3 : *Sendo* $\bar{y} = g(\bar{x}) = [\, g_1(\bar{x}) \,,\, g_2(\bar{x}) \,,\, \dots \,,\, g_m(\bar{x}) \,]^T$ *função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R^m}$ *e* $w = f(\bar{y})$ *uma função de* $B \subseteq \mathbf{R^m}$ *em* $\mathbf{R}$ *, admita-se que* $g(\bar{x})$ *é diferenciável em certo ponto* $\bar{a} \in INT.\, A$ *e que* $f(\bar{y})$ *é também diferenciável no ponto correspondente* $\bar{b} = g(\bar{a})$ *que se supõe ser ponto interior do domínio B da função* $f(\bar{y})$*. Então* $\bar{a}$ *é também ponto interior do domínio da função composta* $f \, o \, g$ *, esta função é diferen-ciável nesse ponto e tem-se,*

$$\left[d\ (f\, o\, g)\right]_{\bar{h}}(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \,.\, g'_{\alpha\, x_j}(\bar{a}) \right] . \, h_j \ .$$

<u>Demonstração</u> : Devido à continuidade de $g(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ (por se tratar de função diferenciável nesse ponto), tem-se:

$$\forall\ \delta > 0 \ \ ,\ \exists\ \varepsilon = \varepsilon(\delta) \ \ :\ \bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \ \Rightarrow\ g(\bar{x}) \in \mathrm{V}_\delta(\bar{b}) \,.$$

Como por hipótese $\bar{b}$ é ponto interior do domínio B da função $f(\bar{y})$ e $\bar{a}$ é ponto interior do domínio A de $g(\bar{x})$, pode tomar-se δ suficientemente pequeno de forma que $\mathrm{V}_\delta(\bar{b}) \subseteq B$ e o $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ cuja existência é assegurada pela condição de continui-dade também suficientemente pequeno de forma que $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$; e então, para tais δ e ε a condição que define a continuidade de $g(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ permite escrever, $\bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $g(\bar{x}) \in \mathrm{V}_\delta(\bar{b}) \subseteq B$, ou seja , a função composta $\left[f\, o\, g\right](\bar{x}) = f\left[g(\bar{x})\right]$ é definida para todo o $\bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$, o que prova, ser $\bar{a}$ ponto interior do domínio de $\left[f\, o\, g\right](\bar{x})$. Em tudo o que se segue, consideraremos sempre (sem necessidade de qualquer menção explícita) que o acréscimo $\bar{h}$ verifica a condição $\|\bar{h}\| < \varepsilon$, com o valor ε referido anteriormente. Tal garantirá que $\bar{a} + \bar{h}$ pertence ao domínio da função $g(\bar{x})$ e da função composta $\left[f\, o\, g\right](\bar{x}) = f\left[g(\bar{x})\right]$, ou seja, $g(\bar{a} + \bar{h})$ pertence ao domínio da função $f(\bar{y})$.

Vejamos então que $\left[f\, o\, g\right](\bar{x})$ é diferenciável no ponto $\bar{a}$ e ao mesmo tempo que a respectiva diferencial é dada pela expressão do enunciado.

Sendo,

$$\bar{k} = [k_1 \,, k_2 \,, \dots \,, k_m]^T = g(\bar{a} + \bar{h}) - g(\bar{a}) =$$

$$= [\ g_1(\bar{a}+\bar{h}) - g_1(\bar{a}) \ ,\ g_2(\bar{a}+\bar{h}) - g_2(\bar{a}) \ ,\ \dots \ ,\ g_m(\bar{a}+\bar{h}) - g_m(\bar{a}))\ ]^T ,$$

tem-se, atendendo à diferenciabilidade de $w = f(\bar{y})$ em $\bar{b}$,

$$f\left[g(\bar{a} + \bar{h})\right] - f\left[g(\bar{a})\right] = f\left[g(\bar{a}) + \bar{k}\,\right] - f\left[g(\bar{a})\right] = f(\bar{b} + \bar{k}) - f(\bar{b}) =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \,.\, k_\alpha + \|\bar{k}\| \,.\, \varepsilon(\bar{k}) \ \ ,$$

com $\lim\limits_{\bar{k}\to\bar{0}} \varepsilon(\bar{k}) = 0$. Mas a diferenciabilidade de $g(\bar{x})$ em $\bar{a}$ equivale à diferenciabilidade de cada uma das funções $y_\alpha = g_\alpha(\bar{x})$ nesse mesmo ponto, ou seja,

$$k_\alpha = g_\alpha(\bar{a}+\bar{h}) - g_\alpha(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} g'_{\alpha x_j}(\bar{a}) \cdot h_j + \|\bar{h}\| \cdot \varepsilon^*_\alpha(\bar{h}) \ ,$$

com $\lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \varepsilon^*_\alpha(\bar{h}) = 0$. Substituindo os k_α no segundo membro da igualdade que dá a diferenciabilidade de $w = f(\bar{y})$ em $\bar{b}$ tem-se:

$$\begin{aligned} f\big[g(\bar{a}+\bar{h})\big] - f\big[g(\bar{a})\big] &= \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} g'_{\alpha x_j}(\bar{a}) \cdot h_j + \|\bar{h}\| \cdot \varepsilon^*_\alpha(\bar{h})\right] + \|\bar{k}\| \cdot \varepsilon(\bar{k}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot g'_{\alpha x_j}(\bar{a})\right] \cdot h_j + \|\bar{h}\| \cdot \sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot \varepsilon^*_\alpha(\bar{h}) + \|\bar{k}\| \cdot \varepsilon(\bar{k}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot g'_{\alpha x_j}(\bar{a})\right] \cdot h_j + \|\bar{h}\| \cdot \varepsilon'(\bar{h}) \ , \end{aligned}$$

com ,

$$\varepsilon'(\bar{h}) = \sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot \varepsilon^*_\alpha(\bar{h}) + \frac{\|\bar{k}\|}{\|\bar{h}\|} \cdot \varepsilon(\bar{k}) \qquad (\bar{h} \neq \bar{0}) \ ,$$

devendo notar-se que, na expressão que define $\varepsilon'(\bar{h})$, $\bar{k} = g(\bar{a}+\bar{h}) - g(\bar{a})$, ou seja, $\varepsilon'(\bar{h})$ é efectivamente função apenas de $\bar{h}$. Se se provar que $\lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \varepsilon'(\bar{h}) = 0$ ficará provado que a função composta $w = f\big[g(\bar{x})\big]$ é diferenciável em $\bar{x} = \bar{a}$ e ao mesmo tempo que,

$$\big[d\,(f\,o\,g)\big]_{\bar{h}}(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot g'_{\alpha x_j}(\bar{a})\right] \cdot h_j \ .$$

Visivelmente,

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \sum_{\alpha=1}^{m} f'_{y_\alpha}(\bar{b}) \cdot \varepsilon^*_\alpha(\bar{h}) = 0 \ ,$$

pelo que bastará provar que,

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\|\bar{k}\|}{\|\bar{h}\|} \cdot \varepsilon(\bar{k}) = 0 \ .$$

Tem-se, para $\alpha = 1, 2, \ldots, m$,

$$k_\alpha^2 = |\,k_\alpha\,|^2 = |\,g_\alpha(\overline{a}+\overline{h}) - g_\alpha(\overline{a})|^2 = \left|\,\sum_{j=1}^{n} g'_{\alpha x_j}(\overline{a}) \,.\, h_j + \|\,\overline{h}\,\| \,.\, \varepsilon^*_\alpha(\overline{h})\,\right|^2 \leq$$

$$\leq \left[\,\sum_{j=1}^{n} |\,g'_{\alpha x_j}(\overline{a})| \,.\, |\,h_j\,| + \|\,\overline{h}\,\| \,.\, |\,\varepsilon^*_\alpha(\overline{h})\,|\,\right]^2 ,$$

donde resulta,

$$\frac{k_\alpha^2}{\|\,\overline{h}\,\|^2} \leq \left[\,\sum_{j=1}^{n} |\,g'_{\alpha x_j}(\overline{a})| \,.\, \frac{|\,h_j\,|}{\|\,\overline{h}\,\|} + |\,\varepsilon^*_\alpha(\overline{h})\,|\,\right]^2 \leq \left[\,\sum_{j=1}^{n} |\,g'_{\alpha x_j}(\overline{a})| + |\,\varepsilon^*_\alpha(\overline{h})\,|\,\right]^2 ,$$

porque $\|\,\overline{h}\,\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2} \geq |\,h_j\,|$. Então,

$$\frac{\|\,\overline{k}\,\|^2}{\|\,\overline{h}\,\|^2} = \frac{\sum_{\alpha=1}^{m} k_\alpha^2}{\|\,\overline{h}\,\|^2} \leq \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\,\sum_{j=1}^{n} |\,g'_{\alpha x_j}(\overline{a})| + |\varepsilon^*_\alpha(\overline{h})|\,\right]^2 ,$$

ou ainda,

$$\frac{\|\,\overline{k}\,\|}{\|\,\overline{h}\,\|} \cdot |\,\varepsilon(\overline{k})\,| \leq \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m} \left[\,\sum_{j=1}^{n} |\,g'_{\alpha x_j}(\overline{a})| + |\varepsilon^*_\alpha(\overline{h})|\,\right]^2} \;.\; |\varepsilon(\overline{k})\,| ,$$

e como $\overline{h} \to \overline{0} \Rightarrow \overline{k} = g(\overline{a}+\overline{h}) - g(\overline{a}) \to \overline{0}$ (devido à continuidade de $g\,(\,\overline{x}\,)$ em $\overline{a}$), a majoração obtida permite facilmente concluir que,

$$\lim_{\overline{h}\to\overline{0}} \frac{\|\,\overline{k}\,\|}{\|\,\overline{h}\,\|} \cdot \varepsilon(\overline{k}) = 0 ,$$

como se pretendia provar.

O teorema 3 admite dois corolários importantes. O primeiro é imediato e dá a regra de derivação da função composta. O segundo generaliza o teorema ao caso em que $f(\,\overline{y}\,)$ é uma função $\overline{w} = f(\,\overline{y}\,)$ de $B \subseteq \mathbf{R^m}$ em $\mathbf{R^p}$.

Corolário 1: *Supostas as hipóteses do teorema 3, tem-se,*

$$\left[\frac{\partial(f\ o\ g)}{\partial x_j}\right]_{\overline{x}=\overline{a}} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right]_{\overline{y}=\overline{b}} \cdot \left[\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_j}\right]_{\overline{x}=\overline{a}} \quad (\,j = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n\,)\,.$$

Demonstração : Resulta imediatamente da expressão obtida no teorema 3 para $\left[d\ (f\,o\,g)\right]_{\overline{h}}(\,\overline{a}\,)$.

Antes de passarmos ao segundo corolário, vejamos algumas observações ao corolário 1:

(a) Se as hipóteses do teorema 3 forem verificadas relativamente a todos os pontos de certo aberto contido no domínio A da função $g(\bar{x})$, a igualdade anterior pode escrever-se num ponto genérico desse aberto:

$$\frac{\partial(f\ o\ g)}{\partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right]_{\bar{y}=g(\bar{x})} \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_j} \quad (j = 1\ , 2\ , \dots , n)\ .$$

(b) Por outro lado, se as hipóteses do teorema 3 forem verificadas pelas primeiras derivadas parciais f'_{y_α} e por $g(\bar{x})$ relativamente a todos os pontos de certo aberto contido no domínio A da função $g(\bar{x})$ e, além disso, esta última função admitir segundas derivadas parciais, as segundas derivadas parciais da função composta podem obter-se por derivação da expressão que dá as respectivas primeiras derivadas. Com efeito, cada parcela dessa expressão,

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right]_{\bar{y}=g(\bar{x})} \cdot \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_j}\ ,$$

pode então derivar-se pela regra do produto utilizando, no cálculo da derivada do primeiro factor, de novo a regra de derivação de uma função composta. E do mesmo modo se pode argumentar quanto ao cálculo das derivadas parciais de ordem superior.

(c) Se em particular $y = g(\bar{x})$ é função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$ e $w = f(y)$ é função de $B \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ e supostas verificadas as hipóteses do teorema 3, tem-se,

$$\frac{\partial\ w}{\partial\ x_j} = \left(\frac{d\,w}{d\,y}\right)_{y=g(\bar{x})} \cdot \frac{\partial\ y}{\partial\ x_j}\ .$$

Ainda , mais em particular, se $y = g(x)$ é função de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ e $w = f(y)$ é função de $B \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ e supostas verificadas as hipóteses do teorema 3, tem-se

$$\frac{d\ w}{d\ x} = \left(\frac{d\,w}{d\,y}\right)_{y=g(x)} \cdot \frac{d\ y}{d\ x}\ .$$

(d) Voltando ao caso geral, convirá observar para terminar que, para ser possível calcular as derivadas parciais da função composta $f\ o\ g$ pela regra apresentada, a hipótese da diferenciabilidade de g não é essencial, bastando supor a existência das respectivas derivadas parciais (e evidentemente admitir a diferenciabilidade de f) . Com efeito, se g for apenas função de uma variável - ou seja, função de $A \subseteq \mathbf{R}$ em $\mathbf{R^m}$ - , a existência de derivada desta função em $x = a$, equivale à sua diferenciabilidade e, portanto, o teorema 3 é directamente aplicável neste caso ; caso g seja função das n variáveis x_1 , x_2 , ... , x_n , no cálculo de cada derivada parcial de $f\ o\ g$ está envolvida apenas uma das variáveis independentes da função g e , portanto , pelo argumento anterior , a regra decorrente do teorema 3 é igualmente aplicável (contudo, neste caso, não fica assegurada a diferenciabilidade da função composta, mas apenas a existência de derivadas parciais).

Vejamos finalmente o corolário 2.

Corolário 2 : *Sendo* $\bar{y} = g(\bar{x}) = [\, g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})\,]^T$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R^m}$ *e* $\bar{w} = f(\bar{y}) = [\, f_1(\bar{y}), f_2(\bar{y}), \dots, f_p(\bar{y})\,]^T$ *uma função de* $B \subseteq \mathbf{R^m}$ *em* $\mathbf{R^p}$*, admita-se que* $g(\bar{x})$ *é diferenciável em certo ponto* $\bar{a} \in INT.\, A$ *e que* $f(\bar{y})$ *é diferenciável no ponto* $\bar{b} = g(\bar{a})$ *que se supõe ser ponto interior do domínio B da função* $f(\bar{y})$. *Então* $\bar{a}$ *é também ponto interior do domínio da função composta* $f\, o\, g$ *, esta função é diferenciável nesse ponto e tem-se* $\left[d\ (f\, o\, g)\right]_{\bar{h}}(\bar{a}) = (\, T_f \times T_g\,) \times H$ *, em que* T_f *é matriz Jacobiana de* $\bar{w} = f(\bar{y})$ *tomada em* $\bar{y} = \bar{b}$*,* T_g *é matriz Jacobiana de* $\bar{y} = g(\bar{x})$ *tomada em* $\bar{x} = \bar{a}$ *e* $H = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T$.

<u>Demonstração</u> : Verificadas as hipóteses do corolário, cada uma das coordenadas $f_i[g(\bar{x})]$ $(\, i = 1, 2, \dots, p)$ da função composta,

$$f[g(\bar{x})] = [\, f_1[g(\bar{x})], f_2[g(\bar{x})], \dots, f_p[g(\bar{x})]\,]^T ,$$

resulta da composição de $w_i = f_i(\bar{y})$ com $\bar{y} = g(\bar{x})$ e encontra-se nas condições do teorema 3. Conclui-se portanto que $\bar{a}$ é ponto interior do domínio das funções compostas $f_i[g(\bar{x})]$ e assim esse ponto é também ponto interior do domínio da função composta $f[g(\bar{x})]$; além disso e ainda de acordo com o teorema 3, cada uma das funções compostas coordenadas $f_i[g(\bar{x})]$ é diferenciável no ponto $\bar{a}$, logo o mesmo se passa com a função composta $f[g(\bar{x})]$. De acordo com o corolário 1, tem-se para $i = 1, 2, \dots, p$,

$$\left[\frac{\partial f_i[g(\bar{x})]}{\partial x_j}\right]_{\bar{x}=\bar{a}} = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_\alpha}\right]_{\bar{y}=\bar{b}} \cdot \left[\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_j}\right]_{\bar{x}=\bar{a}} \quad (\, j = 1, 2, \dots, n\,).$$

Ora esta derivada parcial é o elemento da linha i e coluna j da matriz Jacobiana de $f[g(\bar{x})]$ e o corolário fica demonstrado se se provar que tal derivada é produto da linha i da matriz T_f pela coluna j da matriz T_g. Atendendo a que as matrizes T_f e T_g são,

$$\begin{bmatrix} f'_{1y_1}(\bar{b}) & f'_{1y_2}(\bar{b}) & \cdots & f'_{1y_m}(\bar{b}) \\ \cdots & & & \\ f'_{iy_1}(\bar{b}) & f'_{iy_2}(\bar{b}) & \cdots & f'_{iy_m}(\bar{b}) \\ \cdots & & & \\ f'_{py_1}(\bar{b}) & f'_{py_2}(\bar{b}) & \cdots & f'_{py_m}(\bar{b}) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} g'_{1x_1}(\bar{a}) & \cdots & g'_{1x_j}(\bar{a}) & \cdots & g'_{1x_n}(\bar{a}) \\ g'_{2x_1}(\bar{a}) & \cdots & g'_{2x_j}(\bar{a}) & \cdots & g'_{2x_n}(\bar{a}) \\ \cdots & & & & \\ g'_{mx_1}(\bar{a}) & \cdots & g'_{mx_j}(\bar{a}) & \cdots & g'_{mx_n}(\bar{a}) \end{bmatrix}$$

(*Matriz* T_f) (*Matriz* T_g)

a conclusão é imediata.

7. Funções homogéneas

Seja $f(\bar{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$ e considere-se um subconjunto $B \subseteq A$ tal que, $\bar{x} \in B \wedge \lambda > 0 \Rightarrow \lambda . \bar{x} \in B$. Nessas condições, a função $f(\bar{x})$ diz-se *positivamente homogénea de grau* α no conjunto B se e só se,

$$\bar{x} \in B \wedge \lambda > 0 \Rightarrow f(\lambda . \bar{x}) = f(\lambda\, x_1 , \lambda\, x_2 , \cdots , \lambda\, x_n) = \\ = \lambda^{\alpha} . f(\bar{x}) = \lambda^{\alpha} . f(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) .$$

O expoente α designa-se por *grau de homogeneidade*, podendo ser *positivo*, *negativo* ou *nulo*.

Se as condições precedentes, quanto ao conjunto B e à função $f(\bar{x})$ forem verificadas para todos os valores $\lambda \neq 0$ e não apenas para $\lambda > 0$, fala-se então de *homogeneidade em sentido restrito*.

Face às definições apresentadas é evidente que uma função homogénea em sentido restrito é também positivamente homogénea no mesmo conjunto (com o mesmo grau de homogeneidade), mas a inversa não é verdadeira.

Exemplos:

1) A função,

$$f(x , y) = \frac{(x + y)^4}{x - y} ,$$

é homogénea de grau 3 , em sentido restrito, no conjunto $B = \{(x , y) : x \neq y\}$, dado que, com $\lambda \neq 0$ e $(x , y) \in B$,

$$f(\lambda x , \lambda y) = \frac{(\lambda\, x + \lambda\, y)^4}{\lambda\, x - \lambda\, y} = \lambda^3 \cdot \frac{(x + y)^4}{x - y} = \lambda^3 \cdot f(x , y) .$$

2) A função,

$$f(x , y , z) = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

é positivamente homogénea de grau 1 (mas não homogénea em sentido restrito) em $\mathbf{R^3}$, deixando-se a verificação como exercício.

Apresentam-se seguidamente quatro propriedades elementares das funções homogéneas, deixando-se as demonstrações como exercício . Nos enunciados fala-se apenas de funções homogéneas porque tais enunciados são válidos (com a mesma demonstração) para os dois conceitos de homogeneidade apresentados.

P1 : *A soma de funções homogéneas do mesmo grau num conjunto é ainda uma função homogénea do mesmo grau no mesmo conjunto*

P2 : *O produto de funções homogéneas num conjunto é ainda uma função homogénea no mesmo conjunto, sendo o respectivo grau de homogeneidade igual à soma dos graus de homogeneidade dos factores*

P3 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *e* $g(\bar{x})$ *funções homogéneas no conjunto B e não se anulando em B a função* $g(\bar{x})$*, então* $f(\bar{x})/g(\bar{x})$ *é também homogénea em B, sendo o respectivo grau de homogeneidade igual à diferença dos graus de homogeneidade de* $f(\bar{x})$ *e* $g(\bar{x})$

P4 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *homogénea de grau* $\underline{\alpha}$ *no conjunto B e sendo definida nesse conjunto a função* $f^{\beta}(\bar{x})$*, então esta última é também homogénea em B, sendo* $\alpha.\beta$ *o respectivo grau de homogeneidade*

Duas propriedades adicionais são estudadas seguidamente. As respectivas demonstrações são apresentadas para o caso das funções homogéneas em sentido restrito, mas adaptam-se sem qualquer dificuldade para o caso das funções positivamente homogéneas.

P5 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *homogénea de grau* α *no conjunto aberto B e existindo a derivada parcial* f'_{x_j} *em todos os pontos do conjunto B, então tal derivada parcial é homogénea de grau* $\alpha - 1$ *no mesmo conjunto*

<u>Demonstração</u> : Seja $f(\bar{x})$ uma função nas condições do enunciado e fixe-se um qualquer valor $\lambda \neq 0$. Por força da homogeneidade admitida para $f(\bar{x})$, tem-se, para todos os pontos $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$,

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^{\alpha} . f(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Derivando ambos os membros em relação a x_j, obtém-se,

$$\frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)}{\partial x_j} = \lambda^{\alpha} . f'_{x_j}(x_1, x_2, \cdots, x_n) .$$

Notando agora que a função $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_j, \ldots, \lambda x_n)$, considerada como função de x_j, se pode obter fazendo a composição da função real de variável real

$$\varphi(y) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_{j-1}, y, \lambda x_{j+1}, \ldots, \lambda x_n)$$

com a função real de variável real $y = \lambda x_j$, tem-se, pela regra de derivação de uma função composta (relativa ao caso da composição de duas funções reais de variável real) ,

$$\frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)}{\partial x_j} = \varphi'(\lambda x_j). \lambda =$$

$$= \lambda . f'_{x_j}(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_j, \cdots, \lambda x_n),$$

devendo notar-se que $f'_{x_j}(\lambda\, x_1 , \lambda\, x_2 \,, \cdots , \lambda\, x_j \,, \cdots , \lambda\, x_n)$ não representa a derivada de $f(\lambda x_1 , \lambda x_2 , \, ... , \lambda x_j , ... , \lambda x_n)$ em relação a x_j mas sim a derivada de $f(x_1 , x_2 , \, ... , x_j , ... , x_n)$ relativamente a x_j no ponto $(\lambda x_1 , \lambda x_2 , \, ... , \lambda x_j , ... , \lambda x_n)$.

Então deverá ser,

$$\lambda \,.\, f'_{x_j}(\lambda\, x_1 , \lambda\, x_2 \,, \cdots , \lambda\, x_n) = \lambda^{\alpha} \,.\, f'_{x_j}(x_1 , x_2 \,, \cdots \,, x_n) \;,$$

donde resulta finalmente,

$$f'_{x_j}(\lambda\, x_1 , \lambda\, x_2 \,, \cdots , \lambda\, x_n) = \lambda^{\alpha\text{-}1} \,.\, f'_{x_j}(x_1 , x_2 \,, \cdots \,, x_n) \;,$$

para todos os pontos $(x_1 \,, x_2 \,, \, ... \,, x_n) \in B$, qualquer que seja o valor $\lambda \neq 0$, o que traduz a homogeneidade de grau α-1 da função $f'_{x_j}(x_1 , x_2 \,, \cdots \,, x_n)$ no conjunto B .

P6 : *Sendo $f(\bar{x})$ homogénea de grau α e diferenciável no conjunto aberto B , verifica-se nesse conjunto a identidade,*

$$x_1 \,.\, f'_{x_1}(\bar{x}) + x_2 \,.\, f'_{x_2}(\bar{x}) + \cdots + x_n \,.\, f'_{x_n}(\bar{x}) = \alpha \,.\, f(\bar{x})$$

(**Identidade de Euler**)

<u>Demonstração</u> : Por hipótese tem-se, para $\bar{x} \in B$ e $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x_1 , \lambda x_2 , \, ... , \lambda x_n) = \lambda^{\alpha} \,.\, f(x_1 , x_2 , \, ... , x_n) \,.$$

Então, para cada $\bar{x} \in B$ derivando em relação a λ as funções de ambos os membros (utilizando no primeiro membro a regra de derivação de uma função composta) , temos,

$$x_1 \,.\, f'_{x_1}(\lambda\,\bar{x}) + x_2 \,.\, f'_{x_2}(\lambda\,\bar{x}) + \cdots + x_n \,.\, f'_{x_n}(\lambda\,\bar{x}) = \alpha \,.\, \lambda^{\alpha\text{-}1} \,.\, f(\bar{x}) \;,$$

e, fazendo nesta igualdade $\lambda = 1$, sai a identidade do enunciado.

A propriedade seguinte, mostra que a verificação da identidade de Euler num aberto B tal que , $\bar{x} \in B \;\wedge\; \lambda > 0 \;\Rightarrow\; \lambda \,.\, \bar{x} \in B$, conjuntamente com a diferenciabilidade da função em *B*, garantem que a função é positivamente homogénea nesse conjunto.

P7 : *Sendo $f(\bar{x})$ função diferenciável no aberto B, conjunto a verificar a condição, $\bar{x} \in B \;\wedge\; \lambda > 0 \;\Rightarrow\; \lambda \,.\, \bar{x} \in B$, se $f(\bar{x})$ verifica a identidade de Euler em B , então a função é positivamente homogénea nesse conjunto*

<u>Demonstração</u>: Seja $\bar{x} \in B$ e defina-se a seguinte função de λ , para $\lambda > 0$:

$$g(\lambda) = f(\lambda\,\bar{x}) - \lambda^{\alpha}.\,f(\bar{x}) \ ,$$

em que α é o parâmetro real do segundo membro da identidade de Euler que por hipótese se verifica. Derivando obtém-se, usando a regra de derivação de uma função composta,

$$g'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} x_i \,.\, f'_{x_i}(\lambda\,\bar{x}) - \alpha\,.\,\lambda^{\alpha-1}\,.\,f(\bar{x}) \ ,$$

e então,

$$\lambda\,.\,g'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda\, x_i \,.\, f'_{x_i}(\lambda\,\bar{x}) - \alpha\,.\,\lambda^{\alpha}\,.\,f(\bar{x}) \ .$$

Dado verificar-se a identidade de Euler em B , tem-se,

$$\lambda\,.\,g'(\lambda) = \alpha\,.\,f(\lambda\,\bar{x}) - \alpha\,.\,\lambda^{\alpha}\,.\,f(\bar{x}) = \alpha\,.\left[f(\lambda\,\bar{x}) - \lambda^{\alpha}\,.\,f(\bar{x})\right] =$$

$$= \alpha\,.\,g(\lambda) \ .$$

Fazendo agora $\theta(\lambda) = g(\lambda)/\lambda^{\alpha}$ com $\lambda > 0$ e derivando, obtém-se,

$$\theta'(\lambda) = \frac{g'(\lambda)\,.\,\lambda^{\alpha} - \alpha\,.\,\lambda^{\alpha-1}\,.\,g(\lambda)}{\lambda^{2\alpha}} = \frac{g'(\lambda)\,.\,\lambda - \alpha\,.\,g(\lambda)}{\lambda^{\alpha+1}} = 0 \ ,$$

sendo portanto $\theta(\lambda)$ constante no intervalo $]\,0\,,+\infty\,[$. E como, $\theta(1) = g(1) = 0$, conclui-se que $\theta(\lambda) = 0$ no intervalo $]\,0\,,+\infty\,[$. Dai decorre que, com $\lambda > 0$, $g(\lambda) = 0$; atendendo à definição de $g(\lambda)$ resulta finalmente,

$$g(\lambda) = f(\lambda\,\bar{x}) - \lambda^{\alpha}.\,f(\bar{x}) = 0 \ ,$$

ou seja, $f(\lambda\,\bar{x}) = \lambda^{\alpha}.\,f(\bar{x})$ para $\lambda > 0$. Fica assim provado que $f(\bar{x})$ é positivamente homogénea no conjunto B.

8. <u>Teorema dos acréscimos finitos</u>

Apresentam-se seguidamente duas generalizações do teorema dos acréscimos finitos (teorema de Lagrange), já estudado para o caso das funções reais de variável real.

Teorema 4 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *em* $\mathbf{R}$ *, existindo as respectivas derivadas parciais em todos os pontos* $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ *e sendo* $\bar{h}$ *um vector tal que* $\|\bar{h}\| < \varepsilon$*, tem-se :*

$$\begin{aligned} f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a}) = {} & h_1 . f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 . h_1 , a_2 , \cdots , a_n) + \\ & + h_2 . f'_{x_2}(a_1 + h_1 , a_2 + \theta_2 . h_2 , a_3 , \cdots , a_n) + \\ & \ldots \\ & + h_n . f'_{x_n}(a_1 + h_1 , a_2 + h_2 , \cdots , a_{n-1} + h_{n-1} , a_n + \theta_n . h_n) , \end{aligned}$$

com $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, ... , $0 < \theta_n < 1$

(**1ª Versão do teorema de Lagrange**)

Demonstração : Devido à existência na vizinhança $V_\varepsilon(\bar{a})$ das derivadas parciais f'_{x_1} , f'_{x_2} , ... , f'_{x_n} e supondo que $\|\bar{h}\| < \varepsilon$, uma argumentação semelhante à utilizada na parte inicial da demonstração do teorema 2 permite concluir que :

$\varphi_1(x_1) = f(x_1, a_2, \ldots, a_n)$ é regular no intervalo de extremidades a_1 e $a_1 + h_1$,

$\varphi_2(x_2) = f(a_1 + h_1, x_2, \ldots, a_n)$ é regular no intervalo de extremidades a_2 e $a_2 + h_2$,

...

$\varphi_n(x_n) = f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, x_n)$ é regular no intervalo de extremidades a_n e $a_n + h_n$.

Aplicando o teorema de Lagrange às funções $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, ... , $\varphi_n(x_n)$ nos intervalos indicados, tem-se:

$$f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h_1 . f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 . h_1 , a_2 , \cdots , a_n),$$

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \ldots, a_n) - f(a_1 + h_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ & \qquad = h_2 . f'_{x_2}(a_1 + h_1 , a_2 + \theta_2 . h_2 , a_3 , \cdots , a_n) , \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, \ldots, a_n + h_n) - f(a_1 + h_1, \ldots, a_{n-1} + h_{n-1}, a_n) = \\ & \qquad = h_n . f'_{x_n}(a_1 + h_1 , a_2 + h_2 , \cdots , a_{n-1} + h_{n-1} , a_n + \theta_n . h_n), \end{aligned}$$

com $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, ... , $0 < \theta_n < 1$. Somando membro a membro as n igualdades obtidas resulta logo, após as simplificações a efectuar no primeiro membro, a igualdade do enunciado.

O teorema precedente admite como corolário a seguinte condição suficiente de continuidade de uma função $f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$:

Corolário 1 : *Sendo* $f(\bar{x})$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *e* $\bar{a} \in$ *INT. A , se existem finitas e são limitadas em* $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$ *as* n *derivadas parciais* $f'_{x_i}(\bar{x})$*, então* $f(\bar{x})$ *é contínua em* $\bar{x} = \bar{a}$ *.*

Demonstração : Sendo M_i um majorante de $|f'_{x_i}(\bar{x})|$ em $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$, a igualdade tese do teorema 4 permite escrever, para $\|\bar{h}\| < \varepsilon$,

$$|f(\bar{a}+\bar{h}) - f(\bar{a})| \le |h_1|.M_1 + |h_2|.M_2 + \cdots + |h_n|.M_n \ ,$$

e esta desigualdade permite logo concluir que $\lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} f(\bar{a}+\bar{h}) = f(\bar{a})$, ou seja, a função $f(\bar{x})$ é contínua em $\bar{x} = \bar{a}$.

Convém notar que as hipóteses do corolário precedente podem ser aligeiradas sem que a continuidade de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} = \bar{a}$ seja afectada:

Corolário 1* : *Sendo* $f(\bar{x})$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *e* $\bar{a} \in$ *INT. A , se* n-1 *das* n *derivadas parciais* $f'_{x_i}(\bar{x})$ *existem finitas e são limitadas em* $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$ *e a outra derivada parcial existe finita no ponto* $\bar{x} = \bar{a}$*, então* $f(\bar{x})$ *é contínua em* $\bar{x} = \bar{a}$ *.*

Demonstração: Admita-se, sem perda de generalidade e apenas para facilitar a notação, que as derivadas parciais $f'_{x_i}(\bar{x})$ ($i = 2 , 3 , \ldots , n$) são limitadas em $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$ e que $f'_{x_1}(\bar{a})$ existe finita. Se a primeira das igualdades que se somam ordenadamente para demonstrar o teorema 4 for substituída por,

$$f(a_1+h_1, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = h_1.f'_{x_1}(\bar{a}) + h_1 \cdot \alpha(h_1) \,,$$

com $\lim\limits_{h_1\to 0} \alpha(h_1) = 0$, obtém-se após soma ordenada uma igualdade cujo segundo membro pode ser majorado de forma análoga ao que se fez na demonstração do corolário anterior, concluindo-se tal como então que $f(\bar{x})$ é contínua em $\bar{x} = \bar{a}$.

Teorema 5 : *Sendo* $f(\overline{x})$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ *em* **R** *diferenciável em todos os pontos* $\overline{x} \in V_\varepsilon(\overline{a})$ *e sendo* $\overline{h}$ *um vector tal que* $\| \overline{h} \| < \varepsilon$*, tem-se :*

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\overline{a} + \theta . \overline{h}) . h_i \ , \ com \ 0 < \theta < 1$$

(**2ª Versão do teorema de Lagrange**)

<u>Demonstração</u> : Com $\| \overline{h} \| < \varepsilon$ defina-se a função auxiliar $g(t) = f(\overline{a} + t . \overline{h})$, para $0 \leq t \leq 1$. Claro que existe $g'(t)$ no intervalo $[0 , 1]$, podendo esta derivada calcular-se pela regra de derivação de uma função composta:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\overline{a} + t . \overline{h}) . h_i \quad .$$

Aplicando o teorema de Lagrange à função real de variável real $g(t)$ no intervalo $[0 , 1]$, tem-se $g(1) - g(0) = g'(\theta)$, com $0 < \theta < 1$, ou seja,

$$f(\overline{a} + \overline{h}) - f(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\overline{a} + \theta . \overline{h}) . h_i \ , \text{com } 0 < \theta < 1 ,$$

como se queria provar.

Note-se que a segunda versão do teorema de Lagrange (teorema 5) tem hipóteses mais exigentes - exige-se a diferenciabilidade de $f(\overline{x})$ em certa vizinhança $V_\varepsilon(\overline{a})$, enquanto que na primeira versão (teorema 4) basta a existência das derivadas parciais da função nessa vizinhança - , mas em contrapartida a igualdade obtida é mais simples, envolvendo apenas um único valor de θ e sendo as derivadas parciais tomadas todas no mesmo ponto.

9. <u>Igualdade das derivadas mistas</u>

Estudam-se seguidamente condições que garantem a igualdade de duas derivadas parciais da mesma ordem, que apenas difiram pela ordenação das variáveis de derivação.

Começa-se pelo caso de uma função $f(x , y)$ de $A \subseteq \mathbf{R}^2$ em **R** , estudando condições que garantam a igualdade $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$; passa-se depois ao caso geral de uma função $f(\overline{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ em **R** , considerando derivadas parciais de qualquer ordem superior ou igual à segunda.

O seguinte teorema é fundamental :

Teorema 6 : *Sendo* $f(x , y)$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^2$ *em* **R** *e* $(a , b) \in INT. A$ *, admita-se que as derivadas parciais* $f'_x(x,y)$ *e* $f'_y(x,y)$ *existem em certa* $V_\varepsilon(a , b) \subseteq A$ *e que são ambas diferenciáveis em* (a , b) *. Tem-se então que,* $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$
(**Heffter - Young**)

Demonstração : Repare-se em primeiro lugar que a existência de $f''_{xy}(a,b)$ e $f''_{yx}(a,b)$ fica assegurada pelo facto de $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$ serem por hipótese diferenciáveis no ponto (a, b). Passemos então a demonstrar a igualdade do teorema .

Devido à existência de $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$ em $V_\varepsilon(a\ ,\ b)$, considerando um vector não nu-lo $\overline{h} = (h\ ,\ h) \in \mathbf{R}^2$ tal que $\|\ \overline{h}\ \| = \sqrt{2}\ .\ |\ h\ | < \varepsilon$, a função $\varphi(x) = f(x\ ,\ b+h)\ -\ f(x\ ,\ b)$ é regular no intervalo de extremidades a e $a+h$ e a função $\psi(y) = f(a+h\ ,\ y) - f(a\ ,\ y)$ é regular no intervalo de extremidades b e $b+h$. Tem-se então, pelo teorema da Lagrange relativo a funções de uma variável,

$$\Delta(\,h) = \big[f(a+h\ ,\ b+h)\ -\ f(a+h\ ,\ b\,)\big]\ -\ \big[f(a\ ,\ b+h)\ -\ f(a\ ,\ b)\big]\ =$$

$$= \varphi(a+h) - \varphi(a) = h\ .\ \varphi\,'(a+\theta\,.\,h) =$$

$$= h.\Big[\,f'_x(a+\theta.\,h\ \ ,\ b+h\,)\ -\ f'_x(a+\theta.\,h\ \ ,\ b)\Big] =$$

$$= h\ .\Big\{\Big[\,f'_x(a+\theta.\,h\ \ ,\ b+h\,)\ -\ f'_x(a\ ,\ b)\Big] - \Big[f'_x(a+\theta\,.\,h\ \ ,b)\ -\ f'_x(a\ ,\ b)\Big]\Big\}\ ,$$

com $0 < \theta < 1$. A diferenciabilidade de $f'_x(x\ ,\ y)$ em $(a\ ,\ b)$ permite continuar a simplificar a expressão obtida para $\Delta(\,h)$:

$$\Delta(\,h) = h\ .\Big\{\Big[\theta\,.\,h\,.\,f''_{x^2}(a\ ,\ b)\ +\ h\,.\,f''_{xy}(a\ ,\ b)\ +\ \|\,(\theta\,.\,h\ ,\ h)\|\,.\,\varepsilon\,(\theta\,.\,h\ ,\ h)\Big]\ -$$

$$-\Big[\,\theta\,.\,h\,.\,f''_{x^2}(a\ ,\ b)\ +\ \|\,(\theta\,.\,h\ ,\ 0)\,\|\,.\,\varepsilon^*(\theta.\,h\ ,\ 0)\Big]\Big\}\ =$$

$$=\ h^2\,.\,f''_{xy}(a\ ,\ b)\ +h\,.|h|\,.\,\varepsilon\,(\theta.\,h\ ,\ h)\ -\ h\,.\,|\,h|\,.\,\theta\,.\,\varepsilon^*(\theta.h\ ,\ 0)\ \ ,$$

com $0 < \theta < 1$ e $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon\,(\theta\,.\,h\ ,\ h) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon^*(\theta\,.\,h\ ,\ 0) = 0$. Tem-se então,

$$\frac{\Delta(h)}{h^2}\ =\ f''_{xy}(a\ ,\ b)\ +\frac{|h|}{h}\,.\big[\varepsilon\,(\theta.\,h\ ,\ h)\ -\ \theta\,.\,\varepsilon^*(\theta.h\ ,\ 0)\big]\ ,$$

igualdade a partir da qual se obtém, passando ao limite quando $h \to 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(h)}{h^2}\ =\ f''_{xy}(a\ ,\ b)\ +0 = f''_{xy}(a\ ,\ b)\ \ .$$

Retomando de novo $\Delta(h)$, mas usando agora a função $\psi(y)$ para simplificar a respectiva expressão, obtém-se:

$$\Delta(h) = [f(a+h, b+h) - f(a+h, b)] - [f(a, b+h) - f(a, b)] =$$

$$= [f(a+h, b+h) - f(a, b+h)] - [f(a+h, b) - f(a, b)] =$$

$$= \psi(b+h) - \psi(b) = h \,.\, \psi'(b+\theta \,.\, h) =$$

$$= h \,.\Big[f_y'(a+h \,,\, b+\theta \,.\, h) - f_y'(a \,,\, b+\theta \,.\, h)\Big] =$$

$$= h \,.\Big\{ \Big[f_y'(a+h \,,\, b+\theta \,.\, h) - f_y'(a \,,\, b)\Big] - \Big[f_y'(a \,,\, b+\theta \,.\, h) - f_y'(a \,,\, b)\Big]\Big\} \,,$$

com $0 < \theta < 1$. A diferenciabilidade de $f_y'(x\,,\,y)$ em $(a\,,\,b)$ permite continuar a simplificar a expressão obtida para $\Delta(h)$, chegando-se a :

$$\Delta(h) = h^2 \,.\, f_{yx}''(a\,,\,b) + h \,.\, |h| \,.\, \varepsilon(h\,,\,\theta\,.\,h) - h \,.\, |h| \,.\, \theta \,.\, \varepsilon^*(0\,,\,\theta\,.\,h) \;\;,$$

com $0 < \theta < 1$ e $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h\,,\,\theta.\,h) = \lim\limits_{h\to 0} \varepsilon^*(0\,,\,\theta\,.\,h) = 0$. E a partir desta igualdade conclui-se sem dificuldade que,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}''(a\,,\,b) + 0 = f_{yx}''(a\,,\,b) \;\;.$$

Tem-se então ,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{xy}''(a\,,\,b) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = f_{yx}''(a\,,\,b) \;\;,$$

donde se tira a igualdade $f_{xy}''(a\,,\,b) = f_{yx}''(a\,,\,b)$ que se pretendia estabelecer.

O teorema precedente admite o seguinte corolário:

Corolário 1 : *Sendo* $f(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *em* $\mathbf{R}$ *e sendo* $\bar{a} =$ $= (a_1\,,\,a_2\,,\,\ldots\,,\,a_n) \in$ *INT. A , admita-se que existem as derivadas parciais* $f_{x_i}'(\bar{x})$ *,* $i = 1$ *, 2 , ... ,* n *, em certa* $V_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$ *e que são diferenciáveis em* $\bar{a}$ *. Tem-se então,*

$$f_{x_\alpha x_\beta}''(\bar{a}) = f_{x_\beta x_\alpha}''(\bar{a}) \;\;,\;\; \forall\, \alpha\,,\beta = 1, 2\,,\,\ldots\,,\,n \quad (\alpha \neq \beta)$$

<u>Demonstração</u> : Sem perda de generalidade pode assumir-se que $\alpha < \beta$. Considere-se então a função que se obtém de $f(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ fazendo $x_i = a_i$, para $i \neq \alpha\,,\,\beta$, deixando portanto livres como variáveis apenas x_α e x_β ; obtém-se assim a função,

$$g(x_\alpha , x_\beta) = f(a_1 , \dots , x_\alpha , \dots , x_\beta , \dots , a_n) ,$$

definida no conjunto ,

$$A_0 = \{(x_\alpha , x_\beta) : (a_1 , \dots , x_\alpha , \dots , x_\beta , \dots , a_n) \in A\} \subseteq \mathbf{R}^2 .$$

Facilmente se constata que $g(x_\alpha , x_\beta)$ verifica as hipóteses do teorema 6 relativamente ao ponto (a_α , a_β) :

a) Em primeiro lugar, (a_α , a_β) é ponto interior de A_0 . Com efeito, $\mathrm{V}_\varepsilon (a_\alpha , a_\beta) \subseteq A_0$, com o mesmo ε que faz $\mathrm{V}_\varepsilon(\overline{a}) \subseteq A$:

$$(x_\alpha , x_\beta) \in \mathrm{V}_\varepsilon (a_\alpha , a_\beta) \Rightarrow \sqrt{(x_\alpha - a_\alpha)^2 + (x_\beta - a_\beta)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 , \dots , x_\alpha , \dots , x_\beta , \dots , a_n) \in \mathrm{V}_\varepsilon(\overline{a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 , \dots , x_\alpha , \dots , x_\beta , \dots , a_n) \in A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_\alpha , x_\beta) \in A_0 .$$

b) Em segundo lugar, as derivadas parciais,

$$g'_{x_\alpha} (x_\alpha , x_\beta) = f'_{x_\alpha}(a_1 , \cdots , x_\alpha , \cdots , x_\beta , \cdots , a_n) ,$$

$$g'_{x_\beta} (x_\alpha , x_\beta) = f'_{x_\beta}(a_1 , \cdots , x_\alpha , \cdots , x_\beta , \cdots , a_n) ,$$

existem em $\mathrm{V}_\varepsilon (a_\alpha , a_\beta)$, porque, como vimos,

$$(x_\alpha , x_\beta) \in \mathrm{V}_\varepsilon (a_\alpha , a_\beta) \Rightarrow (a_1 , \dots , x_\alpha , \dots , x_\beta , \dots , a_n) \in \mathrm{V}_\varepsilon(\overline{a}) .$$

c) Finalmente $g'_{x_\alpha} (x_\alpha , x_\beta)$ e $g'_{x_\beta} (x_\alpha , x_\beta)$ são diferenciáveis em (a_α , a_β) devido à suposta diferenciabilidade de $f(\overline{x})$ em $\overline{a}$:

$$g'_{x_\alpha} (a_\alpha + h_\alpha , a_\beta + h_\beta) - g'_{x_\alpha} (a_\alpha , a_\beta) =$$

$$= f'_{x_\alpha}(a_1 , \cdots , a_\alpha + h_\alpha , \cdots , a_\beta + h_\beta , \cdots , a_n) - f'_{x_\alpha}(a_1 , \cdots , a_\alpha , \cdots , a_\beta , \cdots , a_n) =$$

$$= h_\alpha . f''_{x_\alpha x_\alpha}(\overline{a}) + h_\beta . f''_{x_\alpha x_\beta}(\overline{a}) + \|(0 , \cdots , h_\alpha , \cdots , h_\beta , \cdots , 0)\| . \varepsilon (h_\alpha , h_\beta) =$$

$$= h_\alpha . g''_{x_\alpha x_\alpha} (a_\alpha , a_\beta) + h_\beta . g''_{x_\alpha x_\beta} (\overline{a}) + \|(h_\alpha , h_\beta)\| . \varepsilon (h_\alpha , h_\beta) ,$$

com $\lim\limits_{\substack{h_\alpha \to 0 \\ h_\beta \to 0}} \varepsilon\,(h_\alpha , h_\beta) = 0$; e do mesmo modo quanto à diferenciabilidade da função $g'_{x_\beta}(x_\alpha , x_\beta)$.

Então, por serem verificadas pela função $g(x_\alpha , x_\beta)$ de $A_0 \subseteq \mathbf{R^2}$ em $\mathbf{R}$ as hipóteses do teorema 6 relativamente ao ponto $(a_\alpha , a_\beta) \in INT.\, A_0$, tem-se ,

$$g''_{x_\alpha x_\beta}(a_\alpha , a_\beta) = g''_{x_\beta x_\alpha}(a_\alpha , a_\beta) \;,$$

ou seja, $f''_{x_\alpha x_\beta}(\bar{a}) = f''_{x_\beta x_\alpha}(\bar{a})$, como se pretendia provar.

A partir do corolário 1, prova-se com facilidade que:

Corolário 2 : *Sendo* $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *de classe* C^2 *em certo aberto* $B \subseteq A$ *, tem-se nesse aberto,* $f''_{x_i x_j}(\bar{x}) = f''_{x_j x_i}(\bar{x})$*, quaisquer que sejam* $i , j = 1 , 2 , \ldots , n \;\; (i \neq j)$

<u>Demonstração</u> : Nos termos do corolário 2 do teorema 2, as primeiras derivadas parciais de $f(\bar{x})$ são diferenciáveis em todos os pontos do conjunto aberto B . Verificam-se pois, relativamente a todos os pontos desse aberto as hipóteses do corolário 1, o que justifica a tese a demonstrar.

Corolário 3 : *Sendo* $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *em* $\mathbf{R}$ *de classe* C^r *em certo aberto* $B \subseteq A$ $(r \geq 2)$ *, coincidem nesse aberto todas as derivadas da mesma ordem* $m \in \{2 , 3 , \ldots , r\}$ *que apenas difiram pela ordenação das variáveis de derivação*

<u>Demonstração</u> : Vejamos em primeiro lugar que, no aberto B, é possível trocar duas variáveis de derivação consecutivas, quando a ordem m de derivação seja $2 \leq m \leq r$. Dada a derivada,

$$f^{(m)}_{x_\lambda \ldots x_s\, x_\alpha\, x_\beta\, x_\delta \ldots x_t} \qquad (2 \leq m \leq r) \;,$$

admita-se que antes de se derivar em relação a x_α se efectuam p derivações :

$$f^{(m)}_{x_\lambda \ldots x_s\, x_\alpha\, x_\beta\, x_\delta \ldots x_t} = \left\{ \left[f^{(p)}_{x_\lambda \ldots x_s} \right]''_{x_\alpha\, x_\beta} \right\}^{(m-p-2)}_{x_\delta \ldots x_t} .$$

Por ser $p \leq m - 2 \leq r - 2$, tem-se que $f^{(p)}_{x_\lambda \ldots x_s}$ é de classe C^2 no aberto B (admite derivadas parciais contínuas até à segunda ordem) e, portanto, pelo corolário 2, tem-se nesse aberto,

$$f^{(m)}_{x_\lambda \dots x_s\, x_\alpha\, x_\beta\; x_\delta \dots x_t} = \left\{ \left[f^{(p)}_{x_\lambda \dots x_s} \right]''_{x_\alpha\, x_\beta} \right\}^{(m-p-2)}_{x_\delta \dots x_t} =$$

$$= \left\{ \left[f^{(p)}_{x_\lambda \dots x_s} \right]''_{x_\beta\, x_\alpha} \right\}^{(m-p-2)}_{x_\delta \dots x_t} = f^{(m)}_{x_\lambda \dots x_s\, x_\beta\, x_\alpha\; x_\delta \dots x_t} \;.$$

A partir do resultado que acaba de estabelecer-se (possibilidade de trocar duas variáveis de derivação consecutivas), pode concluir-se que qualquer derivada que se obtenha de,

$$f^{(m)}_{x_\lambda \dots x_s\, x_\alpha\, x_\beta\; x_\delta \dots x_t} \quad (2 \le m \le r) \;,$$

por permutação das variáveis de derivação coincide com esta no aberto B . Com efeito, qualquer permutação de $x_\lambda \dots x_s\, x_\alpha\, x_\beta\, x_\delta \dots x_t$ se pode obter mediante um número finito de trocas de variáveis consecutivas e, como vimos, qualquer destas trocas mantém inalterada a derivada em B .

O corolário está completamente demonstrado.

Os resultados dos corolário 2 e 3 podem obter-se como corolários de um teorema alternativo ao teorema 6. Trata-se do teorema de Schwartz que dispensa a diferenciabilidade das primeiras derivadas parciais de $f\,(x\,,\,y)$ mas, em contrapartida, exige a existência de uma das segundas derivadas mistas em certa vizinhança do ponto $(a\,,\,b)$ e a continuidade desta nesse ponto.

A demonstração do teorema de Schwartz vem facilitada provando primeiro um teorema auxiliar devido a LLorente :

Teorema 7 : *Sendo* $f\,(x\,,\,y)$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^2$ *em* $\mathbf{R}$ *e* $(a\,,\,b) \in INT.\,A$ *, admita-se que as derivadas parciais* $f'_x(x\,,y)$ *e* $f'_y(x\,,y)$ *existem em certa vizinhança* $\mathrm{V}_\eta(a\,,\,b) \subseteq$ $\subseteq A$ *. Sendo, por outro lado,*

$$\Delta(h\,,\,k) = \left[f(a+h\,,\,b+k) \;-\; f(a\,,\,b+k\,) \right] \;-\; \left[f(a+h\,,\,b) \;-\; f(a\,,\,b) \right],$$

admita-se que existe finito,

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} = \lambda\,.$$

Tem-se então que, $f''_{xy}(a\,,b) \;=\; f''_{yx}(a\,,b) \;=\; \lambda$ **(LLorente)**

Demonstração : Tem-se que $\Delta(h\ ,\ k)$ é definido para valores não nulos h e k tais que $\|(h,k)\| < \eta$. Dado $\delta > 0$, existe um $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\delta) < \eta$ tal que,

$$\|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon^* \Rightarrow \lambda - \delta/2 < \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} < \lambda + \delta/2$$

em virtude de ser por hipótese $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \dfrac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} = \lambda$. Com $\varepsilon = \varepsilon^*/\sqrt{2}$, tem-se então,

$$0 < |\,h\,| < \varepsilon \wedge 0 < |\,k\,| < \varepsilon \Rightarrow \|(h,k)\| = \sqrt{h^2+k^2} < \varepsilon\,.\sqrt{2} = \varepsilon^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - \delta/2 < \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} < \lambda + \delta/2 \ ,$$

Mantendo k fixo $(0 < |\,k\,| < \varepsilon)$ e fazendo $h \to 0$, obtém-se,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\,,\,b+k) - f(a\,,\,b+k)}{h\,.\,k} - \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h\,,\,b) - f(a\,,\,b)}{h\,.\,k} =$$

$$= \frac{f_x'(a\,,\,b+k) - f_x'(a\,,\,b)}{k} \ ,$$

em virtude de $f_x'(x\ ,\ y)$ existir em $V_\eta(a\ ,\ b)$. Mas, para cada k tal que $0 < |\,k\,| < \varepsilon$,

$$\lambda - \delta/2 < \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} < \lambda + \delta/2 \Rightarrow \lambda - \delta/2 \le \lim_{h\to 0} \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} \le \lambda + \delta/2 \ ,$$

ou seja,

$$\lambda - \delta < \frac{f_x'(a\,,\,b+k) - f_x'(a\,,\,b)}{k} < \lambda + \delta \ ,$$

assim se concluindo, por definição de limite, que existe,

$$f_{xy}''(a\,,\,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x'(a\,,\,b+k) - f_x'(a\,,\,b)}{k} = \lambda\,.$$

Se, em alternativa, mantivermos h fixo $(0 < |\,h\,| < \varepsilon)$ e fazendo $k \to 0$, obtém-se,

$$\lim_{k\to 0} \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a+h\,,\,b+k) - f(a+h,\,b)}{h\,.\,k} - \lim_{k\to 0} \frac{f(a\,,\,b+k) - f(a\,,\,b)}{h\,.\,k} =$$

$$= \frac{f_y'(a+h,b) - f_y'(a,b)}{h} ,$$

e também agora, para cada h tal que $0 < |h| < \varepsilon$,

$$\lambda - \delta < \lambda - \delta/2 \le \frac{f_y'(a+h,b) - f_y'(a,b)}{h} \le \lambda + \delta/2 < \lambda + \delta ,$$

assim se concluindo, por definição de limite, que existe,

$$f_{yx}''(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y'(a+h,b) - f_y'(a,b)}{h} = \lambda .$$

Tem-se então, $f_{xy}''(a,b) = f_{yx}''(a,b) = \lambda$, como se queria provar.

Passemos agora à demonstração do teorema de Schwartz.

Teorema 8 : *Sendo* $f(x,y)$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^2$ *em* $\mathbf{R}$ *e* $(a,b) \in INT.\ A$ *, admita-se que as derivadas parciais* $f_x'(x,y)$, $f_y'(x,y)$ *e* $f_{xy}''(x,y)$ *existem em certa vizinhança* $V_\eta(a,b) \subseteq A$ *e que, além disso,* $f_{xy}''(x,y)$ *é contínua em* (a,b)*. Então, existe* $f_{yx}''(a,b) = f_{xy}''(a,b)$ (**Schwartz**)

Demonstração : De $|h| < \eta/\sqrt{2}$ e $|k| < \eta/\sqrt{2}$, resulta $\|(h,k)\| < \eta$. Considerando então $|h| < \eta/\sqrt{2}$ e $|k| < \eta/\sqrt{2}$, a função $\varphi(x) = f(x, b+k) - f(x, b)$ é regular no intervalo de extremidades a e $a+h$ e, portanto,

$$\Delta(h,k) = [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] - [f(a+h, b) - f(a,b)] =$$

$$= [f(a+h, b+k) - f(a+h, b)] - [f(a, b+k) - f(a,b)] =$$

$$= \varphi(a+h) - \varphi(a) = h \,.\, \varphi'(a + \theta_1 . h) =$$

$$= h \,.\left[f_x'(a + \theta_1 . h, b+k) - f_x'(a + \theta_1 . h, b)\right] ,$$

com $0 < \theta_1 < 1$. Notando agora que, com $|h| < \eta/\sqrt{2}$ e $|k| < \eta/\sqrt{2}$, a função $\psi(y) = f_x'(a + \theta_1 . h, y)$ é regular no intervalo de extremidades b e $b+k$, porque por hipótese $f_{xy}''(x,y)$ existe em $V_\eta(a,b)$, obtém-se, aplicando de novo o teorema de Lagrange,

$$\Delta(h,k) = h \,.\, k \,.\, f_{xy}''(a + \theta_1 . h, b + \theta_2 . k) ,$$

com $0 < \theta_1 < 1$ e $0 < \theta_2 < 1$; daqui resulta, com h e k não nulos,

$$\frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} = f''_{xy}(a + \theta_1 . h \,,\, b + \theta_2 \,.\, k) \ ,$$

e, devido à continuidade de $f''_{xy}(x\,,\,y)$ em $(a\,,\,b)$,

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\Delta(h,k)}{h\,.\,k} = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} f''_{xy}(a + \theta_1 . h \,,\, b + \theta_2 \,.\, k) = f''_{xy}(a\,,\,b) \ ,$$

pelo que, nos termos do teorema 7, existem e são iguais as segundas derivadas $f''_{yx}(a\,,\,b)$ e $f''_{xy}(a\,,\,b)$. O teorema de Schwartz está demonstrado.

Convirá observar que no enunciado do teorema de Shwartz, as hipóteses relativas a $f''_{xy}(x\,,\,y)$ - existência em certa $V_\eta\,(a\,,\,b)$ e continuidade em $(a\,,\,b)$ - podem ser substituídas por idênticas hipóteses relativas a $f''_{yx}(x\,,\,y)$, garantindo então o teorema a existência de $f''_{xy}(a\,,\,b) = f''_{yx}(a\,,\,b)$. A demonstração adapta-se com facilidade a este caso, o que se deixa como exercício.

O corolário 2 (e a partir dele o corolário 3) do teorema 6 pode com facilidade ser deduzido do teorema de Schwartz . Dada a função $f(x_1\,, x_2\,, \dots\,, x_n)$ de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$, suponha-se que é de classe C^2 em certo aberto $B \subseteq A$. Nessas condições, dado um qualquer $\overline{a} = (a_1\,, a_2\,, \dots\,, a_n) \in B = INT.\, B$, existe uma $V_\eta(\overline{a})$ na qual as primeiras e segundas derivadas parciais de $f(x_1\,, x_2\,, \dots\,, x_n)$ são funções contínuas . Então a função,

$$\varphi(x_\alpha\,, x_\beta) = f(a_1\,, \dots\,, x_\alpha\,, \dots\,, x_\beta\,, \dots\,,\ a_n) \ ,$$

admite derivadas parciais de primeira e segunda ordens contínuas em $V_\eta(a_\alpha\,, a_\beta)$, o que, à luz do teorema 8 , é mais que suficiente para garantir que, $\varphi''_{x_\alpha x_\beta}(a_\alpha\,,\,a_\beta)$ $= = \varphi''_{x_\beta x_\alpha}(a_\alpha\,,\,a_\beta)$, ou seja, $f''_{x_\alpha x_\beta}(\overline{a}) = f''_{x_\beta x_\alpha}(\overline{a})$. Como o ponto $\overline{a}$ considerado é um ponto arbitrário de $B = INT.\ B$, pode concluir-se que $f''_{x_\alpha x_\beta}(\overline{x}) = f''_{x_\beta x_\alpha}(\overline{x})$ no aberto B.

10. Exercícios

1 - Dada a função,

$$g(x\,,y)=\begin{cases} x\,y\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & ,\quad x=y=0 \end{cases}\ ,$$

calcule as suas derivadas parciais de primeira ordem na origem.

2 - Calcule as funções derivadas parciais de primeira ordem para as seguintes funções, indicando os respectivos domínios:

a) $f(x\,,y)=\begin{cases}(1/x)\,.\,sen\,(x\,y) & ,\ x\neq 0\\ y^2-y & ,\ x=0\end{cases}$; **b)** $f(x\,,y)=\begin{cases}x\,y & ,\ x^2\neq y\\ x+y & ,\ x^2=y\end{cases}$;

c) $f(x\,,y)=\begin{cases}x^2-y\,x & ,\ y\neq x\\ x & ,\ y=x\end{cases}$.

3 - Verifique que a função,

$$f(x\,,y)=\begin{cases}\dfrac{2\,x\,y}{x^2+y^2} & ,\quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,\quad x=y=0\end{cases}\ ,$$

tem derivadas parciais em todo o seu domínio mas não é contínua na origem.

4 - Considere a função $f(x\,,y)=(1-x^2-y^2)^{3/2}$ com domínio $D=\{(x\,,y)\ :\ x^2+y^2\leq 1\}$. Estude a existência das derivadas parciais de primeira ordem nos pontos fronteiros de *D*, indicando em que pontos de D não se pode definir alguma daquelas derivadas.

5 - Calcule as funções derivadas parciais de primeira e segunda ordens para cada uma das seguintes funções: **a)** $z=e^{\,x}\,.\,e^{\,y}\,.\,sen\,(x\,y)$; **b)** $z=(\,x+y+u)\,.\,log\,(x\,u)$.

6 - Determine m e n por forma que as derivadas de ambas as funções, $z=x\,.\,e^{mx+ny}$ e $z=y\,.\,e^{mx+ny}$, verifiquem a relação,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0\,.$$

7 - Determine as derivadas parciais de primeira e segunda ordens para as seguintes funções : **a)** $u=x^2.\,y^3+x^3.\,y^2$; **b)** $v=e^{x\,y\,z}$.

8 - Dada a função,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & , \quad x=y=0\end{cases} ,$$

indique segundo que vectores existe derivada na origem e calcule o respectivo valor.

9 - O mesmo que no exercício anterior para a função,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & , \quad x=y=0\end{cases} .$$

10 - Mostre que a função,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0\end{cases} ,$$

admite derivada na origem segundo qualquer vector (em particular tem derivadas parciais) e calcule-a. Mostre que no entanto não é contínua na origem . Que poderá concluir sobre a diferenciabilidade da função na origem ? Justifique.

11 - O mesmo que no exercício anterior para a função,

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8} & , \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , \quad x=y=0\end{cases} .$$

12 - Usando a definição, estude a diferenciabilidade na origem, para as seguintes funções:

a) $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2 \, . \, sen \, \dfrac{\pi}{x+y} & , \quad y\neq -x \\ 0 & , \quad y=-x\end{cases}$; **b)** $f(x,y)=\begin{cases}x/y & , \quad y\neq 0 \\ 0 & , \quad y=0\end{cases}$;

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & , \quad x=y=0\end{cases}$.

13 - Mostre que a função da alínea a) do exercício anterior tem derivadas parciais não contínuas na origem e, no entanto, é aí diferenciável. Este exemplo mostra que a condição suficiente de diferenciabilidade estudada não é condição necessária.

14 - Escreva as expressões da diferencial das seguintes funções, nos pontos indicados:

a) $f(x\,,y) = \dfrac{x + y - 1}{x - y + 2}$, em $(1\,,2)$;

b) $f(x\,,\ y\,,\ z) = \dfrac{x - y + z}{\sqrt{z - 1}}$, em $(x\,,\ y\,,\ z)$ com $z > 1$;

c) $f(x\,,y) = y^{x}$, em $(x\,,y)$ com $y > 0$.

15 - Utilize a condição suficiente de diferenciabilidade para provar que a função,

$$f(x\,,y) = \begin{cases} (x-1)^2 \,.\, (y-1)^2 & ,\ x > 1 \\ 0 & ,\ x \leq 1 \end{cases} \quad ,$$

é diferenciável em qualquer $(x\,,y)$. Escreva a expressão da diferencial.

16 - Considere a seguinte função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^3$,

$$f(x\,,y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x\,y + x^2 \\ x^3 + y^3 \end{bmatrix} \,.$$

a) Determine a matriz Jacobiana de $f(x\,,y)$;
b) Escreva na forma matricial a expressão da diferencial da função num ponto genérico $(x\,,\ y)$.

17 - O mesmo que no exercício anterior para a função,

$$f(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - t^2} \\ t^2 \\ 1 + t^2 \end{bmatrix} \quad ,$$

suposta definida no intervalo aberto $]\,0\,,1\,[$.

18 - Utilize a regra de derivação de uma função composta para calcular a $dz\,/\,dt$, supondo que,

$$z = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2} \quad \text{e que} \quad x = cos\ t \ ,\ y = sen\ t \ .$$

19 - Utilize a regra de derivação de uma função composta para calcular,

$$\frac{\partial w}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial v} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial s} \ ,$$

supondo que $w = e^{x+y} . \ e^{y+z}$ e que $x = u + v + 2s$, $y = 2s - v$ e $z = 2s$.

20 - Se a função $f(u , v , w)$ é diferenciável no ponto $(x\text{-}y , y\text{-}z , z\text{-}x)$ prove que, com $F(x , y , z) = f(x\text{-}y , y\text{-}z , z\text{-}x)$, se verifica a igualdade,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0 .$$

21 - Sendo,

$$f(x , y) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ x - 2xy \\ y + 2xy \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g(u , v , w) = \begin{bmatrix} u + v + w^2 \\ u^2 + v + w^2 \end{bmatrix} \ ,$$

calcule através de um produto matricial a matriz Jacobiana da função composta $f \, o \, g$.

22 - O mesmo que no exercício anterior, considerando,

$$f(x , y , z) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ x - y - z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g(u , v) = \begin{bmatrix} u + v \\ u^2 - v^2 \\ u^2 - 2v \end{bmatrix} .$$

23 - Considere a função,

$$f(x , y) = \begin{cases} \dfrac{x^{5/3} . \ y^2}{(x^2 + y^2)^{4/3}} & , \ x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \ x = y = 0 \end{cases} .$$

Tomando $x = t$ e $y = t$, construa a função $F(t) = f(t , t)$ e calcule $F'(0)$ directamente e por intermédio da regra de derivação de uma função composta. Que pode concluir dos diferentes resultados obtidos ?

24 - Considere a função,

$$f(x , y) = \begin{cases} sen\, x & , \ x \neq 0 \\ sen\, y & , \ x = 0 \end{cases} .$$

Tomando $x = t$ e $y = t^2$, construa a função $F(t) = f(t , t^2)$ e calcule $F'(0)$ directamente e por intermédio da regra de derivação de uma função composta. Verifique que os resultados são iguais e que, apesar disso, não se cumprem as condições em que se firma a aplicação da regra de derivação de uma função composta. Que conclusão pode daí tirar ?

25 - Mostre que as funções seguintes são homogéneas, determine o respectivo grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:

a) $f(x\,,y) = \dfrac{x\ -\ y}{x^2\ +\ y^2}$; **b)** $f(x\,,y) = log\ \dfrac{(x\ +\ y)^2}{x\ .\ y}$;

c) $f(x\,,y) = \ k\ .\ x^{1/2}\ .\ y^{1/2}$; **d)** $f(x\,,y\,,z) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x\ .\ y\ .\ z}$.

Em cada um dos casos indique se a função é apenas positivamente homogénea ou homogénea em sentido restrito.

26 - Estude a homogeneidade de,

$$f(x\,,y\,,z) = \ x^2 + x^{\alpha}\ .\ y^{\beta\text{-}3}\ \text{-}\ z^{3\alpha}\ .\ y^{\beta}\ ,$$

em $A = \{(x\ ,\ y\ ,\ z)\ :\ x > 0\ ,\ \ y > 0\ ,\ \ z > 0\}$ fazendo a discussão em função dos parâmetros α e β:

- Recorrendo directamente à definição ; e
- Confirmando as conclusões pela utilização da identidade de Euler.

27 - Sendo $g(u\,,v)$ diferenciável em $(x/y\,,z/x)$, com $x\,,y \neq 0$, prove que a função,

$$f(x\,,y\,,z) = \ x^2\ .\ g(x/y\,,z/x)\ ,$$

verifica a identidade , $x\ .\ f_x^{'}\ +\ y\ .\ f_y^{'}\ +\ z\ .\ f_z^{'}\ \equiv\ 2\ .f$. Interprete este resultado em termos de homogeneidade.

28* - Seja $f(x_1\,,x_2\,,\ldots\,,x_n)$ uma função diferenciável em certo ponto $\overline{a}$ interior do respectivo domínio. Seja T o conjunto dos valores de t que verificam a igualdade,

$$f(ta_1\,,ta_2\,,\ldots\,,ta_n) = t^{\alpha}.f(a_1\,,a_2\,,\ldots\,,a_n)\ ,$$

com α independente de t . Prove que se T admite 1 como ponto de acumulação, então,

$$\sum_{i=1}^{n}\ a_i\ .\ f_{x_i}^{'}(a_1\ ,a_2\ ,\ \cdots\ ,\ a_n)\ =\ \alpha\ .f(a_1\,,a_2\,,\ldots\,,a_n)\ .$$

29 - Sendo $f(x\,,y) = x\ .\ cos\ y$, $x = t$ e $y = 2\,t$, determine pela regra de derivação de uma função composta as segunda e terceira derivadas da função $F(t) = f(t\,,2t)$.

30 - Supondo que $f(u\,,v)$ admite derivadas parciais diferenciáveis, calcule, para a função $F(x\,,y) = f(sen\ x\,,sen\ y)$, as respectivas derivadas parciais de primeira e segunda ordens.

31 - Considerando os pontos $(1\,,2)$ e $(1 + h\,,2 + k)$ escreva a fórmula dos acréscimos finitos para a função $z = x^2 + y^2$ em cada uma das duas versões estudadas (com um só θ

e com valores θ_1 e θ_2). Em cada uma das versões determine o valor θ ou os valores θ_1 e θ_2 em função de h e k .

32 - O mesmo que no exercício anterior, considerando a função, $z = log\, x + log\, y$, e os pontos, $(1\,,\,1)$ e $(1+h\,,\,1+h)$.

33 - Utilize a fórmula dos acréscimos finitos para mostrar que, para valores grandes de n,

$$sen\ \frac{(n-1)\pi}{n} \approx -\frac{\pi}{n}\cdot cos\ \frac{(n-1)\pi}{n} \quad .$$

SUGESTÃO : Aplique a fórmula dos acréscimos finitos a $f(x\,,\,y) = x\,.\,sen\,y$ no ponto $(\pi\,,\,\pi)$ e faça $h = k = -\pi/n$.

34* - Seja $f(\bar{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ e admita que A é aberto e convexo. Admita que $f(\bar{x})$ é diferenciável em A e que as derivadas parciais da função são globalmente limitadas nesse conjunto: $\forall\ \bar{x} \in A\ ,\ |\,f'_{x_i}(\bar{x})\,| \leq M_i\ ,\ i = 1\,,\,2\,,\,...\,,\,n$, em que cada M_i é uma constante. Mostre que em tais condições a função $f(\bar{x})$ satisfaz a condição de Lipschitz no aberto A .

35 - Aplique a fórmula dos acréscimos finitos a $z = \sqrt{x^2 + 2\,y^3}$ com os pontos $(3\,,\,2)$ e $(3+h\,,\,2+k)$ e, tomando h e k convenientes, calcule um valor aproximado para,

$$\sqrt{2{,}8^2 + 2 \times 2{,}1^3} \quad .$$

36 - O mesmo que no exercício anterior, considerando $z = e^{\,x} + e^{\,y}$ e os pontos $(0{,}0)$ e $(h\,,\,k)$, calculando um valor aproximado para,

$$e^{\,0{,}01} + e^{\,-0{,}02}\,.$$

37 - Dada a função,

$$f(x\,,\,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + sen^3 y}{x^2 + y^2} & ,\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,\ x = y = 0 \end{cases} \quad ,$$

calcule $f''_{xy}(0,0)$ e mostre que $f'_y(x,y)$ existe finita para qualquer $(x\,,\,y)$. Mostre que, no entanto, $f''_{yx}(0,0)$ não existe e investigue quais das hipóteses do teorema de Heffter-Young não se verificam.

38 - Dada a função,

$$f(x\,,y)=\begin{cases} y\ +\ \log x & ,\ x\ >\ 0 \\ y & ,\ x\ \leq\ 0 \end{cases} \quad ,$$

mostre que $f''_{yx}(x\,,\,y)$ é contínua em $\mathbf{R}^2$ e que, no entanto, não existe $f''_{xy}(0,0)$. Investigue quais das hipóteses do teorema de Schwartz não se verificam.

39 - Calcule e verifique que são distintas as derivadas $f''_{xy}(0,0)$ e $f''_{yx}(0,0)$ da função,

$$f(x\,,y)=\begin{cases} \dfrac{(x^3\ -\ 2\,x\,y^2\,)\ .\ sen\ y}{x^2\ +\ y^2} & ,\ (x,y)\ \neq\ (0,0) \\ 0 & ,\ x\ =\ y\ =\ 0 \end{cases} \quad .$$

Investigue quais das hipóteses do teorema de Heffter-Young não se verificam.

40 - Sendo, no aberto A ,

$$f(x\,,y)=\ x\cdot\frac{\partial\,f}{\partial\,x}\ +\ y\cdot\frac{\partial\,f}{\partial\,y}\ ,$$

e admitindo que $f(x\,,\ y)$ é de classe $C^{\,2}$ em A , prove que,

$$\frac{\partial^{\,2}f}{\partial\,y^2}\cdot\frac{\partial^{\,2}f}{\partial\,x^2}=\left[\frac{\partial^{\,2}f}{\partial\,x\,\partial\,y}\right]^2 .$$

41 - Com $f\,(x\,,\,y)\ =\ f'_x(x\,,\,y)\ -\ f'_y(x\,,\,y)$ e admitindo a identidade das derivadas mistas de segunda ordem, mostre que,

$$\left[\frac{\partial\,f}{\partial\,x}\right]^2-\left[\frac{\partial\,f}{\partial\,y}\right]^2=\left(\frac{\partial^{\,2}f}{\partial\,x^2}\ -\ \frac{\partial^{\,2}f}{\partial\,y^2}\right)\cdot f\,(x\,,\,y)\quad .$$

42 - Sendo $f\,(x\,,y)$ homogénea de grau α e sendo diferenciáveis as respectivas derivadas parciais, mostre que,

$$x^2\ .\ f''_{x^2}\ +\ 2\,x\,y\ .\ f''_{xy}\ +\ y^2\,.\,f''_{y^2}\ =\alpha\,.\,(\alpha\,\text{-}\,1)\,.\,f\quad .$$

43* - Se $f\,(x\,,y)$ é homogénea de grau m - 1 (m inteiro positivo) e se a função for de classe $C^{\,m}$, mostre que,

$$\sum_{i=0}^{m}\,C_i^m\,\cdot\,\frac{\partial^{\,m}f}{\partial\,x^{m-i}\,\partial\,y^i}\cdot\,x^{m-i}y^i\ =0\ .$$

44 - Dado um aberto A , considere as seguintes definições :

1) A função f diz-se de classe C^0 em A se e só se é contínua em todos os pontos do conjunto ;

2) A função f diz-se de classe C^r ($r = 1 , 2 , ...$) em A se e só se admite derivadas parciais contínuas até à ordem r em todos os pontos do conjunto ;

3) A função f diz-se de classe C^∞ em A se e só se admite derivadas parciais contínuas de todas as ordens em todos os pontos do conjunto ;

4) A função f diz-se de classe D^0 em A se e só se é diferenciável em todos os pontos do conjunto ;

5) A função f diz-se de classe D^r ($r = 1 , 2 , ...$) em A se e só se admite derivadas parciais até à ordem r diferenciáveis em todos os pontos do conjunto ;

6) A função f diz-se de classe D^∞ em A se e só se admite derivadas parciais de todas as ordens diferenciáveis em todos os pontos do conjunto .

Posto isto, prove que :

a) $\mathsf{C}^0 \supset \mathsf{C}^1 \supset \mathsf{C}^2 \supset \ldots \supset \mathsf{C}^\infty$ e $\mathsf{D}^0 \supset \mathsf{D}^1 \supset \mathsf{D}^2 \supset \ldots \supset \mathsf{D}^\infty$;

b) $\mathsf{C}^r \supset \mathsf{D}^r \supset \mathsf{C}^{r+1}$;

c) $\mathsf{C}^\infty = \mathsf{D}^\infty$.

<u>RESPOSTAS</u> :

1 - $g'_x(0 , 0) = g'_y(0 , 0) = 0$.

2 - a) $f_x'(x,y) = \begin{cases} \dfrac{yx \cdot \cos(yx) - \operatorname{sen}(yx)}{x^2} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) \in \{(0,0)\ ;\ (0,2)\} \end{cases}$

$f_y'(x,y) = \begin{cases} \cos(yx) & , \quad x \neq 0 \\ 2y - 1 & , \quad x = 0 \end{cases}$

Domínio de $f_x' = \{(x,y) : x \neq 0\} \cup \{(0,0)\ ;\ (0,2)\}$
Domínio de $f_y' = \mathbf{R}^2$;

b) $f_x'(x,y) = \begin{cases} y & , \ y \neq x^2 \\ 0 & , \ y = x = 0 \\ y & , \ y = x^2 \wedge x = (1 \pm \sqrt{5})/2 \end{cases}$

$f_y'(x,y) = \begin{cases} x & , \ y \neq x^2 \\ 0 & , \ y = x = 0 \\ x & , \ y = x^2 \wedge x = (1 \pm \sqrt{5})/2 \end{cases}$

Domínio de $f_x' = f_y' =$
$= \{(x,y) : y \neq x^2\} \cup \{(x,y) : y = x^2 \wedge x = (1 \pm \sqrt{5})/2\} \cup \{(0,0)\}$;

c) $f_x'(x,y) = \begin{cases} 2x - y & , \ y \neq x \\ 0 & , \ x = y = 0 \end{cases}$ $\qquad f_y'(x,y) = \begin{cases} -x \ , \ y \neq x \\ 0 \ , \ x = y = 0 \end{cases}$

Domínio de f_x' = Domínio de $f_y' = \{(x,y) : y \neq x\} \cup \{(0,0)\}$.

4 - Se $(a, b) \in FRONT.\ D$ não pertencer ao eixo dos xx ou dos yy, $f_x'(a,b)$ e $f_y'(a,b)$ são derivadas laterais de $f(x, b)$ e $f(a, y)$, respectivamente, em $x = a$ e $x = b$, como se indica:

	$f_x'(a,b)$	$f_y'(a,b)$
(a, b) do 1º Quadrante	Derivada à esquerda	Derivada à esquerda
(a, b) do 2º Quadrante	Derivada à direita	Derivada à esquerda
(a, b) do 3º Quadrante	Derivada à direita	Derivada à direita
(a, b) do 4º Quadrante	Derivada à esquerda	Derivada à direita

As expressões de $f_x'(a,b)$ e $f_y'(a,b)$ são, em qualquer dos casos,

$$f_x'(a,b) = -3a \cdot (1 - a^2 - b^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad f_y'(a,b) = -3b \cdot (1 - a^2 - b^2)^{1/2} .$$

Se $(a, b) \in FRONT.\ D$ pertencer ao eixo dos xx ou dos yy, tem-se:

- Em $(1, 0)$ só existe $f_x'(1,0) = 0$ (derivada lateral esquerda) ;
- Em $(0, 1)$ só existe $f_y'(0,1) = 0$ (derivada lateral esquerda) ;

- Em (-1 , 0) só existe $f'_x(-1,0) = 0$ (derivada lateral direita) ;
- Em (0 , -1) só existe $f'_y(0,-1) = 0$ (derivada lateral direita) .

5 - a) $z'_x = e^x \cdot e^y \cdot \left[y \cdot \cos(xy) + \operatorname{sen}(xy) \right]$

$z'_y = e^x \cdot e^y \cdot \left[x \cdot \cos(xy) + \operatorname{sen}(xy) \right]$

$z''_{x^2} = e^x \cdot e^y \cdot \left[2y \cdot \cos(xy) + (1 - y^2) \cdot \operatorname{sen}(xy) \right]$

$z''_{y^2} = e^x \cdot e^y \cdot \left[2x \cdot \cos(xy) + (1 - x^2) \cdot \operatorname{sen}(xy) \right]$

$z''_{xy} = z''_{yx} = e^x \cdot e^y \cdot \left[(1 + y + x) \cdot \cos(xy) + (1 - yx) \cdot \operatorname{sen}(xy) \right]$;

b) $z'_x = \dfrac{x + y + u}{x} + \log(xu)$, $z'_y = \log(xu)$, $z'_u = \dfrac{x + y + u}{u} + \log(xu)$,

$z''_{x^2} = \dfrac{x - y - u}{x^2}$, $z''_{xy} = z''_{yx} = \dfrac{1}{x}$, $z''_{xu} = z''_{ux} = \dfrac{x + u}{x . u}$, $z''_{y^2} = 0$,

$z''_{yu} = z''_{uy} = \dfrac{1}{u}$, $z''_{u^2} = \dfrac{u - x - y}{u^2}$.

6 - $m = n = 1$.

7 - a) $u'_x = 2xy^3 + 3x^2y^2$, $u'_y = 3x^2y^2 + 2x^3y$, $u''_{x^2} = 2y^3 + 6xy^2$,

$u''_{xy} = u''_{yx} = 6xy^2 + 6x^2y$, $u''_{y^2} = 2x^3 + 6yx^2$;

b) $v'_x = yz\, e^{xyz}$, $v'_y = xz\, e^{xyz}$, $v'_z = yx\, e^{xyz}$, $v''_{x^2} = y^2 z^2 e^{xyz}$,

$v''_{xy} = v''_{yx} = (z + yxz^2)\, e^{xyz}$, $v''_{xz} = v''_{zx} = (y + xzy^2)\, e^{xyz}$,

$v''_{y^2} = x^2 z^2 e^{xyz}$, $v''_{yz} = v''_{zy} = (x + yzx^2)\, e^{xyz}$, $v''_{z^2} = x^2 y^2 e^{xyz}$.

8 - $f'_{\overline{u}}(0,0)$ só existe e é nula quando as coordenadas de $\overline{u} = (h , k)$ sejam iguais em valor absoluto ($|h| = |k|$) .

9 - $f'_{\overline{u}}(0,0)$ só existe e é nula quando uma das coordenadas de $\overline{u} = (h , k)$ seja nula .

10 - $f'_{\overline{u}}(0,0) = k^2 / h$ se $\overline{u} = (h , k)$ com $h \neq 0$, $f'_{\overline{u}}(0,0) = 0$ se $\overline{u} = (0 , k)$ e $k \neq 0$; a função não pode ser diferenciável na origem, caso contrário seria aí contínua.

11 - $f'_{\overline{u}}(0,0) = 0$ se $\overline{u} = (h , k)$ com $k \neq 0$, $f'_{\overline{u}}(0,0) = h$ se $\overline{u} = (h , 0)$ e $h \neq 0$; a função não pode ser diferenciável na origem, caso contrário seria aí contínua.

12 - a) Diferenciável ; **b)** Não diferenciável ; **c)** Não diferenciável .

14 - a) $-h + 3k$, com h acréscimo da variável x e k acréscimo da variável y ;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{z - 1}} \cdot \left[h - k + \left(1 - \dfrac{x - y + z}{2z - 2} \right) \cdot \theta \right]$, com h , k e θ , respectivamente, acréscimos de x , y e z ;

c) $y^x \cdot \left[(\log y) \cdot h + (x / y) \cdot k \right]$, com h acréscimo da variável x e k acréscimo da variável y .

15 - Designando por h e k , respectivamente, os acréscimos de x e de y , as expressões pedidas são,

- Para $x > 1$, $2\,(x - 1)(y - 1)\,.\,[(y - 1)\,.\,h \;+\; (x - 1)\,.\,k]$;
- Para $x \leq 1$, 0 .

16 - **a)** Matriz Jacobiana = $\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y + 2x & x \\ 3x^2 & 3y^2 \end{bmatrix}$; **b)** Diferencial = $\begin{bmatrix} 2xh + 2yk \\ (y + 2x)h + xk \\ 3x^2\,h + 3y^2\,k \end{bmatrix}$.

17 - **a)** Matriz Jacobiana = $\begin{bmatrix} -\dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \\ 2t \\ 2t \end{bmatrix}$; **b)** Diferencial = $\begin{bmatrix} -\dfrac{t\,h}{\sqrt{1 - t^2}} \\ 2t\,h \\ 2t\,h \end{bmatrix}$.

18 - $z'_t = 2 - 4\,sen^2\,t$.

19 - $w'_u = e^{8s + u - v}$, $w'_v = -\,e^{8s + u - v}$, $w'_s = 8\,.\,e^{8s + u - v}$.

21 - Matriz Jacobiana = $\begin{bmatrix} 2x + 4yu & 2x + 2y & 4xw + 4yw \\ 1 - 2y - 4xu & 1 - 2y - 2x & 2w - 4wy - 4xw \\ 2y + 2u + 4xu & 2y + 1 + 2x & 4yw + 2w + 4xw \end{bmatrix}$,

em que $x = u + v + w^2$ e $y = u^2 + v + w^2$.

22 - Matriz Jaccobiana = $\begin{bmatrix} 4u + 1 & -2v - 1 \\ 1 - 4u & 3 + 2v \end{bmatrix}$.

23 - $F'(0) = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{4}$ (directamente) e $F'(0) = 0$ (regra de derivação da função composta) ; a obtenção de resultados diferentes permite concluir que $f\,(x\,,\,y)$ não é diferenciável na origem .

24 - $F'(0) = 1$ (directamente) e $F'(0) = 1$ (regra de derivação da função composta) ; pode concluir-se que as condições estudadas que garantem a validade da regra de derivação de uma função composta não são condições necessárias mas apenas suficientes .

25 - **a)** Homogénea de grau -1 em sentido restrito ; **b)** Homogénea de grau 0 em sentido restrito; **c)** Positivamente homogénea de grau 1; **d)** Positivamente homogénea de grau -2 .

26 - Para $\alpha = -3/2$ e $\beta = 13/2$, a função é positivamente homogénea de grau 2 .

27 - A identidade provada significa que a função $f\,(x\,,\,y)$ é positivamente homogénea de grau 2 .

29 - $F''(t) = -\,4\,.\,[\,sen\,(2\,t) \;+\; t\,.\,cos\,(\,2\,t\,)]$,
$F'''(t) = -\,4\,.\,[\,3\,.\,cos\,(2\,t) \;-\; 2\,t\,.\,cos\,(\,2\,t\,)]$.

30 - $F_x' = f_u'(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ cos\ x$, $F_y' = f_v'(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ cos\ y$,

$F_{x^2}'' = f_{u^2}''(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ cos^2 x - f_u'(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ sen\ x$,

$F_{xy}'' = F_{yx}'' = f_{uv}''(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ cos\ x\ .\ cos\ y$

$F_{y^2}'' = f_{v^2}''(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ cos^2 y - f_v'(sen\ x\ ,\ sen\ y)\ .\ sen\ y$.

31 - $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 1/2$.

32 - $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \dfrac{h - log\ (1+h)}{h\ .\ log\ (1+h)}$.

35 - 5,12 (valor calculado com $\theta = 0$) .

36 - 1,99 (valor calculado com $\theta = 0$) .

37 - $f_{xy}''(0\ ,\ 0) = 0$; as primeiras derivadas parciais não são diferenciáveis na origem .

38 - f_x' não é definida em nenhuma vizinhança da origem .

39 - $f_{xy}''(0\ ,\ 0) = 0$ e $f_{yx}''(0\ ,\ 0) = 1$; as primeiras derivadas parciais não são diferenciáveis na origem .

CAPÍTULO VIII

DIFERENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR FÓRMULA DE TAYLOR E APLICAÇÕES

1. Diferenciais de ordem superior

Trataremos apenas o caso das funções de $A \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ em $\mathbf{R}$, sendo que o caso geral das funções de $A \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ em $\mathbf{R}^\mathbf{m}$ se obtém a partir das respectivas componentes ou coordenadas, cada uma das quais é uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ em $\mathbf{R}$.

Seja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^\mathbf{n}$ em $\mathbf{R}$, com A conjunto aberto. Sendo $f(\bar{x})$ diferenciável em A, sabemos já que, para qualquer ponto $\bar{x} \in A$,

$$\left[d f\right]_{\bar{h}}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot h_i = f'_{\bar{h}}(\bar{x}) \ .$$

Admitamos adicionalmente que as primeiras derivadas parciais de $f(\bar{x})$ são diferenciáveis no aberto A - o que em particular fica garantido se $f(\bar{x})$ for de classe C^2 no aberto em causa - . Assim, para cada vector $\bar{h} \in \mathbf{R}^\mathbf{n}$, a função $\left[d f\right]_{\bar{h}}(\bar{x}) = f'_{\bar{h}}(\bar{x})$, considerada como função de $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, é diferenciável no aberto A, sendo a sua diferencial num ponto genérico $\bar{x} \in A$ e segundo um vector $\bar{k}$ dada por,

$$\left\{d\left[d f\right]_{\bar{h}}\right\}_{\bar{k}}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} \cdot h_i\right)}{\partial x_j} \cdot k_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i\, \partial x_j} \cdot h_i\, k_j \quad ,$$

representando igualmente esta expressão a derivada de $f'_{\bar{h}}(\bar{x})$, num ponto genérico $\bar{x} \in A$ e segundo um vector $\bar{k}$. Ou seja, numa notação mais simplificada,

$$\left[d^2 f\right]_{\bar{h}\,\bar{k}}(\bar{x}) = f''_{\bar{h}\,\bar{k}}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i\, \partial x_j} \cdot h_i\, k_j \quad .$$

Quando seja $\bar{k} = \bar{h}$, obtém-se em particular,

$$\left[d^2 f \right]_{\bar{h}\,\bar{h}} (\bar{x}) = f^{''}_{\bar{h}\,\bar{h}} (\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \, \partial x_j} \cdot h_i \, h_j \quad ,$$

sendo usual neste caso a seguinte simplificação de notação:

$$\left[d^2 f \right]_{\bar{h}} (\bar{x}) = f^{''}_{\bar{h}} (\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \, \partial x_j} \cdot h_i \, h_j \; ,$$

e falando-se então de *segunda diferencial* de $f(\bar{x})$ em $\bar{x} \in A$ segundo o vector $\bar{h}$, ou de *segunda derivada* em $\bar{x} \in A$ segundo o mesmo vector .

Voltando à função $f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$, se ela admitir derivadas parciais até à segunda ordem diferenciáveis no aberto A - o que, em particular, fica garantido se $f(\bar{x})$ for de classe C^3 no aberto em causa - , podemos definir a partir de $\left[d^2 f \right]_{\bar{h}} (\bar{x})$ a *terceira diferencial* da função no ponto $\bar{x} \in A$ segundo o vector $\bar{h}$:

$$\left[d^3 f \right]_{\bar{h}} (\bar{x}) = f^{'''}_{\bar{h}} (\bar{x}) = \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^3 f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \, \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} \cdot h_{i_1} \, h_{i_2} h_{i_3} \; .$$

E assim por diante. Se a função $f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R}$ admitir derivadas parciais até à ordem r -1 diferenciáveis no aberto A - o que, em particular, fica garantido se $f(\bar{x})$ for de classe C^r no aberto em causa - , podemos definir a r - *ésima diferencial* da função no ponto $\bar{x} \in A$ segundo o vector $\bar{h}$:

$$\left[d^r f \right]_{\bar{h}} (\bar{x}) = f^{(r)}_{\bar{h}} (\bar{x}) =$$

$$= \sum_{i_r=1}^{n} \cdots \sum_{i_3=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^r f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \, \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \cdots \partial x_{i_r}} \cdot h_{i_1} \, h_{i_2} h_{i_3} \cdots h_{i_r} \; .$$

Tendo em atenção as expressões indicadas para as sucessivas diferenciais (e derivadas segundo vectores) , obtêm-se as seguintes relações que adiante serão utilizadas:

$$\left[d\, f \right]_{\lambda\,.\,\bar{h}} (\bar{x}) = \lambda \,.\left[d\, f \right]_{\bar{h}} (\bar{x}) \quad \text{ou} \quad f^{'}_{\lambda\,.\,\bar{h}} (\bar{x}) = \lambda \,. f^{'}_{\bar{h}} (\bar{x}) \; ,$$

$$\left[d^2 f \right]_{\lambda\,.\,\bar{h}} (\bar{x}) = \lambda^2 .\left[d^2 f \right]_{\bar{h}} (\bar{x}) \quad \text{ou} \quad f^{''}_{\lambda\,.\,\bar{h}} (\bar{x}) = \lambda^2 . f^{''}_{\bar{h}} (\bar{x}) \; ,$$

...

$$\left[d^r f \right]_{\lambda\,.\,\bar{h}} (\bar{x}) = \lambda^r .\left[d^r f \right]_{\bar{h}} (\bar{x}) \quad \text{ou} \quad f^{(r)}_{\lambda\,.\,\bar{h}} (\bar{x}) = \lambda^r . f^{(r)}_{\bar{h}} (\bar{x}) \; .$$

Em particular, com $\lambda = -1$, obtém-se :

$$\left[d^r f\right]_{-\overline{h}}(\overline{x}) = (-1)^r \cdot \left[d^r f\right]_{\overline{h}}(\overline{x}) \quad \text{ou} \quad f^{(r)}_{-\overline{h}}(\overline{x}) = (-1)^r . f^{(r)}_{\overline{h}}(\overline{x}) \; .$$

Também em particular, fazendo $\rho = \| \overline{h} \|$ e $vers\ \overline{h} = \dfrac{1}{\rho} \cdot \overline{h}$ (quando seja $\rho = \| \overline{h} \| \neq 0$), tem-se :

$$\left[d^r f\right]_{\overline{h}}(\overline{x}) = \left[d^r f\right]_{\rho . vers\ \overline{h}}(\overline{x}) = \rho^r . \left[d^r f\right]_{vers\ \overline{h}}(\overline{x}) \; ,$$

ou ainda ,

$$f^{(r)}_{\overline{h}}(\overline{x}) = \rho^r . \; f^{(r)}_{vers\ \overline{h}}(\overline{x}) \, .$$

2 . Fórmula de Taylor

Admita-se que $f(\overline{x})$ tem derivadas parciais até à ordem m diferenciáveis em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, o que em particular fica garantido se a função for de classe C^{m+1} em A . Seja $\overline{a} \in A$ e $\overline{h}$ um vector tal que, qualquer que seja $t \in [0\, ,\, 1]$, $\overline{x} = \overline{a} + t \,.\, \overline{h} \in A$.

Em particular , se o aberto A se limitar a ser uma vizinhança de um ponto $\overline{a}$, seja ela $V_{\varepsilon}(\overline{a})$, a condição precedente cumpre-se se o vector $\overline{h}$ for tal que $\| \overline{h} \| < \varepsilon$, como facilmente se verifica.

Com $\overline{a} \in A$ e $\overline{h}$ nas condições referidas, considere-se a função $g(t) = f(\overline{a} + t . \overline{h})$, para $-\delta < t < 1 + \delta$, devendo salientar-se que por ser A um conjunto aberto é possível encontrar um $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma a ter-se $\overline{a} + t \,.\, \overline{h} \in A$ para $-\delta < t < 1 + \delta$.

Usando sucessivamente (até à ordem m+1) a regra de derivação de uma função composta, obtêm-se sem qualquer dificuldade as sucessivas derivadas da função $g(t)$ para $-\delta < t < 1 + \delta$:

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\overline{a} + t \,.\, \overline{h}) \,.\, h_i = f'_{\overline{h}}(\overline{a} + t \,.\, \overline{h}) \; ,$$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\overline{a} + t \,.\, \overline{h}) \,.\, h_i h_j = f''_{\overline{h}}(\overline{a} + t \,.\, \overline{h}) \; ,$$

...

$$g^{(k)}(t) = f^{(k)}_{\overline{h}}(\overline{a} + t \,.\, \overline{h}) \; ,$$

...

$$g^{(m+1)}(t) = f^{(m+1)}_{\overline{h}}(\overline{a} + t \,.\, \overline{h}) \; .$$

Escrevendo a *m-ésima* fórmula de Mac-Laurin com resto de Lagrange para a função $g(t)$, obtém-se , para cada $t \in \left] -\delta \,,\ 1+\delta \right[$,

$$g(t) = g(0) + t \,.\, g'(0) + \frac{t^2}{2!} \cdot g''(0) + \cdots + \frac{t^m}{m!} \cdot g^{(m)}(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \cdot g^{(m)}(\theta\, t)$$

com $0 < \theta < 1$.

Tendo em conta as expressões obtidas anteriormente para as sucessivas derivadas de $g(t)$ e fazendo em seguida $t = 1$, resulta ,

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + f_{\bar{h}}^{'}(\bar{a}) + \frac{1}{2!} \cdot f_{\bar{h}}^{''}(\bar{a}) + \cdots + \frac{1}{m!} \cdot f_{\bar{h}}^{(m)}(\bar{a}) +$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!} \cdot f_{\bar{h}}^{(m+1)}(\bar{a} + \theta\, \bar{h}) \ ,$$

com $0 < \theta < 1$, que é a *fórmula de Taylor com resto de Lagrange* para $f(\bar{x})$ com origem em $\bar{a}$. A validade desta fórmula depende, como vimos, de a função ter derivadas parciais até à ordem m diferenciáveis em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ e de $\bar{a}$ e $\bar{h}$ serem tais que $\bar{x} = \bar{a} + t \,.\, \bar{h} \in A$ para $t \in [0\,,1]$.

Usando a simbologia das diferenciais sucessivas, a fórmula precedente pode escrever-se do seguinte modo:

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \left[d\, f\right]_{\bar{h}}(\bar{a}) + \frac{1}{2!} \cdot \left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(\bar{a}) + \cdots + \frac{1}{m!} \cdot \left[d^m f\right]_{\bar{h}}(\bar{a}) +$$
$$+ \frac{1}{(m+1)!} \cdot \left[d^{m+1} f\right]_{\bar{h}}(\bar{a} + \theta\, \bar{h}) \ ,$$

com $0 < \theta < 1$. Atendendo ainda às relações que foram introduzidas na parte final do ponto 1. , podemos ainda apresentar a seguinte versão da mesma fórmula, quando seja $\bar{h} \neq \bar{0}$:

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \rho \,.\left[d\, f\right]_{vers\ \bar{h}}(\bar{a}) + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \left[d^2 f\right]_{vers\ \bar{h}}(\bar{a}) + \cdots +$$
$$+ \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left[d^m f\right]_{vers\ \bar{h}}(\bar{a}) + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left[d^{m+1} f\right]_{vers\ \bar{h}}(\bar{a} + \theta\, \bar{h}) \ ,$$

com $0 < \theta < 1$, $\rho = \|\, \bar{h} \,\|$ e $vers\ \bar{h} = \frac{1}{\rho} \cdot \bar{h}$.

No caso particular de as derivadas parciais de ordem $m+1$ serem contínuas no aberto A - ou seja, se a função $f(\bar{x})$ for de classe C^{m+1} em A - , fazendo,

$$\alpha(h) = f^{(m+1)}_{vers\,\bar{h}}(\bar{a} + \theta\,\bar{h}) - f^{(m+1)}_{vers\,\bar{h}}(\bar{a}) \;,$$

vejamos que $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \alpha(\bar{h}) = 0$. Com efeito, designando por ξ_j as coordenadas de $vers\;\bar{h}$, ou seja, sendo,

$$\xi_j = \frac{1}{\|\,\bar{h}\,\|} \cdot h_j \quad , \quad j = 1\,,2\,,\ldots,n\,,$$

temos para $\alpha(h)$ a expressão,

$$\sum_{i_{m+1}=1}^{n} \sum_{i_m=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \left\{ \left[\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{m+1}}} \right]_{(\bar{a} + \theta\,\bar{h})} - \left[\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{m+1}}} \right]_{(\bar{a})} \right\} \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{m+1}} \quad ,$$

e como cada parcela deste somatório tende para zero quando $\bar{h} \to \bar{0}$ (devido à continuidade das derivadas parciais de ordem $m + 1$) e, por outro lado, as coordenadas de $vers\;\bar{h}$ são limitadas (por ser $\|\,vers\;\bar{h}\,\| = 1$) , conclui-se sem dificuldade que $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \alpha(\bar{h}) = 0$. Então, no caso particular de $f(\bar{x})$ ser de classe C^{m+1} no aberto A , podemos obter, a partir da última versão da fórmula de Taylor com resto de Lagrange,

$$\begin{aligned} f(\bar{a} + \bar{h}) = {} & f(\bar{a}) + \rho\,.\left[d f\right]_{vers\,\bar{h}}(\bar{a}) + \frac{\rho^2}{2!} \cdot \left[d^2 f\right]_{vers\,\bar{h}}(\bar{a}) + \cdots + \\ & + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left[d^m f\right]_{vers\,\bar{h}}(\bar{a}) + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} \cdot \left\{ \left[d^{m+1} f\right]_{vers\,\bar{h}}(\bar{a}) + \alpha(\bar{h}) \right\} \,, \end{aligned}$$

com $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \alpha(\bar{h}) = 0$. Esta variante é a fórmula de Taylor com *resto de Peano* e vai ser utilizada na aplicação que vamos estudar no ponto seguinte.

3. <u>Aplicação à determinação dos extremantes interiores</u>

Seja $f(\bar{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ em $\mathbf{R}$. Um ponto $\bar{a} \in A$ diz-se *maximizante relativo* de $f(\bar{x})$ se e só se existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que,

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \;\Rightarrow\; f(\bar{x}) \leq f(\bar{a}) \;;$$

diz-se *minimizante relativo* se e só se existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que,

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap A \;\Rightarrow\; f(\bar{x}) \geq f(\bar{a}) \;.$$

Os correspondentes valores $f(\bar{a})$ dizem-se então, respectivamente, *máximo relativo* e *mínimo relativo* da função.

Genericamente, os máximos e mínimos relativos designam-se por *extremos relativos* ; os maximizantes e minimizantes relativos designam-se por *extremantes relativos*.

Aos extremantes relativos contrapõem-se os extremantes absolutos : caso exista um $\bar{a} \in A$ tal que, $\bar{x} \in A \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, diz-se que $\bar{a}$ é um *maximizante absoluto* e $f(\bar{a})$ é o *máximo absoluto* ; caso exista um $\bar{a} \in A$ tal que, $\bar{x} \in A \Rightarrow f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, diz-se que $\bar{a}$ é um *minimizante absoluto* e $f(\bar{a})$ é o *mínimo absoluto* . Note-se que o máximo e mínimo absolutos de uma função $f(\bar{x})$ em A se existem são únicos, mas podem eventualmente ser atingidos em mais que um ponto $\bar{a} \in A$.

No que se segue estudaremos condições necessárias e suficientes para que um ponto $\bar{a} \in INT.\ A$ seja extremante (maximizante ou minimizante) relativo de $f(\bar{x})$, no pressuposto de continuidade em *INT. A* da função e das suas derivadas parciais até certa ordem conveniente.

A determinação de eventuais extremantes fronteiros relativos não pode fazer-se pelos métodos que vão ser estudados.

Por outro lado, as técnicas a desenvolver no presente capítulo permitem apenas a determinação dos extremantes relativos. Só em casos muito especiais será viável determinar com tais técnicas os extremantes absolutos, como por exemplo nos casos em que pelo estudo directo da função ou pela natureza do problema sabemos à priori que aqueles existem ; nestes casos, os extremantes absolutos poderão ser determinados por comparação dos valores da função nos diversos extremantes relativos, dado que é óbvio que qualquer extremante absoluto é igualmente um extremante relativo.

Tendo em conta facilitar a exposição, note-se que as condições definidoras dos conceitos de maximizante e minimizante relativos interiores podem ser apresentadas do modo seguinte:

a) O ponto $\bar{a} \in INT.\ A$ é maximizante relativo de $f(\bar{x})$ se e só se existe um valor $\varepsilon > 0$ tal que , $\|\bar{h}\| < \varepsilon \Rightarrow f(\bar{a} + \bar{h}) \leq f(\bar{a})$;

b) O ponto $\bar{a} \in INT.\ A$ é minimizante relativo de $f(\bar{x})$ se e só se existe um valor $\varepsilon > 0$ tal que , $\|\bar{h}\| < \varepsilon \Rightarrow f(\bar{a} + \bar{h}) \geq f(\bar{a})$.

O teorema seguinte dá uma condição necessária para que um ponto $\bar{a} \in INT.\ A$ seja extremante relativo de $f(\bar{x})$.

Teorema 1 : *Sendo* $\bar{a} \in INT.\ A$ *extremante relativo de* $f(\bar{x})$ *e existindo as derivadas parciais* $f'_{x_i}(\bar{a})$, *tem-se* $f'_{x_i}(\bar{a}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Demonstração : Admita-se para fixar ideias que $\overline{a} \in INT.\ A$ é minimizante relativo. Existe então um $\varepsilon > 0$ tal que , $\| \overline{h} \| < \varepsilon \Rightarrow f(\overline{a} + \overline{h}) \geq f(\overline{a})$. Tomando em particular $\overline{h} = (h_1 , 0 , ... , 0)$, com $0 < h_1 < \varepsilon$, tem-se,

$$f(a_1 + h_1 , a_2 , ... , a_n) \geq f(a_1 , a_2 , ... , a_n) ,$$

ou seja,

$$f'_{x_1}(\overline{a}) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{h_1} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0^+} \frac{f(a_1 + h_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{h_1} \geq 0 .$$

Por outro lado, tomando em particular $\overline{h} = (- h_1 , 0 , ... , 0)$, com $0 < h_1 < \varepsilon$, tem-se,

$$f(a_1 - h_1 , a_2 , ... , a_n) \geq f(a_1 , a_2 , ... , a_n) ,$$

donde resulta,

$$\frac{f(a_1 - h_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{-h_1} \leq 0 ,$$

ou ainda,

$$\frac{f(a_1 + k_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{k_1} \leq 0 ,$$

com $k_1 = -h_1$ $(-\varepsilon < k_1 < 0)$. Obtém-se então,

$$f'_{x_1}(\overline{a}) = \lim_{k_1 \to 0} \frac{f(a_1 + k_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{k_1} =$$

$$= \lim_{h_1 \to 0^-} \frac{f(a_1 + k_1 , a_2 , \cdots , a_n) - f(a_1 , a_2 , \cdots , a_n)}{k_1} \leq 0 .$$

Mas de $f'_{x_1}(\overline{a}) \geq 0$ e $f'_{x_1}(\overline{a}) \leq 0$ resulta necessariamente, $f'_{x_1}(\overline{a}) = 0$.

Para as restantes derivadas parciais, seguindo caminho análogo, obter-se-ia,

$$f'_{x_2}(\overline{a}) = \ldots = f'_{x_n}(\overline{a}) = 0 .$$

O caso em que $\overline{a} \in INT.\ A$ é maximizante tem demonstração semelhante.

O teorema precedente fornece um método para determinação dos possíveis extremantes interiores de $f(\overline{x})$, no pressuposto de existirem as primeiras derivadas parciais da função em todos os pontos do interior do respectivo domínio. Basta resolver o sistema,

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f'_{x_2}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f'_{x_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} ,$$

nas n incógnitas $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$, sendo cada solução obtida um possível extremante da função. Cada uma das soluções do sistema é aquilo a que usualmente se chama um *ponto de estacionaridade* da função.

Veremos seguidamente como, recorrendo ao cálculo das diferenciais de ordem superior e com auxílio da fórmula de Taylor, podemos averiguar se um dado ponto de estacionaridade é ou não extremante.

Em tudo o que vai seguir-se vamos admitir que a função é de classe C^r no interior do respectivo domínio, com r não inferior à maior das ordens das diferenciais sucessivas envolvidas nos cálculos.

Seja $\bar{a}$ um ponto de estacionaridade da função, isto é, um ponto interior do respectivo domínio onde se anulam as n primeiras derivadas parciais. Caso exista, seja m a ordem da primeira das diferenciais sucessivas em $\bar{x} = \bar{a}$ que não se anula para todos os vectores $\bar{h}$ (claro que $m \geq 2$, em virtude de serem nulas as primeiras derivadas parciais em $\bar{x} = \bar{a}$). Então a (m-1)-*ésima* fórmula de Taylor, com origem no ponto $\bar{a}$ e resto de Peano, assume a forma,

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left\{ \left[d^m f \right]_{vers\, \bar{h}} (\bar{a}) + \alpha(\bar{h}) \right\} ,$$

com $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \alpha(\bar{h}) = 0$.

Vão considerar-se separadamente os seguintes casos:

<u>1º CASO</u> : A diferencial de ordem m da função no ponto $\bar{a}$ é positiva para certo $\bar{h} = \bar{u}$ e negativa para certo $\bar{h} = \bar{v}$.

Neste caso vê-se com facilidade que $\bar{a}$ não pode ser extremante . Com efeito, tomando $\beta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\bar{a} + \beta.\bar{u}$ e $\bar{a} + \beta.\bar{v}$ pertençam ambos ao domínio da função $f(\bar{x})$ – o que sempre se consegue por ser $\bar{a}$ ponto interior de tal domínio – , tem-se,

$$(1) \qquad f(\bar{a} + \beta.\bar{u}) = f(\bar{a}) + \frac{\rho_1^m}{m!} \cdot \left\{ \left[d^m f \right]_{vers\, \bar{u}} (\bar{a}) + \alpha(\beta.\bar{u}) \right\}$$

$$(2) \qquad f(\bar{a} + \beta.\bar{v}) = f(\bar{a}) + \frac{\rho_2^m}{m!} \cdot \left\{ \left[d^m f \right]_{vers\, \bar{v}} (\bar{a}) + \alpha(\beta.\bar{v}) \right\}$$

uma vez que $vers\,(\beta.\overline{u}) = vers\ \overline{u}$ e $vers\,(\beta.\overline{v}) = vers\ \overline{v}$. Dado que,

$$\left[d^m f\right]_{\overline{u}}(\overline{a}) > 0 \ \Rightarrow\ \left[d^m f\right]_{vers\,\overline{u}}(\overline{a}) > 0$$

$$\left[d^m f\right]_{\overline{v}}(\overline{a}) < 0 \ \Rightarrow\ \left[d^m f\right]_{vers\,\overline{u}}(\overline{a}) < 0$$

$$\lim_{\beta \to 0^+} \alpha\,(\beta.\overline{u}) = \lim_{\beta \to 0^+} \alpha\,(\beta.\overline{v}) = 0\ ,$$

conclui-se, a partir das igualdades (1) e (2) supra, com $\beta \in \left]\,0\,,\delta\,\right[$ e δ suficientemente pequeno, que :

$$f(\overline{a} + \beta.\overline{u}) > f(\overline{a}) \quad \text{e} \quad f(\overline{a} + \beta.\overline{v}) < f(\overline{a})\ ,$$

desigualdades que em conjunto não permitem que $\overline{a}$ seja minimizante ou maximizante.

Este caso, ocorre sempre que m seja ímpar, porque se for $\left[d^m f\right]_{\overline{u}}(\overline{a}) \neq 0$, tem-se $\left[d^m f\right]_{\overline{h}}(\overline{a})$ a assumir sinais contrários com $\overline{h} = \overline{u}$ e $\overline{h} = \overline{v} = -\overline{u}$, uma vez que:

$$\left[d^m f\right]_{(-\overline{u})}(\overline{a}) = (-1)^m \,.\, \left[d^m f\right]_{\overline{u}}(\overline{a}) = -\left[d^m f\right]_{\overline{u}}(\overline{a})\ .$$

Mas pode também suceder com m par , bastando par tal que seja indefinida a forma de grau m ,

$$\left[d^m f\right]_{\overline{h}}(\overline{a}) = \sum_{i_m=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \left[\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right]_{(\overline{a})} \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_m}\ .$$

<u>2º CASO</u> : A diferencial de ordem m da função no ponto $\overline{a}$ tem o mesmo sinal para todos os $\overline{h} \neq \overline{0}$ (para tal é necessário, mas não suficiente, que m seja par).

Neste caso há os dois seguintes subcasos a considerar:

<u>1º Subcaso</u> : A diferencial de ordem m no ponto é positiva segundo todos os vectores não nulos, ou seja, a referida diferencial é uma forma definida positiva de grau m

Tem-se, para $\overline{h} \neq \overline{0}$, $\left[d^m f\right]_{\overline{h}}(\overline{a}) > 0$ e, portanto, também,

$$\left[d^m f\right]_{vers\,\overline{h}}(\overline{a}) = \sum_{i_m=1}^{n} \cdots \sum_{i_1=1}^{n} \left[\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}\right]_{(\overline{a})} \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_m} > 0\ ,$$

em que as coordenadas ξ_j de *vers* $\bar{h}$ verificam a relação $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$. Considerada como função das coordenadas ξ_j a diferencial em causa é uma função contínua no conjunto limitado e fechado,

$$F = \{ (\xi_1 , \xi_2 , \dots , \xi_n) : \quad \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1 \} \ ,$$

admitindo portanto nesse conjunto um mínimo $\mu > 0$. Temos então,

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left\{ \left[d^m f \right]_{vers\, \bar{h}} (\bar{a}) + \alpha(\bar{h}) \right\} >$$

$$> f(\bar{a}) + \frac{\rho^m}{m!} \cdot \left\{ \mu + \alpha(\bar{h}) \right\},$$

com $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \alpha(\bar{h}) = 0$ e, portanto, desde que $\| \bar{h} \| < \varepsilon$ (com certo $\varepsilon > 0$), tem-se $f(\bar{a} + \bar{h}) > f(\bar{a})$. Conclui-se assim que o ponto $\bar{a}$ é minimizante e trata-se evidentemente de um minimizante em sentido estricto.

<u>2º Subcaso</u> : **A diferencial de ordem *m* no ponto é negativa segundo todos os vectores não nulos, ou seja, a referida diferencial é uma forma definida negativa de grau *m***

Seguindo caminho semelhante ao do subcaso anterior (mas tomando agora o máximo - negativo - da diferencial) , conclui-se que, com $\| \bar{h} \| < \varepsilon$, $f(\bar{a} + \bar{h}) < f(\bar{a})$, ou seja, o ponto $\bar{a}$ é maximizante em sentido estricto.

<u>3º CASO</u> : **A diferencial de ordem *m* da função no ponto $\bar{a}$ é uma forma de grau *m* semidefinida (para tal é necessário, mas não suficiente, que *m* seja par)**

Neste caso há os dois seguintes subcasos a considerar:

<u>3º Subcaso</u> : **A diferencial de ordem *m* no ponto é positiva ou nula segundo todos os vectores, existindo porém vectores não nulos que a anulam (ou seja, a referida diferencial é uma forma semidefinida positiva de grau *m*).**

Os vectores $\bar{s}$ não nulos que anulam a diferencial de ordem m chamam-se *vectores singulares* .

Seja $\bar{h} = \bar{u}$ um vector que torna positiva a diferencial em causa (há pelo menos um vector nessas condições porque por hipótese a diferencial de ordem m não é identicamente nula) ; raciocinando como no 1º CASO conclui-se que , com $\beta \in]\, 0 \, , \delta \,[$ e δ positivo suficientemente pequeno, $f(\bar{a} + \beta.\bar{u}) > f(\bar{a})$, ou seja , se o ponto $\bar{a}$ for extremante, só pode ser minimizante.

Considere-se agora um vector singular $\overline{s}$ e seja $m + k$ a ordem da primeira das diferenciais de ordem superior a m que não se anula para $\overline{h} = \overline{s}$ (note--se que a ordem $m + k$ poderá depender do vector singular considerado). Tem-se então, com $\beta > 0$ suficientemente pequeno de forma que $\overline{a} + \beta.\,\overline{s}$ pertença ao domínio da função $f(\overline{x})$,

$$f(\overline{a} + \beta.\,\overline{s}) = f(\overline{a}) + \frac{\rho^{m+k}}{(m+k)!} \cdot \left\{ \left[d^{m+k} f \right]_{vers\,\overline{s}} (\overline{a}) + \alpha(\beta.\overline{s}) \right\} .$$

Se for $\left[d^{m+k} f \right]_{\overline{s}} (\overline{a}) < 0$, também $\left[d^{m+k} f \right]_{vers\,\overline{s}} (\overline{a}) < 0$ e, raciocinando do mesmo modo que no primeiro caso, conclui-se que, com $\beta \in]0\ ,\ \delta[$ e δ suficientemente pequeno, $f(\overline{a} + \beta.\overline{s}) < f(\overline{a})$, ou seja , o ponto $\overline{a}$ não pode ser minimizante (única hipótese em aberto como se viu) ; logo, não pode ser extremante.

Observe-se que esta situação se verifica sempre que $m + k$ seja ímpar, porque então uma das diferenciais, $\left[d^{m+k} f \right]_{\overline{s}} (\overline{a})$ ou $\left[d^{m+k} f \right]_{-\overline{s}} (\overline{a})$ é negativa e se o vector $\overline{s}$ é singular o mesmo se passa com $-\overline{s}$; pode porém verificar-se mesmo que $m + k$ seja par .

Quando para todos os vectores singulares $\overline{s}$ seja $\left[d^{m+k} f \right]_{\overline{s}} (\overline{a}) > 0$, nada se pode concluir. Trata-se do chamado caso duvidoso cujo esclarecimento obriga normalmente ao estudo directo da função.

<u>**4º Subcaso**</u> : **A diferencial de ordem *m* no ponto é negativa ou nula segundo todos os vectores, existindo porém vectores não nulos que a anulam (ou seja, a referida diferencial é uma forma semidefinida negativa de grau *m*).**

Procedendo como no subcaso anterior, conclui-se sem dificuldade que:

- Se, para certo vector singular $\overline{s}$, a ordem $m + k$ da primeira das diferenciais de ordem superior a m que não se anula para $\overline{h} = \overline{s}$ for ímpar, então o ponto $\overline{a}$ não pode ser extremante ;

- O mesmo acontece quando $m + k$ seja par e a diferencial em causa seja positiva para $\overline{h} = \overline{s}$;

- Quando para todos os vectores singulares $\overline{s}$ se tenha $\left[d^{m+k} f \right]_{\overline{s}} (\overline{a}) < 0$, nada se pode concluir , tratando-se de novo de um caso duvidoso.

Repare-se que para as funções $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (ou seja, funções reais de uma variável real), tem-se,

$$\left[d^m f \right]_h (\overline{a}) = f^{(m)}(a)\,.\,h^m \ , \text{ com } f^{(m)}(a) \neq 0 \,,$$

e então:

- O 1ºCASO só pode ocorrer quando m seja ímpar ;
- O 3ºCASO não pode ocorrer, pois com $f^{(m)}(a) \neq 0$, $\left[d^m f\right]_h(\overline{a})$ não pode anular-se com $h \neq 0$;

Para terminar vamos apresentar alguns exemplos de aplicação dos resultados obtidos na discussão precedente.

1) Para determinar os extremantes de,

$$f(x\,,y\,,z) = x\,y\,z \,-\, \frac{1}{2}\cdot x^2 \,-\, 2\,y^2 \,+\, 2\,z \ ,$$

a resolução do sistema,

$$\begin{cases} f_x^{'} = y\,z - x = 0 \\ f_y^{'} = x\,z - 4\,y = 0 \\ f_z^{'} = x\,y + 2 = 0 \end{cases} ,$$

permite obter dois pontos de estacionaridade: $x = 2$, $y = \text{-}1$, $z = \text{-}2$; $x = \text{-}2$, $y = 1$, $z = \text{-}2$. Ora a segunda diferencial da função, num ponto genérico $(x\,,y\,,z)$ é a forma quadrática,

$$\begin{aligned} \left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(x,y,z) &= f_{x^2}^{''}\cdot h_1^2 + f_{xy}^{''}\cdot h_1\,h_2 + f_{xz}^{''}\cdot h_1\,h_3 + f_{yx}^{''}\cdot h_2\,h_1 + f_{y^2}^{''}\cdot h_2^2 \,+ \\ &= f_{yz}^{''}\cdot h_2\,h_3 + f_{zx}^{''}\cdot h_3\,h_1 + f_{zy}^{''}\cdot h_3\,h_2 + f_{z^2}^{''}\cdot h_3^2 = \\ &= -\,h_1^2 + z\,.\,h_1\,h_2 + y.\,h_1\,h_3 + z\,.\,h_2\,h_1 - 4\,h_2^2 + x\,.\,h_2\,h_3 + y\,.h_3\,h_1 + x\,.h_3\,h_2 \ , \end{aligned}$$

cuja matriz (*matriz Hesseana*) é,

$$H = \begin{bmatrix} -1 & z & y \\ z & -4 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix} .$$

Para o primeiro ponto de estacionaridade, tem-se,

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} ,$$

concluindo-se sem dificuldade que a segunda diferencial é, no ponto em causa, uma forma quadrática indefinida. Logo, o ponto de estacionaridade em causa não é extremante.

Uma análise semelhante feita para o segundo ponto de estacionaridade leva igualmente à conclusão de que não se trata de um extremante.

2) Para determinar os extremantes de,

$$f(x, y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4 ,$$

a resolução do sistema,

$$\begin{cases} f'_x = 2(x - y) - 4x^3 = 0 \\ f'_y = -2(x - y) - 4y^3 = 0 \end{cases} ,$$

permite obter três pontos de estacionaridade :

$$x = 1 ,\ y = -1 \ ; \quad x = -1 ,\ y = 1 \ ; \quad x = 0 ,\ y = 0 .$$

A segunda diferencial de $f(x, y)$ num ponto genérico é uma forma quadrática (nos acréscimos h e k das variáveis x e y) cuja matriz (*matriz Hesseana*) é,

$$H = \begin{bmatrix} 2 - 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 - 12y^2 \end{bmatrix} .$$

Para o primeiro e segundo pontos de estacionaridade tem-se,

$$H = \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} ,$$

e conclui-se sem dificuldade que a segunda diferencial é uma forma quadrática negativa. Portanto, qualquer dos dois pontos de estacionaridade em causa é um maximizante.

Para o terceiro ponto de estacionaridade tem-se,

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} ,$$

sendo portanto semidefinida positiva a segunda diferencial. Para determinar os vectores singulares , escreva-se a expressão da segunda diferencial no ponto de coordenadas $x = y = 0$:

$$d^2 f = 2h^2 - 4hk + 2k^2 = 2(h - k)^2 ;$$

esta expressão permite concluir que os vectores singulares são os vectores da forma $\bar{s} = (h , h)$ com $h \neq 0$. A expressão da terceira diferencial num ponto genérico é,

$$d^3 f = -24\,x\,h^3 - 24\,y\,k^3 ,$$

concluindo-se portanto que no ponto $(0 , 0)$ é nula segundo qualquer vector singular . Passando então à quarta diferencial, tem-se, num ponto genérico,

$$d^4 f = -24\,h^4 - 24\,k^4 ,$$

pelo que , no ponto $(0 , 0)$ e para um vector singular genérico $\bar{s} = (h , h)$ tem-se $d^4 f = -48\,h^4 < 0$, assim se concluindo que o ponto em análise não é extremante.

3) Para determinar os extremantes de,

$$f(x , y) = x^2 - 3\,x\,y^2 + 2\,y^4 ,$$

a resolução do sistema,

$$\begin{cases} f_x' = 2x - 3y^2 = 0 \\ f_y' = -6xy + 8y^3 = 0 \end{cases} ,$$

permite obter como único ponto de estacionaridade o ponto de coordenadas $x = y = 0$. Nesse ponto e segundo um vector genérico (h , k) , a segunda diferencial é $d^2 f = 2\,h^2$, forma quadrática semidefinida positiva que se anula para os vectores singulares $\bar{s} = (0 , k)$. Segundo qualquer destes vectores singulares, a terceira diferencial na origem é nula e a quarta diferencial é $d^4 f = 48\,k^4$, ou seja, é uma forma de grau 4 positiva para qualquer dos mencionados vectores singulares. Estamos portanto no caso duvidoso e só uma análise directa da função poderá esclarecer a questão.

Notando que,

$$f(x , y) = x^2 - 3\,x\,y^2 + 2\,y^4 = x^2 - 2\,x\,y^2 + y^4 + y^4 - x\,y^2 =$$

$$= (x - y^2)^2 + y^2 \,.\, (y^2 - x) = (x - y^2) \,.\, (x - 2\,y^2) ,$$

conclui-se que em qualquer vizinhança da origem a função assume sinais contrários, pois é positiva para $x > 2\,y^2 > y^2$ e negativa para $2\,y^2 > x > y^2$. Como $f(0 , 0) = 0$, conclui-se que a origem não pode ser minimizante nem maximizante: caso fosse minimizante, deveria ter-se $f(x\ ,\ y) \geq 0$ em certa vizinhança da origem; caso fosse maximizante, deveria ter-se $f(x\ ,\ y) \leq 0$ em certa vizinhança da origem.

Termina-se apresentando um diagrama que resume a técnica a aplicar na determinação dos extremantes interiores. Sendo,

$$\boxed{(a)\quad \begin{cases} f'_{x_1}(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) \ =\ 0 \\ \cdots \\ f'_{x_n}(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n) \ =\ 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{(b)\quad \left[d^r f\right]_{\bar{h}}(\bar{x}) \ =\ \sum_{i_r=1}^{n} \cdots \sum_{i_2=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^r f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_r}} \cdot h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_r}}$$

veja-se o diagrama da página seguinte .

Resolver o sistema (a) para determinar os pontos de estacionaridade interiores do domínio da função

Para cada ponto $\overline{a}$ de estacionaridade determinar a primeira das diferenciais sucessivas (b) que não é identicamente nula

Não existe, são todas nulas:
- Caso Duvidoso

Existe e tem ordem $\underline{m}$ par

Existe e tem ordem m ímpar :
- O ponto $\overline{a}$ não é extremante

Esta diferencial é definida positiva:
- O ponto $\overline{a}$ é mini - mizante

Esta diferencial é semidefinida

Esta diferencial é definida negativa:
- O ponto $\overline{a}$ é maxi- mizante

É semidefinida positiva: determinam-se os vectores não nulos que a anulam (vectores singulares)

É semidefinida negativa: determinam-se os vectores não nulos que a anulam (vectores singulares)

Para certo vector singular $\overline{s}$ a primeira diferencial sucessiva de ordem superior a $\underline{m}$ que não se anula tem ordem ímpar:
- O ponto $\overline{a}$ não é extremante

Para certo vector singular $\overline{s}$ a primeira diferencial sucessiva de ordem superior a $\underline{m}$ que não se anula tem ordem par e é negativa:
- O ponto $\overline{a}$ não é extremante

Para certo vector singular $\overline{s}$ a primeira diferencial sucessiva de ordem superior a $\underline{m}$ que não se anula tem ordem par e é positiva:
- O ponto $\overline{a}$ não é extremante

Para todos os vectores singulares $\overline{s}$ a primeira diferencial sucessiva de ordem superior a $\underline{m}$ que não se anula tem ordem par e é positiva:
- Caso Duvidoso

Para todos os vectores singulares $\overline{s}$ a primeira diferencial sucessiva de ordem superior a $\underline{m}$ que não se anula tem ordem par e é negativa:
- Caso Duvidoso

Para todos os vectores singulares $\overline{s}$ as sucessivas diferenciais de ordem superior a $\underline{m}$ são todas identicamente nulas:
- Caso Duvidoso

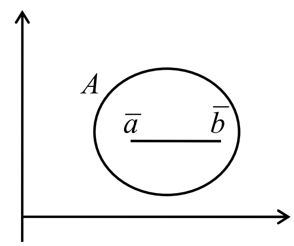
4. Estudo da convexidade e concavidade

Como se sabe, o conjunto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ diz-se *convexo* (ou *conexo por segmentos*) se e só se quaisquer que sejam os pontos $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$, o conjunto,

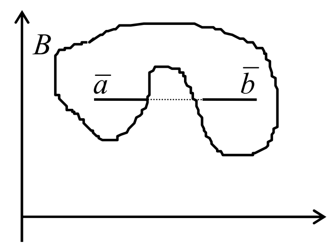
$$S(\bar{a}\,,\,\bar{b}\,) = \{\,\bar{x}\ :\ \bar{x} = \lambda\,.\,\bar{a} + \mu\,.\,\bar{b}\ ,\ \ \lambda \geq 0\ ,\ \ \mu \geq 0\ ,\ \ \lambda + \mu = 1\,\},$$

está contido em A , ou seja, se e só se o segmento de extremidades nos pontos $\bar{a}$ e $\bar{b}$ estiver contido no conjunto A .

As figuras seguintes exemplificam um conjunto convexo e um conjunto não convexo em $\mathbf{R}^2$:



A é convexo



B não é convexo

Sendo $A \subseteq \mathbf{R}^n$ convexo , a função $f(\bar{x})$ de A em $\mathbf{R}$ diz-se *convexa* no convexo A se e só se quaisquer que sejam $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$,

$$\lambda \geq 0\ ,\ \mu \geq 0\ \text{ e }\ \lambda + \mu = 1\ \Rightarrow f(\lambda\,\bar{a} + \mu\,\bar{b}\,) \leq \lambda\,.f(\bar{a}\,) + \mu\,.f(\bar{b}\,)\ ;$$

diz-se *côncava* se e só se,

$$\lambda \geq 0\ ,\ \mu \geq 0\ \text{ e }\ \lambda + \mu = 1\ \Rightarrow f(\lambda\,\bar{a} + \mu\,\bar{b}\,) \geq \lambda\,.f(\bar{a}\,) + \mu\,.f(\bar{b}\,)\ .$$

O teorema seguinte dá uma primeira condição necessária e suficiente de convexidade (concavidade):

Teorema 2 : *A condição necessária e suficiente para a função $f(\bar{x})$ seja convexa* (*côncava*) *no conjunto convexo $A \subseteq \mathbf{R}^n$ é que, quaisquer que sejam $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$, a função real de variável real $g(\lambda) = f[\lambda\,\bar{a} + (1\text{-}\,\lambda)\bar{b}\,]$ seja convexa* (*côncava*) *no intervalo* $[0\,,\,1]$

<u>Demonstração</u> : A condição é necessária. Admitindo $f(\bar{x})$ convexa no convexo A , considere-se a função $g(\lambda) = f[\lambda\,\bar{a} + (1\text{-}\,\lambda)\bar{b}\,]$. Dados os reais $\lambda\,,\mu \in [0\,,\,1]$, sejam $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Tem-se então,

$$g\,(\alpha\lambda + \beta\mu) = f\,[\,(\alpha\lambda + \beta\mu)\,.\,\bar{a} + (1 - \alpha\lambda - \beta\mu)\,.\,\bar{b}\,] =$$

$$= f\,[\,(\alpha\lambda + \beta\mu)\,.\,\bar{a} + (\alpha + \beta - \alpha\lambda - \beta\mu)\,.\,\bar{b}\,] =$$

$$= f\,[\,\alpha\,.\,(\lambda\,\bar{a} + \bar{b} - \lambda\,\bar{b}\,) + \beta\,.\,(\mu\,\bar{a} + \bar{b} - \mu\,\bar{b}\,)] =$$

$$= f\,\{\alpha\,.\,[\,\lambda\,\bar{a} + (1 - \lambda)\bar{b}\,] + \beta\,.\,[\,\mu\,\bar{a} + (1 - \mu)\bar{b}\,]\,\}\,,$$

e como, por ser convexo o conjunto A,

$$\bar{a}\,,\,\bar{b} \in A \;\Rightarrow\; \lambda\,\bar{a} + (1 - \lambda)\bar{b} \in A \;\wedge\; \mu\,\bar{a} + (1 - \mu)\bar{b} \in A\,,$$

tira-se, pela convexidade de $f\,(\bar{x}\,)$,

$$g\,(\alpha\lambda + \beta\mu) \leq \alpha\,.\,f\,[\,\lambda\,\bar{a} + (1 - \lambda)\bar{b}\,] + \beta\,.\,f\,[\,\mu\,\bar{a} + (1 - \mu)\bar{b}\,] =$$

$$= \alpha\,.\;g\,(\lambda) + \beta\,.\;g\,(\mu)\,,$$

assim se provando a convexidade da função $g\,(\lambda)$ no intervalo $[0\,,\,1]$.

Vejamos agora que a condição é suficiente. Se, dados quaisquer $\bar{a}\,,\,\bar{b} \in A$, a função $g\,(\lambda\,) = f\,[\,\lambda\,\bar{a} + (1 - \lambda)\bar{b}\,]$ é convexa no intervalo $[0\,,\,1]$, tem-se, com $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$,

$$f(\lambda\,\bar{a} + \mu\,\bar{b}\,) = f\,[\,\lambda\,\bar{a} + (1 - \lambda)\bar{b}\,] = g\,(\lambda\,) = g\,(\lambda\,.\,1 + \mu\,.\,0\,) \leq$$

$$\leq \lambda\,.\,g(1) + \mu\,.\,g(0) = \lambda\,.\,f\,(\bar{a}\,) + \mu\,.\,f\,(\bar{b}\,)\,,$$

assim se provando que $f\,(\bar{x}\,)$ é convexa em A .

Trocando na argumentação precedente o sentido das desigualdades, o teorema fica provado para o caso da concavidade.

O teorema que acaba de demonstrar-se permite deduzir nova condição necessária e suficiente de convexidade (concavidade), aplicável no caso em que $f\,(\bar{x}\,)$ seja de classe $C^{\,2}$ num convexo aberto A .

Teorema 3 : *Sendo $f\,(\bar{x}\,)$ de classe $C^{\,2}$ num convexo aberto A , a condição necessária e suficiente para que a função seja convexa (côncava) em A é que , qualquer que seja $\bar{x} \in A$, a segunda diferencial,*

$$\left[\,d^2 f\,\right]_{\bar{h}}(\bar{x}\,) = \sum_{j=1}^{n}\,\sum_{i=1}^{n}\, f^{\,"}_{x_i\,x_j}(\bar{x}\,)\,.\,h_i\,h_j\;\;,$$

seja uma forma quadrática definida ou semidefinida positiva (negativa)

Demonstração : A condição é necessária. Admitindo que $f(\bar{x})$ é convexa no convexo aberto A, considere-se um qualquer $\bar{x} \in A$ e uma vizinhança $V_{\varepsilon}(\bar{x})$ contida em A. Então, tomando um qualquer vector $\bar{h}$ de norma inferior a ε, tem-se $\bar{x}+\bar{h} \in A$. Definindo,

$$g(\lambda) = f[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)(\bar{x}+\bar{h})] = f[\bar{x} + (1-\lambda)\bar{h}] \ ,$$

o teorema 2 afirma que a função real de variável real $g(\lambda)$ deverá ser convexa no intervalo $[0\,,\,1]$, ou seja,

$$g''(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}\left[\bar{x} + (1-\lambda)\,.\,\bar{h}\right].\,h_i\,h_j \;\geq\; 0\,,$$

nesse intervalo: com efeito, se para algum valor λ_0 do intervalo pudesse ser $g''(\lambda_0) <$ 0, então devido à continuidade de $g''(\lambda)$ resultante do facto de $f(\bar{x})$ ser de classe C^2 no aberto A, teríamos que $g''(\lambda) < 0$ em algum subintervalo de $[0\,,\,1]$ e $g(\lambda)$ seria então côncava (estritamente) nesse subintervalo, não podendo portanto ser convexa no intervalo total . De $g''(1) \geq 0$ resulta então,

$$\left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\bar{x})\,.\,h_i\,h_j \geq 0 \ ,$$

para qualquer $\bar{h}$ tal que $\|\bar{h}\| < \varepsilon$. Daqui resulta que a forma quadrática $\left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(\bar{x})$ deverá ser não negativa para todos os vectores $\bar{h} \in \mathbf{R}^n$; com efeito, a partir de qualquer $\bar{h} \in \mathbf{R}^n$ pode definir-se $\bar{k} = \alpha\,\bar{h}$ com α suficientemente pequeno de modo que $\|\bar{k}\| < \varepsilon$ e , por ser

$$0 \leq \left[d^2 f\right]_{\bar{k}}(\bar{x}) = \alpha^2\,.\left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(\bar{x})\,,$$

conclui-se que também $\left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(\bar{x}) \geq 0$.

A condição é suficiente. Admitindo que,

$$\left[d^2 f\right]_{\bar{h}}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\bar{x})\,.\,h_i\,h_j \ ,$$

é, para cada $\bar{x} \in A$, uma forma quadrática definida ou semidefinida positiva, sejam quaisquer $\bar{a}\,,\,\bar{b} \in A$ e tome-se a função $g(\lambda) = f[\lambda\,\bar{a} + (1-\lambda)\bar{b}]$; então,

$$g''(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f''_{x_i x_j}\left[\lambda\,.\,\bar{a} + (1-\lambda)\,.\,\bar{b}\right].\,(a_i - b_i)(a_j - b_j) \;\geq\; 0\,,$$

ou seja, $g(\lambda)$ é convexa no intervalo $[0\,,\,1]$; o teorema 2 garante então a convexidade de $f(\bar{x})$ no aberto convexo A .

O teorema demonstra-se da mesma forma (recorrendo ao teorema 2) para o caso da concavidade.

O teorema anterior permite ainda estudar a convexidade ou concavidade de $f(\bar{x})$ num convexo A^* que seja o fecho ou aderência de um certo aberto convexo A no qual se verificam as hipóteses do teorema, desde que a função seja contínua em A^* . Deixa-se a demonstração ao cuidado do leitor, sugerindo-se para o efeito que:

a) Prove em primeiro lugar que o fecho ou aderência de um conjunto convexo é ainda um conjunto convexo;

b) Prove depois que a convexidade (concavidade) de $f(\bar{x})$ em A em conjunto com a continuidade da função na aderência ou fecho de A implica a convexidade (concavidade) da mesma função em $Ad\,A$.

5 . Exercícios

1 - Escreva a primeira fórmula de Taylor com resto de Lagrange para $f(x\,,y) = x \,.\, \sqrt{y}$, com origem no ponto (1 , 1).

2 - O mesmo que no exercício anterior, mas para a função, $f(x\,,y) = \dfrac{y}{y+x}$, com origem no ponto (1 , 0) .

3 - Considerando a função $f(x\,,y) = sen\,(x+y)$,

a) Determine uma expressão geral para,

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^\alpha\, \partial y^{m-\alpha}} \quad (\; m = 1\,,2\,,3\,,... \;\;;\;\; \alpha = 0\,,1\,,2\,,...\,,m) \;,$$

num ponto genérico $(x\,,y)$. Qual a derivada que está em causa, quando seja $\alpha = 0$ ou $\alpha = m$?

b) Escreva a expressão geral de $f_{\overline{u}}^{(m)}(x,y)$, com $\overline{u} = (h\,,k)$;

c) Escreva a *m-ésima* fórmula de Taylor (resto de Lagrange) para a função $f(x\,,y)$, com origem no ponto (0 , 0) , tomando como acréscimos das variáveis $h = x$ e $k = y$.

4 - Considere a função $f(x\,,y)$ definida pela seguinte série,

$$f(x\,,y) = 1 + (x-y) + (x-y)^2 + ... + (x-y)^{n-1} + ... \,.$$

a) Determine o respectivo domínio ;

b) Determine uma expressão geral para,

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^\alpha\, \partial y^{m-\alpha}} \quad (\; m = 1\,,2\,,3\,,... \;\;;\;\; \alpha = 0\,,1\,,2\,,...\,,m) \;,$$

no ponto (1 , 1) ;

c) Escreva a expressão geral de $f_{\overline{u}}^{(m)}(1\,,1)$, com $\overline{u} = (h\,,k)$;

d) Escreva a *m-ésima* fórmula de Taylor (resto de Lagrange) para a função $f(x\,,y)$, com origem no ponto (1 , 1) , tomando como acréscimos das variáveis $h = x - 1$ e $k = y - 1$.

5 - Determine os extremantes e correspondentes extremos para as funções:

a) $f(x\,,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$; **b)** $f(x\,,y) = (x^2+y^2)\,.\,e^{\,y}$;

c) $f(x\,,y) = x^2 - 3\,x\,y^2 + 2\,y^4$; **d)** $f(x\,,y\,,z) = x\,y\,z - x^2/2 - 2\,y^2 + 2\,z$.

6 - Estudar se o ponto de coordenadas $x = -1/4$, $y = 1/2$ e $z = 0$ é ou não extremante da função $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2x + y^4 + z^2$.

7 - Determinar os extremantes de,

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 - \alpha y^2 + x}{1 + z^2} \qquad (\alpha \neq 0),$$

fazendo a discussão em função de $\alpha \neq 0$.

8 - Determinar os extremantes das seguintes funções:

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3 + x_1 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$; **b)** $f(x, y) = y \,.\, log(1 + x)$;

c) $f(x, y, z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x$; **d)** $f(x, y) = e^{x(y+y^2)}$;

e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2 . (x^2 - y^2)$.

Nos casos c) e e) fazer a discussão em função dos parâmetros envolvidos.

9 - Determine os extremantes e os correspondentes extremos de,

$$f(x, y) = \sqrt{2x + 4y - x^2 - y^2} \;.$$

<u>SUGESTÃO</u> : Escreva o radicando sob a forma de uma constante menos uma soma de quadrados.

10 - Determine os extremantes e os correspondentes extremos de,

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3 - 3xy + x} \;.$$

11 - Estude a convexidade ou concavidade das seguintes funções nos conjuntos convexos que se indicam:

a) $f(x, y, z) = 1 - e^{x+y+z}$, em $\mathbf{R}^3$;

b) $f(x, y) = -\sqrt{x + y}$, em $A = \{(x, y) \,:\, x + y \geq 0\}$;

c) $f(x, y) = \sqrt{x.y}$, em $A = \{(x, y) \,:\, x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ e
em $B = \{(x, y) \,:\, x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$;

d) $f(x, y, z) = x^2 . y . z$, em $A = \{(x, y, z) \,:\, x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge z \geq 0\}$ e
em $B = \{(x, y, z) \,:\, x \leq 0 \wedge y \leq 0 \wedge z \geq 0\}$.

12 - Seja $f(\bar{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ e admita-se que A é convexo e $f(\bar{x})$ convexa em A. Prove sucessivamente que:

a) Sendo $\bar{a} \in A$ um minimizante relativo de $f(\bar{x})$, então esse ponto $\bar{a}$ é minimizante absoluto da função ;

b) O conjunto K dos minimizantes relativos (logo absolutos) de $f(\bar{x})$ é um conjunto convexo e a função é constante em K ;

c) Se $\bar{a} \in INT.\ A$ é maximizante relativo de $f(\bar{x})$, então a função é constante em certa $V_\varepsilon(\bar{a})$;

d) Se $f(\bar{x})$ tem máximo absoluto, este não pode ser atingido num ponto $\bar{a} \in INT.\ A$, excepto no caso trivial de a função ser constante em A.

13* - Seja $f(\bar{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}$ convexa em certa vizinhança $V_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$ e admita-se que se trata de uma função de classe C^2 em $V_\varepsilon(\bar{a})$. Prove que se as primeiras derivadas parciais da função se anulam no ponto $\bar{a}$, então este ponto é minimizante relativo da função.

Enuncie e demonstre uma proposição análoga para o caso em que $f(\bar{x})$ seja côncava em $V_\varepsilon(\bar{a})$.

<u>SUGESTÃO</u> : Utilize a fórmula de Taylor com resto de Lagrange.

<u>RESPOSTAS</u> :

1 - $(1+h)\,.\,\sqrt{1+k} \;=\; 1 + (h + \dfrac{k}{2}) + \dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{hk}{\sqrt{1+\theta k}} - \dfrac{k^2\,.\,(1+\theta h)}{4\,.\,(1+\theta k)\,.\,\sqrt{1+\theta k}}\right]$,

com $0 < \theta < 1$.

2 - $\dfrac{h}{1+h+k} = k - \dfrac{hk + k^2}{(1+\theta h+\theta k)^3}$, com $0 < \theta < 1$.

3 - a) $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^\alpha\, \partial y^{m-\alpha}} = sen\,(x + y + m\,.\pi/2)$; quando $\alpha = 0$, a derivada em causa é $\dfrac{\partial^m f}{\partial y^m}$; quando $\alpha = m$, a derivada em causa é $\dfrac{\partial^m f}{\partial x^m}$;

b) $f_{\bar{u}}^{(m)}(x,y) = (h+k)^m\,.\,sen\,(x + y + m\,.\,\pi/2)$;

c) $sen\,(x+y) = \displaystyle\sum_{\alpha=0}^{m} \frac{(x+y)^\alpha}{\alpha!}\cdot sen\,(\alpha\,.\,\pi/2) + \frac{(x+y)^{m+1}}{(m+1)!}\cdot sen\left[\theta\,.\,(x+y) + (m+1)\,.\,\pi/2\right]$, com $0 < \theta < 1$.

4 - a) Domínio = $\{(x\,,y)\ :\ x - 1 < y < x + 1\ ,\ x \in \mathbf{R}\}$;

b) $\dfrac{\partial^{m} f}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{m-\alpha}} = m!\,.(-1)^{m-\alpha}$, no ponto de coordenadas $x = y = 1$;

c) $f_{\bar{u}}^{(m)}(1,1) = m!\,(h - k)^{m}$;

d) $f(x\,,y) = 1 + (x - y) + (x - y)^2 + \cdots + (x - y)^m + \left[\dfrac{x - y}{1 - \theta\,(x - y)}\right]^{m+1}$,

com $0 < \theta < 1$.

5 - a) Os pontos de coordenadas $x = 1$, $y = -1$ e $x = -1$, $y = 1$ são maximizantes e o máximo correspondente é igual a 2 em ambos os casos ; o ponto de estacionaridade de coordenadas $x = y = 0$ não é extremante ;

b) O ponto de coordenadas $x = y = 0$ é minimizante , sendo 0 o correspondente mínimo; o ponto de estacionaridade de coordenadas $x = 0$, $y = -2$ não é extremante ;

c) O ponto de estacionaridade de coordenadas $x = y = 0$ não é extremante ;

d) Os pontos de estacionaridade de coordenadas $x = 2$, $y = -1$, $z = -2$ e $x = -2$, $y = 1$, $z = -2$ não são extremantes .

6 - É minimizante .

7 - Com $\alpha \neq 0$, o ponto de coordenadas $x = -1/2$, $y = z = 0$ é minimizante se for $\alpha < 0$ e não é extremante se for $\alpha > 0$.

8 - a) O ponto de coordenadas $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ é maximizante ;

b) O ponto de estacionaridade de coordenadas $x = y = 0$ não é extremante ;

c) O ponto de estacionaridade de coordenadas $x = y = 0$, $z = \beta$ não é extremante , qualquer que seja o valor do parâmetro β;

d) Os pontos de estacionaridade de coordenadas $x = y = 0$ e $x = 0$, $y = -1$ não são extremantes ;

e) Com $a \neq 0$, o ponto de estacionaridade de coordenadas $x = y = 0$ não é extremante e os pontos de coordenadas $x = \pm a$, $y = 0$ são minimizantes (ambos conduzindo ao mesmo mínimo) ; com $a = 0$, o ponto de coordenadas $x = y = 0$ é minimizante.

9 - O ponto de coordenadas $x = 1$, $y = 2$ é maximizante, sendo o correspondente máximo igual a $\sqrt{5}$; os pontos de coordenadas $x = a$, $y = 2 \pm \sqrt{4 + 2a - a^2}$, com a pertencente ao intervalo $[1 - \sqrt{5}\ ,\ 1 + \sqrt{5}]$ são minimizantes (fronteiros), todos eles conduzindo ao valor mínimo igual a 0 .

10 - O ponto de estacionaridade de coordenadas $x = 1/4$, $y = 1/2$ não é extremante; a função admite como minimizantes (fronteiros) os pontos de coordenadas $x = a$, $y = b$ tais que $a^2 + b^3 - 3\,a\,b + a = 0$ como é o caso, entre outros, dos pontos de coordenadas $x = y = 0$, $x = y = 1$ e $x = -1$, $y = 0$, todos eles conduzindo ao valor mínimo igual a 0 .

11 - a) Côncava ; **b)** Convexa ; **c)** Côncava em A e em B ; **d)** Não convexa nem côncava em qualquer dos conjuntos dados .

CAPÍTULO IX

FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE INVERTIBILIDADE

1. Introdução

Considere-se o seguinte sistema de n equações (lineares ou não) nas $m + n$ incógnitas $x_1 , x_2 , \dots , x_m , y_1 , y_2 , \dots , y_n$,

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1 (x_1 , \cdots , x_m , y_1 , \cdots , y_n) = 0 \\ f_2 (x_1 , \cdots , x_m , y_1 , \cdots , y_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n (x_1 , \cdots , x_m , y_1 , \cdots , y_n) = 0 \end{cases} ,$$

ou seja, em notação vectorial, $f(\bar{x} , \bar{y}) = \bar{0}$, em que,

$$\bar{x} = (x_1 , x_2 , \dots , x_m) \ , \ \bar{y} = (y_1 , y_2 , \dots , y_n) \ \text{ e } \ f = (f_1 , f_2 , \dots , f_n) \ .$$

A função $f(\bar{x} , \bar{y})$ e consequentemente cada uma das suas coordenadas $f_i (\bar{x} , \bar{y})$ é definida em certo conjunto $A \subseteq \mathbf{R}^{m+n}$; por outro lado, as imagens dos pontos $(\bar{x} , \bar{y}) \in A$ dadas por cada uma das funções $f_i (\bar{x} , \bar{y})$ dos primeiros membros das equações do sistema (1) são números reais e, portanto, as imagens desses mesmos pontos, dadas por $f(\bar{x} , \bar{y})$ são vectores de $\mathbf{R}^n$.

Dado um sistema de n funções das m variáveis $x_1 , x_2 , \dots , x_m$,

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1 = g_1 (x_1 , x_2 , \cdots , x_m) \\ y_2 = g_2 (x_1 , x_2 , \cdots , x_m) \\ \cdots \\ y_n = g_n (x_1 , x_2 , \cdots , x_m) \end{cases} ,$$

ou seja, uma função $\bar{y} = g(\bar{x})$ de $A^* \subseteq \mathbf{R}^m$ em $\mathbf{R}^n$, diz-se que esse sistema de n funções é *definido implicitamente* pelo sistema de equações (1) no conjunto A^* se e só se ,

a) O ponto $(\bar{x} , \bar{y})$, com $\bar{y} = g(\bar{x})$, pertence ao conjunto A onde se encontra definida a função $f(\bar{x} , \bar{y})$ e portanto também as funções $f_i (\bar{x} , \bar{y})$, qualquer que seja $\bar{x} \in A^*$;

b) Ao substituirmos no sistema de equações (1) os y_i por $g_i (\bar{x})$, obtêm-se igualdades verdadeiras qualquer que seja $\bar{x} \in A^*$, isto é,

$$\begin{cases} f_1\left[\, x_1 \,,\, \cdots \,,\, x_m \,,\, g_1(x_1 \,,\cdots, x_m) \,,\, \cdots \,,\, g_n(x_1 ,\cdots , x_m)\right] \;=\; 0 \\ f_2\left[\, x_1 \,,\, \cdots \,,\, x_m \,,\, g_1(x_1 \,,\cdots, x_m) \,,\, \cdots \,,\, g_n(x_1 ,\cdots , x_m)\right] \;=\; 0 \\ \cdots \\ f_n\left[\, x_1 \,,\, \cdots \,,\, x_m \,,\, g_1(x_1 \,,\cdots, x_m) \,,\, \cdots \,,\, g_n(x_1 ,\cdots , x_m)\right] \;=\; 0 \end{cases} ,$$

são identidades em A^* , ou ainda, em notação vectorial, $f\left[\,\bar{x}\,,\; g(\bar{x})\right] \;=\; \bar{0}$ é uma identidade em A^*.

Um caso particular frequente nas aplicações é aquele em que $m = n = 1$, ou seja, uma só equação $f(x\,,y) = 0$ nas incógnitas reais x e y . Neste caso, a função real de variável real $y = g(x)$ diz-se *definida implicitamente* pela equação em certo $A^* \subseteq \mathbf{R}$ se e só se ,

a) $\forall\, x \in A^*$, $[\,x\,,\; g(x)]$ pertence ao domínio de $f(x\,,y)$;
b) $\forall\, x \in A^*$, $f\,[\,x\,,\; g(x)] \;= 0$.

Outro caso particular também frequente nas aplicações é aquele em que $m > 1$ e $n = 1$, ou seja, uma só equação $f\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m\,,\; y) = 0$. Neste caso, a função real de m variáveis reais $y = g(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m\,)$ diz-se *definida implicitamente* pela equação em certo $A^* \subseteq \mathbf{R^m}$ se e só se ,

a) $\forall\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m) \in A^*$, $[\,x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m\,,\; g\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m)]$ pertence ao domínio de $f\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m\,,\; y)$;
b) $\forall\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m) \in A^*$, $f\,[\,x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m\,,\; g\,(x_1\,, x_2\,, \ldots\,, x_m)] \;= 0$.

Vejamos alguns exemplos que se enquadram nestes dois casos particulares e também do caso geral:

1) A função $y = 1 + \sqrt{x}$ é definida implicitamente pela equação,

$$x^2 \;+\; y^2 \;-\; x\,y^2 \;-\; 1 \;+\; 2x\,\sqrt{x} \;-\; 2\,\sqrt{x} \;=\; 0 \;,$$

no intervalo $A^* \;= [\;0\;, +\infty[$. A mesma equação define também, no mesmo intervalo, a função $y = -\,1 - \sqrt{x}$.

2) A função $y \;= x_1 + x_2$ é definida implicitamente em $\mathbf{R^2}$ pela equação,

$$y\,(\,y \;-\; 2\,x_1\,) \;+\; x_1^2 \;-\; x_2^2 \;=\; 0 \;.$$

3) O sistema de equações,

$$\begin{cases} 2\,x \;-\; y_1 \;-\; y_2^2 \;=\; 0 \\ y_2^2\, y_1 \;-\; x\,y_2^2 \;+\; x\,y_1 \;-\; x^2 \;+\; 2\,x\,y_2\,\sqrt{x} \;-\; 2\,y_1\,y_2\,\sqrt{x} \;=\; 0 \end{cases} ,$$

define implicitamente o sistema de funções $y_1 = x$, $y_2 \;=\; \sqrt{x}$ no intervalo $[\;0\;, +\infty[$
.

4) O sistema de funções $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2^2 - 2x_1 - 1$ é definido implicitamente em $\mathbf{R}^2$ pelo sistema de equações ,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 = 0 \\ x_1 - x_2^2 + y_1 + y_2 = 0 \end{cases} .$$

2. Derivadas de funções definidas implicitamente

Admita-se que as n funções $y_i = g_i(\bar{x})$ do sistema (2) são definidas implicitamente pelo sistema de equações (1) em certo aberto $A^* \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ e ainda que:

i) As funções $y_i = g_i(\bar{x})$ são diferenciáveis no aberto A^*; e
ii) As funções $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ dos primeiros membros das equações do sistema (1) são diferenciáveis em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{m+n}}$.

Nestas condições, podem obter-se relações entre as derivadas parciais das funções $g_i(\bar{x})$ num qualquer ponto $\bar{x} \in A^*$ e as derivadas parciais da funções $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ no ponto correspondente $\left[\bar{x}, g(\bar{x})\right] \in A$. Com efeito,

a) Para qualquer $\bar{x} \in A^*$, tem-se,

$$\begin{cases} f_1\left[x_1, \cdots, x_m, g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m)\right] = 0 \\ f_2\left[x_1, \cdots, x_m, g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m)\right] = 0 \\ \cdots \\ f_n\left[x_1, \cdots, x_m, g_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, g_n(x_1, \cdots, x_m)\right] = 0 \end{cases} ;$$

b) Derivando em relação a x_1 ambos os membros de cada identidade, usando a regra de derivação de uma função composta, obtém-se:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} \cdot \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \cdot \dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} = 0 \end{cases} ,$$

ou ainda,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}\cdot\dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n}\cdot\dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n}\cdot\dfrac{\partial g_n}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \end{cases} ,$$

em que as derivadas parciais das funções $f_i\,(\bar{x}\,,\bar{y}\,)$ devem ser tomadas em $(\bar{x}\,,\bar{y}\,)$ com $\bar{y} = g(\bar{x}) = \left[\, g_1(\bar{x})\,,\ g_2(\bar{x})\,,\ \cdots\,,\ g_n(\bar{x})\right]$;

c) Relativamente aos pontos $\bar{x} \in A^*$ para os quais não se anule o determinante Jacobiano,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} ,$$

o sistema construído em b) permite calcular as derivadas parciais,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\ ,\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}\ ;$$

d) Do mesmo modo se podem obter,

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_j}\ ,\ \frac{\partial g_2}{\partial x_j}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\partial g_n}{\partial x_j}\ ,$$

bastando repetir os passos b) e c) , com derivação de ambos os membros das identidades de a) em relação a x_j .

Antes de apresentar dois exemplos de aplicação da técnica anteriormente descrita, convém referir que as fórmulas obtidas para as primeiras derivadas das funções g_i permitem por sua vez obter as derivadas de ordem superior, até à ordem r , bastando para tanto admitir adicionalmente a diferenciabilidade das derivadas parciais das funções

f_i até à ordem r *-1* . Esta hipótese cumpre-se em particular no caso em que as funções f_i sejam de classe C^r no aberto A .

Vejamos então os exemplos.

1) Admita-se que o sistema ,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 = 0 \\ x_1 - x_2^2 + y_1 + y_2 = 0 \end{cases} ,$$

define implicitamente em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}^2$ as funções diferenciáveis,

$$y_1 = g_1(x_1 , x_2) \quad \text{e} \quad y_2 = g_2(x_1 , x_2) .$$

O sistema a partir do qual se podem calcular as derivadas parciais $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}$, obtém-se derivando ambos os membros das equações do sistema em relação a x_1 :

$$\begin{cases} 2x_1 - 2y_1 \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 \\ 1 + \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0 \end{cases} ,$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2y_1 \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = -2x_1 \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} = -1 \end{cases} .$$

Dado que,

$$\begin{vmatrix} -2y_1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2y_1 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow y_1 \neq 1/2 \Leftrightarrow x_1 \neq -1/2 ,$$

o sistema permite obter $\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}$ para todos os pontos $(x_1 , x_2) \in A$ tais que $x_1 \neq -1/2$, obtendo-se ,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{2x_1 + 1}{2y_1 - 1} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{2y_1 + 2x_1}{1 - 2y_1} ,$$

sendo o valor a atribuir a y_1 o que a função g_1 associa ao ponto (x_1 , x_2) onde se estão a calcular as derivadas.

Do mesmo modo, poderia obter-se , para $x_1 \neq -1/2$,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 2\,x_2 \ .$$

As fórmulas obtidas para as primeiras derivadas parciais de g_1 e g_2 permitem agora (dado que as funções do primeiro membro do sistema de equações em causa são de classe C^∞ em $\mathbf{R}^4$) calcular as derivadas de ordem superior para as mesmas funções em todos os pontos do aberto A tais que $x_1 \neq -1/2$.

Assim, por exemplo,

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\, \partial x_2} = \frac{0\,.\,(2\,y_1 - 1) \,-\, 2\,.\,(2\,x_1 + 1)\,.\,\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}}{(2\,y_1 - 1)^2} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} &= \frac{2\,.\,(2\,y_1 - 1) \,-\, 2\,.\,(2\,x_1 + 1)\,.\,\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}}{(2\,y_1 - 1)^2} = \\ &= \frac{2\,.\,(2\,y_1 - 1) \,-\, 2\,.\,(2\,x_1 + 1)\,.\,\dfrac{2\,x_1 + 1}{2\,y_1 - 1}}{(2\,y_1 - 1)^2} = \\ &= \frac{2\,.\,(2\,y_1 - 1)^2 \,-\, 2\,.\,(2\,x_1 + 1)^2}{(2\,y_1 - 1)^3} \quad ,\end{aligned}$$

sendo o valor a atribuir a y_1 o que a função g_1 associa ao ponto (x_1 , x_2) onde se estão a calcular as derivadas.

2) Admita-se que a equação,

$$x^2 + y^2 - x\,y^2 - 1 + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 0 \ ,$$

define implicitamente y como função de x , ou seja $y = g(x)$, em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}$ e que $g'(x)$ existe finita em A . Podemos então escrever a seguinte igualdade, derivando em relação a x ambos os membros da identidade que se obteria a partir da equação dada fazendo a composição $y = g(x)$:

$$2x - y^2 + 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 2y\,.\,(1 - x)\cdot\frac{d\,y}{d\,x} = 0 \ .$$

Então, para $x > 0$, $x \neq 1$ e $y \neq 0$, pode obter-se,

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{-\,2x\sqrt{x} + y^2\sqrt{x} - 3x + 1}{2\,y\,(1 - x)\sqrt{x}} \ .$$

3. Teoremas de existência

3.1 - Caso de uma só equação

Considera-se em primeiro lugar o caso de uma só equação,

$$f(x_1\ , x_2\ ,\ \cdots\ , x_m\ ,\ y)\ =\ 0 \quad \text{ou} \quad f(\bar{x}\,,\, y)\ =\ 0\ ,$$

começando por estudar o seguinte:

Teorema 1 : *Dado o ponto* $(\bar{a}\,,\, b) \in \mathbf{R}^{m+1}$ *, admita-se que:*

1) $f(\bar{a}\,,\, b)\ =\ 0$;
2) $f(\bar{x}\,,\, y)$ *é contínua em certa* $\mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,\, b)$;
3) $f_y^{'}(\bar{x}\,,\, y)$ *existe não nula na referida* $\mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,\, b)$.

Então, em certa $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$ *do ponto* $\bar{a} \in \mathbf{R}^{m}$ *, para qualquer* $\bar{x}_0 \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})$ *existe um e um só* y_0 *tal que* $(\bar{x}_0\,,\, y_0) \in \mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,\, b)$ *e* $f\,(\bar{x}_0\,,\, y_0) = 0$

Demonstração : Em tudo o que se segue consideraremos definida em $\mathbf{R}^{k}$ a norma Euclideana. Para melhor sistematização, dividiremos a demonstração em três alíneas :

a) Note-se em primeiro lugar que a função $\varphi\,(y) = f(\bar{a}\,,\, y)$ muda de sinal em $y = b$, ou seja, tem sinais contrários nos intervalos $]\, b - \eta\,,\, b[$ e $]\, b\,,\, b + \eta[$ com certo $\eta > 0$ $(\eta \le \delta)$. Se assim não fosse, então para $n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots$, sempre se encontrariam valores,

$$y_n \in\ ]\, b - 1/n\,,\, b[\quad \text{e} \quad y'_n \in\ ]\, b\,,\, b + 1/n[\quad ,$$

tais que $\varphi\,(y_n\,)\,.\,\varphi\,(y'_n\,) \ge 0$. E como por hipótese $\varphi\,(\,b\,) = f(\bar{a}\,,\, b) = 0$, a partir da desigualdade anterior pode escrever-se,

$$\frac{\big[\varphi\,(y_n) \ -\ \varphi\,(b)\big]\,.\,\big[\varphi\,(y'_n) \ -\ \varphi\,(b)\big]}{(y_n \ -\ b)\,.\,(y'_n \ -\ b)} \ \le\ 0\ ,$$

donde , fazendo $n \to +\infty$, resultaria $\big[\varphi\,'(b)\big]^2 \ =\ \big[f_y^{'}(\bar{a}\,,\, b)\big]^2 \le\ 0$, ou seja, $f_y^{'}\,(\bar{a}\ ,\, b) = 0$, contrariamente ao assumido na hipótese 3).

b) Tendo $\varphi\,(y) = f(\bar{a}\,,\, y)$ sinais contrários nos intervalos $]\, b - \eta\,,\, b[$ e $]\, b\,,\, b + \eta[$, com certo $\eta > 0$ $(\eta \le \delta)$, fixe-se um qualquer $\alpha \in]\ 0\ ,\ \eta[$; tem-se, portanto, $f\,(\bar{a}\ ,\, b - \alpha\ )\ .\ f\,(\bar{a}\ ,\, b + \alpha\ ) <\ 0$. Como $f(\bar{x}\,,\, y)$ é contínua $\mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,\, b)$, conclui-se que tanto $f\,(\,\bar{x}\ ,\ b - \alpha\ )$ como $f\,(\,\bar{x}\ ,\ b + \alpha\ )$ são funções de $\bar{x}$ contínuas em $\mathrm{V}_\theta(\bar{a})$, com $\theta\ =\ \sqrt{\delta^{\,2} - \alpha^{\,2}}$: basta notar que,

$$\bar{x} \in \mathrm{V}_{\theta}(\bar{a}) \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - a_i)^2 + (b \pm \alpha - b)^2} < \sqrt{\theta^2 + \alpha^2} = \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, b \pm \alpha) \in \mathrm{V}_{\delta}(\bar{a}, b) .$$

Resulta então que $\psi(\bar{x}) = f(\bar{x}, b - \alpha) . f(\bar{x}, b + \alpha)$ é uma função de $\bar{x}$ contínua em $\mathrm{V}_{\theta}(\bar{a})$. Ora dado que $\psi(\bar{a}) = f(\bar{a}, b - \alpha) . f(\bar{a}, b + \alpha) < 0$, a desigualdade estende-se aos pontos vizinhos de $\bar{a}$, ou seja, existe um $\varepsilon \leq \theta$ tal que ,

$$\bar{x} \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a}) \Rightarrow \psi(\bar{x}) = f(\bar{x}, b - \alpha) . f(\bar{x}, b + \alpha) < 0 .$$

Esta última desigualdade significa que, dado um qualquer $\bar{x}_0 \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a})$, a função contínua $f(\bar{x}_0, y)$ muda de sinal quando y passa de $b - \alpha$ para $b + \alpha$; pelo teorema de Cauchy , existe então um certo $y_0 \in]\, b - \alpha, b + \alpha[$ tal que $f(\bar{x}_0, y_0) = 0$ e claro que $(\bar{x}_0, y_0) \in \mathrm{V}_{\delta}(\bar{a}, b)$: de facto,

$$b - \alpha \leq y \leq b + \alpha \Rightarrow \| (\bar{x}_0, y) - (\bar{a}, b) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_{0i} - a_i)^2 + (y - b)^2} <$$

$$< \sqrt{\varepsilon^2 + \alpha^2} < \sqrt{\theta^2 + \alpha^2} = \delta .$$

c) Falta apenas provar que, para cada $\bar{x}_0 \in \mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a})$ apenas existe um y_0 a verificar as condições desejadas. Se para um $z_0 \neq y_0$ fosse $f(\bar{x}_0, z_0) = 0$ e $(\bar{x}_0, z_0) \in \mathrm{V}_{\delta}(\bar{a}, b)$, como $f(\bar{x}_0, y)$ é função de y regular no intervalo de extremidades y_0 e z_0 , então um certo w_0 entre eles compreendido faria $f_y'(\bar{x}_0, w_0) = 0$ (teorema de Rolle) e claro que $(\bar{x}_0, z_0) \in \mathrm{V}_{\delta}(\bar{a}, b)$, sendo assim violada a hipótese 3) do teorema.

O teorema auxiliar precedente permite agora provar que:

<u>**Teorema 2**</u> **:** *Dado o ponto* $(\bar{a}, b) \in \mathbf{R}^{m+1}$ *, admita-se que:*

1) $f(\bar{a}, b) = 0$ *;*
2) $f(\bar{x}, y)$ *é contínua em certa vizinhança do ponto* $(\bar{a}, b)$ *;*
3) $f_y'(\bar{x}, y)$ *existe e é não nula em certa vizinhança do ponto* $(\bar{a}, b)$.

Então a equação $f(\bar{x}, y) = 0$ *define implicitamente uma função* $y = g(\bar{x})$ *em certa* $\mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a})$ *e são verificadas as seguintes propriedades :*

a) $g(\bar{a}) = b$ *;*
b) $g(\bar{x})$ *é função contínua em* $\mathrm{V}_{\varepsilon}(\bar{a})$

c) $g(\bar{x})$ *é a única função definida implicitamente pela equação* $f(\bar{x}, y) = 0$ *em* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *que verifica as propriedades a) e b) , ou seja, em termos mais gerais, se uma outra função* $h(\bar{x})$ *for definida implicitamente pela referida equação em* $V_\eta(\bar{a})$ *e verificar as referidas propriedades , então, nos pontos comuns às duas vizinhanças, tem-se* $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$

Demonstração: Seja $V_\delta(\bar{a}, b)$ a vizinhança do ponto $(\bar{a}, b)$ onde são verificadas as hipóteses 2) e 3) do enunciado. A existência de uma função $y = g(\bar{x})$ definida implicitamente em certa $V_\varepsilon(\bar{a})$ pela equação $f(\bar{x}, y) = 0$ e a verificar a propriedade a) da tese, decorre imediatamente do teorema 1. Com efeito , o teorema 1 garante a existência de certa $V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que a cada $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ corresponde um e um só *y* que faz, $(\bar{x}, y) \in V_\delta(\bar{a}, b)$ e $f(\bar{x}, y) = 0$; ou seja, tem-se uma função,

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \xrightarrow[g]{\qquad\qquad} y = g(\bar{x}) \;:\; (\bar{x}, y) \in V_\delta(\bar{a}, b) \text{ e } f(\bar{x}, y) = 0 \;.$$

E como por hipótese $f(\bar{a}, b) = 0$, tem-se necessariamente, $b = g(\bar{a})$.

Antes de prosseguir com a demonstração, visando provar a continuidade de $g(\bar{x})$ em $V_\varepsilon(\bar{a})$, recordam-se aqui os seguintes aspectos da demonstração do teorema 1 :

- O valor ε, raio da esfera $V_\varepsilon(\bar{a})$, é tal que , $\varepsilon \le \theta = \sqrt{\delta^2 - \alpha^2}$;
- O valor α é tal que $0 < \alpha < \delta$;
- Os valores $y = g(\bar{x})$, com $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$, pertencem todos ao interior do intervalo $[\, b - \alpha, b + \alpha \,]$.

Considere-se um qualquer $\bar{x}_0 \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e seja $\bar{x}_{0\,n} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ uma qualquer sucessão tal que $\bar{x}_0 = \lim \bar{x}_{0\,n}$. Se se provar que $\lim g(\bar{x}_{0\,n}) = g(\bar{x}_0)$, fica provada a continuidade de $g(\bar{x})$ em $\bar{x}_0 \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e, dada a arbitrariedade do $\bar{x}_0$ considerado, fica também provada a continuidade de $g(\bar{x})$ em $V_\varepsilon(\bar{a})$.

Seja $k = \lim g(\bar{x}_{0\alpha_n})$ um qualquer sublimite da sucessão $g(\bar{x}_{0\,n})$. Claro que,

$$b - \alpha < g(\bar{x}_{0\,\alpha_n}) < b + \alpha \;\Rightarrow\; b - \alpha \le k \le b + \alpha \;,$$

e vê-se facilmente que $(\bar{x}_0 , k) \in V_\delta(\bar{a}, b)$:

$$\| (\bar{x}_0 , k) - (\bar{a}, b) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_{0\,i} - a_i)^2 + (k - b)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \alpha^2} \le \delta \;.$$

Por outro lado, a continuidade de $f(\bar{x}, y)$ em $V_\delta(\bar{a}, b)$ permite tirar sucessivamente :

$$f\left[\,\bar{x}_{0\,\alpha_n}\,,\; g(\bar{x}_{0\,\alpha_n})\right] = 0 \quad ,\; lim\; f\left[\,\bar{x}_{0\,\alpha_n}\,,\; g(\bar{x}_{0\,\alpha_n})\right] = 0 \quad \text{e} \quad f\,(\bar{x}_0\,,k) = 0 \;,$$

igualdade que , conjuntamente com o facto de ser $(\bar{x}_0\,,k) \in \mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,b)$, assegura que $k = g(\bar{x}_0)$.

Como qualquer sublimite de $g(\bar{x}_{0\,n})$ é $k = g(\bar{x}_0)$, conclui-se que $lim\;\; g(\bar{x}_{0\,n}) = g(\bar{x}_0)$, como se pretendia provar.

Falta agora demonstrar a propriedade c) do enunciado. Considere-se uma outra função $h(\bar{x})$ definida implicitamente pela equação $f(\bar{x}, y) = 0$ em certa $\mathrm{V}_\eta(\bar{a})$ e verificar as propriedades a) e b) do enunciado, ou seja, $h(\bar{a}) = b$ e $h(\bar{x})$ contínua em $\mathrm{V}_\eta(\bar{a})$. Pretendemos demonstrar que,

$$\bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap \mathrm{V}_\eta(\bar{a}) \;\Rightarrow\; h(\bar{x}) = g(\bar{x})\,.$$

Considerem-se os conjuntos,

$$A_0 = \{\,\bar{x} \;:\; \bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap \mathrm{V}_\eta(\bar{a}) \;\wedge\; h(\bar{x}) \neq g(\bar{x})\,\}\;,$$

$$A_1 = \{\,\bar{x} \;:\; \bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap \mathrm{V}_\eta(\bar{a}) \;\wedge\; h(\bar{x}) = g(\bar{x})\,\}\;.$$

O conjunto A_1 é não vazio porque, com $\bar{x} = \bar{a}$, $h(\bar{a}) = g(\bar{a}) = b$. Por outro lado, $A_0 \cap A_1 = \varnothing$ e $A_0 \cup A_1 = \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap \mathrm{V}_\eta(\bar{a})$. Se for $A_0 \neq \varnothing$, como $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \cap \mathrm{V}_\eta(\bar{a})$ é um conjunto conexo, ou existe um $\bar{x}_0 \in A_0$ que é ponto de acumulação de A_1 , ou existe um $\bar{x}_1 \in A_1$ que é ponto de acumulação de A_0 . No primeiro caso, $\bar{x}_0$ é limite de uma certa sucessão de termos $\bar{x}_n \in A_1$; devido à continuidade das funções $h(\bar{x})$ e $g(\bar{x})$ em $\bar{x}_0$, tem-se,

$$g(\bar{x}_0) = lim\;\; g(\bar{x}_n) = lim\;\; h(\bar{x}_n) = h(\bar{x}_0) \;,$$

e, portanto, também $\bar{x}_0 \in A_1$; mas isto é impossível porque $A_0 \cap A_1 = \varnothing$. No segundo caso, $\bar{x}_1$ é limite de uma certa sucessão de termos $\bar{x}_n \in A_0$; como $\bar{x}_n \in A_0$, tem-se $g(\bar{x}_n) \neq h(\bar{x}_n)$ e , pelo teorema 1 , dado que $[\bar{x}_n\,, g(\bar{x}_n)]$ é a única solução da equação $f(\bar{x}, y) = 0$ que pertence a $\mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,b)$, deverá ser,

$$[\bar{x}_n\,, h(\bar{x}_n)] \notin \mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,b) \;,$$

e como,

$$[\bar{x}_1\,, g(\bar{x}_1)] \in \mathrm{V}_\delta(\bar{a}\,,b) \;,$$

não pode ter-se $lim\; h(\bar{x}_n)$ igual a $g(\bar{x}_1)$; mas devido à continuidade de $h(\bar{x})$ em $\bar{x}_1$, tem-se então,

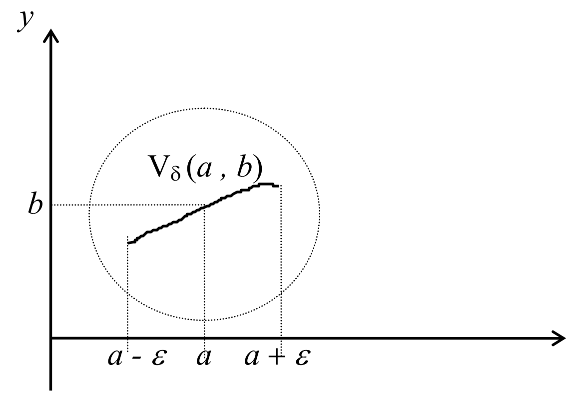
$$h(\bar{x}_1) = \lim h(\bar{x}_n) \neq g(\bar{x}_1),$$

o que contradiz o facto de ser $\bar{x}_1 \in A_1$. Destas contradições resulta que, necessariamente, $A_0 = \emptyset$, ou seja, $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$ nos pontos comuns das vizinhanças $V_\varepsilon(\bar{a})$ e $V_\eta(\bar{a})$.

Este resultado, considerado em particular com $\varepsilon = \eta$ permite concluir que $g(\bar{x})$ é a única função definida implicitamente pela equação $f(\bar{x}, y) = 0$ em $V_\varepsilon(\bar{a})$ que é contínua nessa vizinhança e tal que $g(\bar{a}) = b$.

O teorema está completamente demonstrado.

Para ilustrar o teorema precedente, recorrendo a uma representação gráfica, considere-se o caso $m = 1$, ou seja, uma equação $f(x, y) = 0$, com x e y variáveis reais :



Verificadas as hipóteses do teorema 2, a equação $f(x, y) = 0$ define implicitamente em certo intervalo $]\, a - \varepsilon, a + \varepsilon\, [$ uma só função $y = g(x)$ contínua nesse intervalo e cujo gráfico passa pelo ponto (a, b). Refira-se ainda que o gráfico de $y = g(x)$ no intervalo $]\, a - \varepsilon, a + \varepsilon\, [$ está inteiramente contido em $V_\delta(a, b)$.

No teorema seguinte estuda-se a questão da diferenciabilidade da função $y = g(\bar{x})$ a que se refere o teorema 2 :

<u>Teorema 3</u> : *Se em relação ao ponto $(\bar{a}, b) \in \mathbf{R}^{m+1}$ as hipóteses 2) e 3) do teorema 2 forem substituídas pela diferenciabilidade de $f(\bar{x}, y)$ em certa vizinhança do ponto $(\bar{a}, b)$ e não anulamento de $f'_y(\bar{x}, y)$ em certa vizinhança do mesmo ponto , então a função $y = g(\bar{x})$ definida implicitamente pela equação $f(\bar{x}, y) = 0$, nos termos e com as propriedades do teorema 2, é ainda diferenciável na $V_\varepsilon(\bar{a})$ onde é definida*

<u>Demonstração</u> : Considere-se um qualquer $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e seja α suficientemente pequeno de modo que $\bar{x} + \bar{h} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ desde que $\| \bar{h} \| < \alpha$. A continuidade da função

$g(\bar{x})$ garante que, com $k = g(\bar{x} + \bar{h}) - g(\bar{x})$, se verifica que $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} k = 0$. Dado que $g(\bar{x})$ é definida implicitamente pela equação dada, podemos escrever :

$$f\left[\bar{x} \, , \, g(\bar{x})\right] = 0 \quad \text{e} \quad f\left[\bar{x} + \bar{h} \, , \, g(\bar{x} + \bar{h})\right] = f\left[\bar{x} + \bar{h} \, , \, g(\bar{x}) + k\right] = 0 \, ,$$

com $k = g(\bar{x} + \bar{h}) - g(\bar{x})$. Atendendo agora à diferenciabilidade de $f(\bar{x}, y)$ no ponto $\left[\bar{x} \, , \, g(\bar{x})\right]$, tem-se :

$$f\left[\bar{x} + \bar{h} \, , \, g(\bar{x}) + k\right] - f\left[\bar{x} \, , \, g(\bar{x})\right] = \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i} . h_i + f'_y . k + \varepsilon \, . \, \|(\bar{h} \, , k)\| = 0 \, ,$$

em que as derivadas parciais de $f(\bar{x}, y)$ devem ser tomadas no ponto $\left[\bar{x} \, , \, g(\bar{x})\right]$ e, por outro lado,

$$\varepsilon = \varepsilon\,(\bar{h} \, , k) \quad \text{e} \quad \lim_{\substack{\bar{h} \to \bar{0} \\ k \to 0}} \varepsilon = 0 \, ,$$

devendo notar-se que, como $k = g(\bar{x} + \bar{h}) - g(\bar{x})$, $\bar{h} \to \bar{0} \Rightarrow k \to 0$ e, portanto, ε é em última análise função de $\bar{h}$ e $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon = 0$.

Com vista a permitir o desenvolvimento da argumentação, vamos dar uma forma mais conveniente à parcela residual $\varepsilon \, . \| (\bar{h} \, , k) \|$: notando que,

$$\| (\bar{h} \, , k) \| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_m^2 + k^2} \leq |h_1| + |h_2| + \cdots + |h_m| + |k| \quad ,$$

conclui-se que existe um $\theta \in [\, 0 \, , 1]$, tal que ,

$$\| (\bar{h} \, , k) \| = \theta \, . \left(\sum_{i=1}^{m} |h_i| + |k| \right) \quad ;$$

definindo agora,

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon \, . \, \theta . |k|}{k} \quad (k \neq 0) \quad \text{e} \quad \varepsilon^* = 0 \quad (k = 0)$$

$$\varepsilon^*_i = \frac{\varepsilon \, . \, \theta . |h_i|}{h_i} \quad (h_i \neq 0) \quad \text{e} \quad \varepsilon^*_i = 0 \quad (h_i = 0)$$

tem-se ,

$$\varepsilon \, . \| (\bar{h} \, , k) \| = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^*_i \, . \, h_i + \varepsilon^* \, . \, k \, , \text{ com } \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon^* = \lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon^*_i = 0 \, .$$

Resulta então,

$$0 = \sum_{i=1}^{m} f_{x_i}^{'} . h_i + f_y^{'} . k + \varepsilon . \|(\bar{h}, k)\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (f_{x_i}^{'} + \varepsilon^*_i) . h_i + (f_y^{'} + \varepsilon^*) . k \quad .$$

Fazendo,

$$\beta = k + \frac{\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}^{'} . h_i}{f_y^{'}} \quad (1) ,$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por $f_y^{'} + \varepsilon^*$ e notando que,

$$k . (f_y^{'} + \varepsilon^*) = - \sum_{i=1}^{m} (f_{x_i}^{'} + \varepsilon^*_i) . h_i \ ,$$

chega-se a,

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{f_{x_i}^{'} . \varepsilon^*}{f_y^{'} . (f_y^{'} + \varepsilon^*)} - \frac{\varepsilon^*_i}{f_y^{'} + \varepsilon^*} \right] \cdot \frac{h_i}{\|\bar{h}\|} \cdot \|\bar{h}\| = \beta^* . \|\bar{h}\| \ ,$$

concluindo-se sem qualquer dificuldade que, $\lim_{\bar{h} \to \bar{0}} \beta^* = 0$. Tem-se então,

$$\beta^* . \|\bar{h}\| = k + \frac{\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}^{'} . h_i}{f_y^{'}} = g(\bar{x} + \bar{h}) - g(\bar{x}) + \frac{\sum_{i=1}^{m} f_{x_i}^{'} . h_i}{f_y^{'}} \ ,$$

ou seja,

---

(1) *Note-se que, de acordo com a hipótese* 3 *do teorema* 1 , $f_y^{'}(\bar{x}, y) \neq 0$ *em* $V_\delta(\bar{a}, b)$ *e , portanto ,* $f_y^{'}\left[\bar{x}, g(\bar{x})\right] \neq 0$ *qualquer que seja o ponto* $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ *que se esteja considerando .*

$$g(\bar{x}+\bar{h}) - g(\bar{x}) = -\frac{\sum_{i=1}^{m} f'_{x_i} \cdot h_i}{f'_y} + \beta^* . \| \bar{h} \| \quad , \quad \text{com} \ \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \beta^* = 0 \ ,$$

o que traduz a diferenciabilidade de $g(\bar{x})$ no ponto $\bar{x}$ (qualquer) considerado , que era o que se pretendia demonstrar.

A última igualdade da demonstração do teorema precedente permite obter a expressão da diferencial da função $g(\bar{x})$:

$$d\, g(\bar{x}) = -\frac{\sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}}{f'_y} \cdot h_i \ ,$$

e, evidentemente, as derivadas parciais $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ são dadas por,

$$\frac{\partial g(\bar{x})}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}\left[\bar{x}\ ,\ g(\bar{x})\right]}{f'_y\left[\bar{x}\ ,\ g(\bar{x})\right]} \qquad (i = 1\ ,2\ , \ldots ,m)\ ,$$

resultado que, como era de esperar, coincide com o que se obtém aplicando a técnica estudada no ponto 2. . Atendendo à expressão obtida para as derivadas parciais de $g(\bar{x})$ em $V_\varepsilon(\bar{a})$, conclui-se sem dificuldade que:

a) Se a condição de diferenciabilidade de $f(\bar{x}\ ,y)$ se estender às suas derivadas parciais, então as derivadas parciais de $g(\bar{x})$ são igualmente diferenciáveis em $V_\varepsilon(\bar{a})$ e as suas segundas derivadas parciais calculam-se a partir das expressões das primeiras usando a regra de derivação de uma função composta. Mais geralmente, se a função $f(\bar{x}\ ,y)$ admitir derivadas até à ordem p-1 diferenciáveis em $V_\delta(\bar{a}\ ,b)$, então também $g(\bar{x})$ admite derivadas parciais até à ordem p-1 diferenciáveis em $V_\varepsilon(\bar{a})$; e as derivadas parciais de $g(\bar{x})$ até à ordem p calculam-se a partir das expressões da respectivas primeiras derivadas, por derivação sucessiva, aplicando sempre a regra de derivação de uma função composta.

b) Se em particular $f(\bar{x}\ ,y)$ for de classe C^p em $V_\delta(\bar{a}\ ,b)$, ou seja, se $f(\bar{x}\ ,y)$ admitir derivadas parciais até à ordem p contínuas naquela vizinhança, as derivadas parciais de $g(\bar{x})$ até à ordem p - cuja existência é assegurada pelo que se disse em a) - são também contínuas em $V_\varepsilon(\bar{a})$; por outras palavras, nessas condições, a função $g(\bar{x})$ é também de classe C^p na $V_\varepsilon(\bar{a})$ em que é definida.

Por uma questão de sistematização dos resultados contidos nos teoremas 2 e 3, enuncia-se o teorema seguinte, que mais não é que a síntese de todos esses resultados e não necessita, portanto, de qualquer demonstração.

<u>Teorema 4</u> : *Dado o ponto* $(\bar{a}\,, b) \in \mathbf{R}^{\mathbf{m+1}}$ *, admita-se que:*

1) $f(\bar{a}\,, b) = 0$ *;*

2) $f(\bar{x}\,, y)$ *é diferenciável em certa vizinhança do ponto* $(\bar{a}\,, b)$*;*

3) $f_y^{'}(\bar{x}\,, y)$ *é não nula em certa vizinhança do ponto* $(\bar{a}\,, b)$.

Então a equação $f(\bar{x}\,, y) = 0$ *define implicitamente uma função* $y = g(\bar{x})$ *em certa* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *e são verificadas as seguintes propriedades :*

a) $g(\bar{a}) = b$*;*

c) $g(\bar{x})$ *é função contínua em* $V_\varepsilon(\bar{a})$*;*

b) $g(\bar{x})$ *é a única função definida implicitamente pela equação* $f(\bar{x}\,, y) = 0$ *em* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *que verifica as propriedades a) e b) , ou seja, em termos mais gerais, se uma outra função* $h(\bar{x})$ *for definida implicitamente pela referida equação em* $V_\eta(\bar{a})$ *e verificar as propriedades a) e b) , então, nos pontos comuns às duas vizinhanças, tem-se* $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$*;*

d) $g(\bar{x})$ *é também diferenciável na* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *onde é definida, calculando-se as respectivas derivadas parciais pela técnica estudada no ponto* 2

Escusado será dizer que permanecem válidas, relativamente a este enunciado, as observações a) e b) feitas a propósito do teorema 3 sobre a diferenciabilidade e o cálculo das derivadas parciais de ordem superior da função $g(\bar{x})$ em $V_\varepsilon(\bar{a})$.

Relativamente ao enunciado do teorema anterior, convém notar que a hipótese 3) , ou seja, o não anulamento da derivada parcial $f_y^{'}(\bar{x}\,, y)$ em certa vizinhança do ponto $(\bar{a}\,, b)$ fica garantida se, em particular, tal derivada for contínua e não nula nesse ponto.

Assim se obtém o seguinte corolário do teorema precedente, que vai ser o resultado a generalizar no ponto seguinte para o caso de um sistema de equações.

<u>Corolário 1</u> : *Dado o ponto* $(\bar{a}\,, b) \in \mathbf{R}^{\mathbf{m+1}}$ *, admita-se que:*

1) $f(\bar{a}\,, b) = 0$ *;*

2) $f(\bar{x}\,, y)$ *é diferenciável em certa vizinhança do ponto* $(\bar{a}\,, b)$*;*

3) $f_y^{'}(\bar{x}\,, y)$ *é contínua e não nula no ponto* $(\bar{a}\,, b)$.

Então a equação $f(\bar{x}\,, y) = 0$ *define implicitamente uma função* $y = g(\bar{x})$ *em certa* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *e são verificadas as seguintes propriedades :*

a) $g(\bar{a}) = b$*;*

c) $g(\bar{x})$ *é função contínua em* $V_\varepsilon(\bar{a})$*;*

b) $g(\bar{x})$ *é a única função definida implicitamente pela equação* $f(\bar{x}\,, y) = 0$ *em* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *que verifica as propriedades a) e b) , ou seja, em termos mais gerais, se uma outra função* $h(\bar{x})$ *for definida implicitamente pela referida equação em* $V_\eta(\bar{a})$ *e*

verificar as propriedades a) e b) , então, nos pontos comuns às duas vizinhanças, tem-se $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$ *;*
d) $g(\bar{x})$ *é também diferenciável na* $V_{\varepsilon}(\bar{a})$ *onde é definida, calculando-se as respectivas derivadas parciais pela técnica estudada no ponto 2*

<u>Demonstração</u> : A existência de $f_y^{'}(\bar{x}, y)$ em certa vizinhança do ponto $(\bar{a}, b)$ e a sua continuidade neste ponto, garantem que a desigualdade $f_y^{'}(\bar{a}, b) \neq 0$ se verifica igualmente para os pontos $(\bar{x}, y)$ que pertençam a certa vizinhança de $(\bar{a}, b)$. Ficam asseguradas as hipóteses do teorema 4, o que permite considerar provado o corolário.

Antes de passarmos ao ponto seguinte para o estudo de um teorema que generaliza o resultado do corolário precedente ao caso de um sistema de equações, vamos apresentar alguns exemplos relativos ao caso de uma só equação:

1) Considere-se a equação $z \,.\, e^{z+x+y} - 1 = 0$ e o ponto de coordenadas $x = -1$, $y = 0$ e $z = 1$ que é uma das soluções da equação. Na vizinhança daquele ponto, mais precisamente em $V_2(-1, 0, 1)$, verificam-se as hipóteses do teorema 4 :

- O ponto dado é solução da equação ;
- A função $f(x, y, z) = z \,.\, e^{z+x+y} - 1$ é diferenciável ;
- A derivada parcial $f_z^{'} = (z+1) \,.\, e^{z+x+y}$ é não nula .

Então, nos termos do teorema 4, a referida equação define implicitamente z como função de x e de y , $z = g(x, y)$, em certa $V_{\varepsilon}(-1, 0)$, verificando esta função as seguintes propriedades:

- O seu gráfico passa pelo ponto (-1 , 0 , 1) ;
- É contínua em $V_{\varepsilon}(-1, 0)$;
- É a única função definida implicitamente pela equação em $V_{\varepsilon}(-1, 0)$ que verifica as duas propriedades anteriores ;
- É diferenciável em $V_{\varepsilon}(-1, 0)$.

As derivadas parciais da referida função $z = g(x, y)$ na vizinhança onde é definida, podem calcular-se como se indicou no ponto 2. E como a função $f(x, y, z) = z \,.\, e^{z+x+y} - 1$ admite derivadas parciais de todas as ordens diferenciáveis (e também contínuas) , o mesmo se passa com a função $z = g(x, y)$ na vizinhança onde é definida ; uma vez obtidas as expressões das primeiras derivadas parciais, podem obter-se a partir delas as derivadas de ordem superior, por derivação sucessiva :

a) <u>Derivadas de primeira ordem</u>

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \;\Rightarrow\; (z+1) \,.\, e^{z+x+y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -z \,.\, e^{z+x+y} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \left[- \frac{z}{z+1} \right]_{z = g(x,y)} \quad ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\partial f}{\partial y} \;\Rightarrow\; (z+1) \,.\, e^{z+x+y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -z \,.\, e^{z+x+y} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \left[- \frac{z}{z+1} \right]_{z = g(x,y)} \quad ;$$

em particular, dado que $g(-1\,,\,0) = 1$, obtém-se,

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = -1/2 \quad \text{e} \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = -1/2 \quad .$$

b) <u>Derivadas de segunda ordem</u>

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[- \frac{(z+1) - z}{(z+1)^2} \cdot z'_x \right]_{z = g(x,y)} = \left[\frac{z}{(z+1)^3} \right]_{z = g(x,y)} \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[- \frac{(z+1) - z}{(z+1)^2} \cdot z'_y \right]_{z = g(x,y)} = \left[\frac{z}{(z+1)^3} \right]_{z = g(x,y)} \quad ,$$

Etc. ;

em particular,

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right]_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = 1/8 \quad , \quad \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right]_{\substack{x=-1 \\ y=0}} = 1/8 \quad , \quad \text{Etc .}$$

c) <u>Derivadas de ordem superior à segunda</u>

Obtêm-se sucessivamente a partir das segundas, sem nenhuma dificuldade de princípio que não seja a complexidade crescente das expressões que se vão obtendo.

2) Considere-se a equação $y^5 + y^3 + y + x^2 = 0$ e a solução particular $x = \sqrt{3}$, $y = -1$. Como são verificadas as hipóteses do corolário 1 do teorema 4 , a equação dada define implicitamente y como função de x , $y = g(x)$, em certa $V_\varepsilon(\sqrt{3})$, verificando

esta função todas as propriedades da tese deste corolário. A obtenção da primeira derivada desta função faz-se pela técnica estudada no ponto 2 :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d y}{d x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d y}{d x} = - \frac{\partial f \big/ \partial x}{\partial f \big/ \partial y} = \left[- \frac{2 x}{5 y^4 + 3 y^2 + 1} \right]_{y = g(x)} ;$$

as derivadas de ordem superior da função podem obter-se por derivação sucessiva da expressão obtida para a primeira derivada (note-se que a existência das derivadas de todas as ordens para a função g é assegurada pelo facto de a função do primeiro membro da equação dada admitir derivadas parciais de todas as ordens diferenciáveis).

3.2 - Caso de um sistema de equações

Considere-se agora o caso geral de um sistema de equações,

$$\begin{cases} f_1 (x_1 , x_2 , \cdots , x_m , y_1 , y_2 , \cdots , y_n) = 0 \\ f_2 (x_1 , x_2 , \cdots , x_m , y_1 , y_2 , \cdots , y_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n (x_1 , x_2 , \cdots , x_m , y_1 , y_2 , \cdots , y_n) = 0 \end{cases} ,$$

ou, em notação vectorial,

$$f (\bar{x} , \bar{y}) = \bar{0} \text{ , com } \bar{x} = (x_1 , \cdots , x_m) \text{ e } \bar{y} = (y_1 , \cdots , y_n) \; .$$

No que vai seguir-se, representa-se por $D(\bar{x} , \bar{y})$ o seguinte determinante funcional ou Jacobiano,

$$D(\bar{x} , \bar{y}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \frac{\partial f_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} ,$$

que desempenha neste caso um papel semelhante ao da derivada $f_y^{'} (\bar{x} , y)$ no caso de uma só equação, estudado anteriormente.

Vamos seguidamente generalizar o Teorema 4 ao caso de um sistema de equações.

Visando uma melhor sistematização, apresentam-se como resultados auxiliares e prévios dois teoremas, que serão depois utilizados nas demonstrações subsequentes. Por outro lado, as propriedades do sistema de funções definido implicitamente serão estudadas em teoremas separados (um para cada propriedade).

Para assentar ideias, convém referir que as normas a considerar em toda a exposição serão sempre normas euclideanas.

<u>Teorema 5</u> : *Dado o ponto* $(\bar{a}\,,\bar{b}\,) \in \mathbf{R}^{m+n}$ *, admita-se que*:

1) $f(\bar{a}\,,\bar{b}\,) = \bar{0}$ *, ou seja,* $f_i(\bar{a},\bar{b})=0$ *para* $i = 1\,,2\,,\,\dots\,,n$;

2) *As funções* $f_i(\bar{x}\,,\bar{y})$ *,* $i = 1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n$ *, são diferenciáveis em certa vizinhança do ponto* $(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$;

3) *As derivadas parciais* $f^{'}_{i\,y_j}(\bar{x}\,,\bar{y}\,)$ *,* $i\,,j = 1\,,2\,,\,\dots\,,n$ *, são contínuas no ponto* $(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$ *e o determinante funcional* $D(\bar{x}\,,\bar{y}) = |\ f^{'}_{i y_j}(\bar{x}\,,\bar{y})\ |$ *é não nulo nesse ponto, isto é,* $D(\bar{a}\,,\bar{b}) \neq 0$.

Então existe uma $V_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$ *onde o sistema de equações* $f_i(\bar{x}\,,\bar{y}) = 0$ *,* $i = 1\,,2\,,\dots,n$ *, não admite soluções distintas* $(\bar{x}\,,\bar{y})$ *e* $(\bar{x}\,,\bar{y}\,')$ *com o mesmo* $\bar{x}$ *e* $\bar{y} \neq \bar{y}\,'$.

<u>Demonstração</u> : Seja $V_r\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$ a vizinhança em que as funções $f_i(\bar{x}\,,\bar{y})$ são diferenciá-veis . Tomando $(\bar{x}\,,\bar{y})$ e $(\bar{x}\,,\bar{y}\,')$ nessa vizinhança é fácil concluir, pela convexidade de $V_r\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$, que, com $0 \le \lambda \le 1$, os pontos $[\,\bar{x}\ ,\ \bar{y} + \lambda\,.(\bar{y}\,' - \bar{y})\,]$ pertencem todos a essa mesma vizinhança. Cada função $\varphi_i\,(\,\lambda\,) = f_i\,[\,\bar{x}\ ,\ \bar{y} + \lambda\,.(\bar{y}\,' - \bar{y})\,]$ é então defini-da para $0 \le \lambda \le 1$ e, devido à diferenciabilidade de $f_i(\bar{x}\,,\bar{y})$ em $V_r\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$, a regra de derivação da função composta permite escrever:

$$\varphi'_i\,(\,\lambda\,) = \sum_{j=1}^{n}\ f^{'}_{i y_j}\big[\bar{x}\ ,\ \bar{y} + \lambda\,.(\bar{y}\,' - \bar{y})\big]\,.\,(\,y'_j - y_j\,) \quad , \quad 0 \le \lambda \le 1\ .$$

Aplicando o teorema de Lagrange a $\varphi'_i\,(\,\lambda\,)$ em $[0\,,1]$, tem-se, com $0 \le \theta_i \le 1$,

$$(1) \qquad \begin{cases} f_i\,(\bar{x}\ ,\ \bar{y}\,') \ - \ f_i\,(\bar{x}\ ,\ \bar{y}\,) \ = \ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\ f^{'}_{i y_j}\big[\bar{x}\ ,\ \bar{y}\ +\ \theta_i\,.\,(\bar{y}\,' - \bar{y})\big]\,.\,(\,y'_j - y_j\,) \\ i = 1\,,\,2\,,\ \cdots\,,\,n \end{cases}$$

Considerando agora o determinante $B\,(\,\bar{x}\ ,\ \bar{y}\ ,\ \bar{y}\,'\,) = \Big|\ f^{'}_{i y_j}\big[\bar{x}\ ,\ \bar{y} + \theta_i\ .(\bar{y}\,' - \bar{y})\big]\Big|$ a con-tinuidade das derivadas parciais $f^{'}_{i y_j}(\bar{x}\,,\bar{y}\,)$ no ponto $(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$, permite concluir que,

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{y}\to\bar{b}\\ \bar{y}'\to\bar{b}}} B(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{y}') = B(\bar{a}\,,\bar{b}\,,\bar{b}) = |\,f'_{i\,y_j}(\bar{a}\,,\,\bar{b})\,| = D(\bar{a}\,,\bar{b}) \neq 0 \quad ,$$

e daqui resulta $B\,(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{y}') \neq 0$ para $(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{y}') \in \mathrm{V_s}\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,,\bar{b})$ com certo $s < r$.

Fixando $\delta = s/\sqrt{2}$, tem-se :

$$\begin{aligned}
(\bar{x}\,,\bar{y}) \in \mathrm{V}_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}) &\Rightarrow \|\bar{x}-\bar{a}\|^2 + \|\bar{y}-\bar{b}\|^2 < \delta^2 = s^2/2 \\
(\bar{x}\,,\bar{y}') \in \mathrm{V}_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}) &\Rightarrow \|\bar{x}-\bar{a}\|^2 + \|\bar{y}'-\bar{b}\|^2 < \delta^2 = s^2/2 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|\bar{y}'-\bar{b}\|^2 < \delta^2 = s^2/2
\end{aligned}$$

e então, $\|\bar{x}-\bar{a}\|^2 + \|\bar{y}-\bar{b}\|^2 + \|\bar{y}'-\bar{b}\|^2 < s^2$, ou seja, $(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{y}') \in \mathrm{V_s}(\bar{a}\,,\bar{b}\,,\bar{b})$. Portanto, com $(\bar{x}\,,\bar{y})$ e $(\bar{x}\,,\bar{y}')$ pertencentes a $\mathrm{V}_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b})$ tem-se $B\,(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{y}') \neq 0$; então, sendo esses $(\bar{x}\,,\bar{y})$ e $(\bar{x}\,,\bar{y}')$ soluções do sistema $f_i(\bar{x}\,,\bar{y}) = 0$, $i = 1\,,2\,,\ldots\,,n$, as igualdades (1) supra escrevem-se como segue para esses pontos:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\,,\;\bar{y} + \theta_i\,.\,(\bar{y}'-\bar{y})\right].\,(y'_j - y_j) = 0 \\ i = 1\,,2\,,\cdots,n \end{cases} \qquad ,$$

e como $B\,(\bar{x}\,,\bar{y}\,,\bar{y}') = \left|\,f'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\,,\;\bar{y}+\theta_i\,.(\bar{y}'-\bar{y})\right]\right| \neq 0$, o sistema homogéneo precedente nos $y'_j - y_j$ só admite a solução nula e portanto, necessariamente, $y'_j = y_j$ para $j = 1\,,2\,,\ldots\,,n$, ou seja, $(\bar{x}\,,\bar{y}) = (\bar{x}\,,\bar{y}')$. Não pode então haver em $\mathrm{V}_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b})$ duas soluções $(\bar{x}\,,\bar{y})$ e $(\bar{x}\,,\bar{y}')$ com o mesmo $\bar{x}$ e $\bar{y} \neq \bar{y}'$ para o sistema $f_i(\bar{x}\,,\bar{y}) = 0$, $i = 1\,,2\,,\ldots\,,n$, tal como se pretendia demonstrar.

Teorema 6 : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *e fixado qualquer* $\delta_1 < \delta$, *então* $\varphi\,(\bar{x}\,,\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2\,(\bar{x}\,,\bar{y})$ *verifica a desigualdade* $\varphi\,(\bar{x}\,,\bar{y}) - \varphi\,(\bar{x}\,,\bar{b}) > 0$ *para,*

$$\bar{x} \in \mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \quad e \quad \bar{y} \in F(\bar{b}\,,\delta_1) = \{\,\bar{y} :\ \|\bar{y}-\bar{b}\| = \delta_1\,\}\ ,$$

com certo $\varepsilon < \sqrt{\delta^2 - \delta_1^2}$. ***Nota*** *: O valor* δ *que este enunciado menciona é o que se refere na tese do teorema* 5 .

Demonstração : Fixado $\delta_1 < \delta$ é fácil ver que $\bar{y} \in F(\bar{b}\,,\delta_1) \Rightarrow \varphi\,(\bar{a}\,,\bar{y}) > 0$. Com efeito, se certo $\bar{y}_1 \in F(\bar{b}\,,\delta_1)$ anulasse $\varphi\,(\bar{a}\,,\bar{y})$ ter-se-ia,

$$\varphi\,(\overline{a}\,,\overline{y}_1) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2\,(\overline{a}\,,\overline{y}_1) = 0 \;\Rightarrow\; f_1(\overline{a}\,,\overline{y}_1) = f_2(\overline{a}\,,\overline{y}_1) = \cdots = f_n(\overline{a}\,,\overline{y}_1) = 0$$

e como $\varphi\,(\overline{a}\,,\overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2\,(\overline{a}\,,\overline{b}) = 0$, por ser $(\overline{a}\,,\overline{b})$ solução do sistema $f_i(\overline{x}\,,\overline{y}) = 0$, $i = 1\,,2\,,\ldots\,,n$, haveria, contrariamente ao estabelecido no teorema 5, duas soluções deste sistema em $V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b})$, a saber $(\overline{a}\,,\overline{b})$ e $(\overline{a}\,,\overline{y}_1)$, esta última também pertencente aquela vizinhança, uma vez que,

$$\|(\overline{a}\,,\overline{y}_1) - (\overline{a}\,,\overline{b})\| = \|(\overline{0}\,,\overline{y}_1 - \overline{b})\| = \|\overline{y}_1 - \overline{b}\| = \delta_1 < \delta\,.$$

Tem-se portanto para qualquer $\overline{y} \in F(\overline{b}\,,\delta_1)$,

$$(1) \qquad \varphi\,(\overline{a}\,,\overline{y}) - \varphi\,(\overline{a}\,,\overline{b}) = \varphi\,(\overline{a}\,,\overline{y}) > 0\,,$$

e vejamos agora que existe certo $\varepsilon < \sqrt{\delta^2 - \delta_1^2}$ tal que ,

$$\overline{x} \in V_\varepsilon\,(\overline{a}) \;\wedge\; \overline{y} \in F(\overline{b}\,,\delta_1) \Rightarrow \varphi\,(\overline{x}\,,\overline{y}) - \varphi\,(\overline{x}\,,\overline{b}) > 0\,.$$

De facto,

- Em primeiro lugar, com $\varepsilon < \sqrt{\delta^2 - \delta_1^2}$, se $\overline{x} \in V_\varepsilon\,(\overline{a})$ e $\overline{y} \in F(\overline{b}\,,\delta_1)$, então $(\overline{x}\,,\overline{y}) \in V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b})$ pois de $\|\overline{x} - \overline{a}\| < \varepsilon$ e $\|\overline{y} - \overline{b}\| = \delta_1$ resulta,

  $$\|\overline{x} - \overline{a}\|^2 + \|\overline{y} - \overline{b}\|^2 < \varepsilon^2 + \delta_1^2 = \delta^2 - \delta_1^2 + \delta_1^2 = \delta^2\,,$$

  ou ainda, $\|(\overline{x}\,,\overline{y}) - (\overline{a}\,,\overline{b})\| < \delta$.

- Em segundo lugar, se para $\eta_p = \dfrac{\sqrt{\delta^2 - \delta_1^2}}{p+1}$ $(p = 1\,,2\,,3\,,\ldots)$ sempre existissem $\overline{x}_p \in \mathbf{V}_{\eta_p}(\overline{a})$ e $\overline{y}_p \in F(\overline{b}\,,\delta_1)$ tais que $\varphi\,(\overline{x}_p\,,\overline{y}_p) - \varphi\,(\overline{x}_p\,,\overline{b}) \le 0$, então, escolhida uma subsucessão $\overline{z}_p = \overline{y}_{\alpha_p}$ com limite $\overline{y}$ [pertencente a $F(\overline{b}\,,\delta_1)$ por que este conjunto é limitado e fechado] e fazendo $\overline{w}_p = \overline{x}_{\alpha_p}$, ter-se-ia ,

  $$\varphi\,(\overline{w}_p\,,\overline{z}_p) - \varphi\,(\overline{w}_p\,,\overline{b}) \le 0\,,\ \text{com}\ lim\ \overline{z}_p = \overline{y}\ \text{e}\ lim\ \overline{w}_p = \overline{a}\,,$$

  donde, devido à continuidade de φ em $(\overline{a}\,,\overline{b})$ e $(\overline{a}\,,\overline{y})$, resultaria,

  $$\varphi\,(\overline{a}\,,\overline{y}) - \varphi\,(\overline{a}\,,\overline{b}) \le 0\,,$$

o que contradiz a desigualdade (1) supra .

O teorema está demonstrado.

<u>Teorema 7</u> : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, o sistema de equações* $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ *,* $i = 1, 2, \dots, n$ *, define implicitamente um sistema de funções* $y_j = g_j(\bar{x})$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ *em certa* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *e tem-se ainda* $b_j = g_j(\bar{a})$ *, ou seja , em termos vectoriais,* $\bar{b} = g(\bar{a})$ *. E para cada* $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$*, tem-se* $[\bar{x}, g(\bar{x})] \in V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$*, com o* δ *a que se refere a tese do teorema* 5.

<u>Demonstração</u> : Com a vizinhança $V_\varepsilon(\bar{a})$ referida na tese do teorema 6, considere-se um particular $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e atente-se na função de $\bar{y}$ que se obtém fixando aquele $\bar{x}$ em $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2(\bar{x}, \bar{y})$. A desigualdade do teorema 6, ou seja,

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{x}, \bar{b}) > 0$$

para, $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e $\bar{y} \in F(\bar{b}, \delta_1) = \{\bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| = \delta_1\}$, mostra que em $\bar{y} = \bar{b}$ a função $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ assume menor valor do que em qualquer $\bar{y} \in F(\bar{b}, \delta_1)$; ora $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, função de $\bar{y}$, sendo contínua no conjunto limitado fechado $\{\bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \le \delta_1\}$ tem aí mínimo absoluto e, face ao que ficou dito, o respectivo minimizante tem que ser ponto interior de $\{\bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \le \delta_1\}$; então, para esse minimizante, $\bar{y} = g(\bar{x})$, tem-se :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_j} = 2 f_1 \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial y_j} + 2 f_2 \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial y_j} + \cdots + 2 f_n \cdot \dfrac{\partial f_n}{\partial y_j} \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

em que as funções f_i e as derivadas $\partial f_i / \partial y_j$ devem ser tomadas no ponto $[\bar{x}, g(\bar{x})]$.

É fácil constactar que $[\bar{x}, g(\bar{x})] \in V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$, com o δ a que se refere a tese do teorema 5 :

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{a}\|^2 < \varepsilon^2 < \delta^2 - \delta_1^2 \quad \text{(ver enunciado do teorema 6)}$$

$$g(\bar{x}) \in INT.\ \{\bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \le \delta_1\} \Rightarrow \|g(\bar{x}) - \bar{b}\|^2 < \delta_1^2$$

donde se tira, $\|\bar{x} - \bar{a}\|^2 + \|g(\bar{x}) - \bar{b}\|^2 = \|[\bar{x}, g(\bar{x})] - (\bar{a}, \bar{b})\|^2 < \delta^2$, ou seja, $\|[\bar{x}, g(\bar{x})] - (\bar{a}, \bar{b})\| < \delta$. Mas de $[\bar{x}, g(\bar{x})] \in V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$ resulta,

$$D[\bar{x}, g(\bar{x})] = B[\bar{x}, g(\bar{x}), g(\bar{x})] \ne 0 \quad \text{(ver demonstração do teorema 5)},$$

concluindo-se então que o sistema homogéneo (1) supra, nas incógnitas f_1 , f_2 , … , f_n , cujo determinante é $D\,[\,\bar{x}\,,\ g(\,\bar{x}\,)] \neq 0$ só admite a solução nula e,portanto,

$$f_i[\,\bar{x}\,,\ g(\,\bar{x}\,)] \;=\; 0 \quad ,\ i\ = 1\ , 2\ , \dots\ , n\ .$$

Vê-se sem dificuldade que para cada $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ há um só minimizante absoluto de $\varphi\,(\bar{x}\,,\bar{y})$ em $\{\,\bar{y}:\ \|\bar{y}\ -\ \bar{b}\| < \delta_1\,\}$, condição que é essencial para evitar qualquer ambiguidade na definição da função $\bar{y}\ = g(\bar{x})$: de facto, se também $h(\bar{x}) \neq g\,(\bar{x})$ fosse minimizante absoluto, para ambos se teria,

$$[\,\bar{x}\,,\ g(\,\bar{x}\,)] \in V_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,) \quad , \quad [\,\bar{x}\,,\ h(\,\bar{x}\,)] \in V_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$$

$$f_i[\,\bar{x}\,,\ g(\,\bar{x}\,)] \;=\; f_i[\,\bar{x}\,,\ h(\,\bar{x}\,)] \;=\; 0 \quad ,\ i\ = 1\ , 2\ , \dots\ , n\ ,$$

o que seria contra o estabelecido no teorema 5 .

Fica assim construída uma função vectorial de variável vectorial, $\bar{y}\ = g(\bar{x})$, isto é, um sistema de funções $y_j = g_j(\,\bar{x}\,)$ ($j = 1\ , 2\ , \dots\ , n$) , definida em $V_\varepsilon(\bar{a})$ e que verifica o sistema de equações $f_i(\bar{x}\,,\bar{y}) =\ 0$, $i = 1\ , 2\ , \dots\ , n$. E claro que para $\bar{x} = \bar{a}$, o mínimo absoluto de $\varphi\,(\bar{a}\,,\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2\,(\bar{a}\ ,\bar{y})$ obtém-se para $\bar{y}\ = \bar{b}$ [porque $\varphi\,(\bar{a}\ ,\bar{b}\,) =\ 0\,$], isto é , $\bar{b} =\ g(\,\bar{a}\,)$, ou ainda, sendo b_j a j-ésima coordenada de $\bar{b}$, $b_j = g_j(\,\bar{a}\,)$.

O teorema está demonstrado.

<u>Teorema 8</u> : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, as funções* $y_j = g_j\,(\,\bar{x}\,)$ *a que se refere o teorema* 7*, são contínuas na* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *em que são definidas* .

<u>Demonstração</u> : Seja $\bar{x}_0 \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e considere-se uma sucessão $\bar{x}_p \in V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que $lim\,\bar{x}_p =\ \bar{x}_0$. Vejamos que a sucessão correspondente $\bar{y}_p = g\,(\bar{x}_p)$ tem por limite precisamente $g\,(\bar{x}_0)$, o que garantirá a continuidade de $\bar{y}\ = g(\bar{x})$ e, portanto, de cada uma das funções $y_j = g_j(\,\bar{x}\,)$ em $\bar{x}_0$.

Pelo teorema 7, $[\,\bar{x}_p\,,\ g\,(\,\bar{x}_p\,)] \in V_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)$ e, portanto, $\bar{y}_p = g\,(\bar{x}_p)$ é uma sucessão limitada. Se $\bar{y}_p$ não tivesse $\bar{y}_0 = g\,(\bar{x}_0)$ como limite, então certa subsucessão $\bar{y}_{\alpha_p}$ teria limite $\bar{y}_* \neq \bar{y}_0$.

Como se viu na demonstação do teorema 7, $\| \bar{y}_{\alpha_p} - \bar{b} \| = \| g(\bar{x}_{\alpha_p}) - \bar{b} \| < \delta_1 < \delta$, donde sai , $\| \bar{y}_* - \bar{b} \| \le \delta_1 < \delta$. Ora, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $p = 1, 2, 3, \dots$, tem-se $f_i(\bar{x}_{\alpha_p}, \bar{y}_{\alpha_p}) = 0$, donde resulta, pela continuidade das funções f_i , $f_i(\bar{x}_0, \bar{y}_*) = 0$.

Dado que $(\bar{x}_0 , \bar{y}_0) = [\bar{x}_0, g(\bar{x}_0)] \in V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$, se se provar que o ponto $(\bar{x}_0 , \bar{y}_*)$ também pertence a $V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$, pode concluir-se que, se fosse possível ser $\bar{y}_* \neq \bar{y}_0$, então em $V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$ o sistema $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, teria soluções distintas $(\bar{x}_0 , \bar{y}_0)$ e $(\bar{x}_0 , \bar{y}_*)$, contrariamente ao estabelecido no teorema 5. E tal será suficiente para provar a inexistência do sublimite $\bar{y}_* \neq \bar{y}_0 = g(\bar{x}_0)$ e dar como concluída a demonstração do teorema 8.

Ora,

$$\bar{x}_0 \in V_\varepsilon(\bar{a}) \Rightarrow \| \bar{x}_0 - \bar{a} \|^2 < \varepsilon^2 < \delta^2 - \delta_1^2 \quad \text{(ver enunciado do teorema 6)}$$

e como $\| \bar{y}_* - \bar{b} \| \le \delta_1$, resulta,

$$\| \bar{x}_0 - \bar{a} \|^2 + \| \bar{y}_* - \bar{b} \|^2 = \| (\bar{x}_0, \bar{y}_*) - (\bar{a}, \bar{b}) \|^2 < \delta^2 ,$$

ou seja, $\| (\bar{x}_0, \bar{y}_*) - (\bar{a}, \bar{b}) \| < \delta$, o que permite concluir que, $(\bar{x}_0 , \bar{y}_*) \in V_\delta(\bar{a}, \bar{b})$.

<u>Teorema 9</u> : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, o sistema de funções* $y_j = g_j(\bar{x})$ *a que se refere o teorema* 7 *é o único definido implicitamente pelo sistema de equações* $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ *,* $i = 1, 2, \dots, n$ *, que verifica as propriedades :* 1) $b_j = g_j(\bar{a})$ *;* 2) *As funções* $g_j(\bar{x})$ *são contínuas em* $V_\varepsilon(\bar{a})$*. Ou seja, em termos mais gerais, se um outro sistema de funções* $y_j = h_j(\bar{x})$ *for definido implicitamente pelo mesmo sistema de equações em* $V_\eta(\bar{a})$ *e verificar* 1) $b_j = h_j(\bar{a})$ *e* 2) *As funções* $h_j(\bar{x})$ *são contínuas em* $V_\eta(\bar{a})$*, então nos pontos comuns às duas vizinhanças tem-se* $g_j(\bar{x}) = h_j(\bar{x})$.

<u>Demonstração</u> : Seja $\theta = Mín\,\{\varepsilon, \eta\}$ e definam-se os conjuntos,

$$A_0 = \{ \bar{x} : \bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \wedge h(\bar{x}) \neq g(\bar{x}) \} \quad \text{e} \quad A_1 = \{ \bar{x} : \bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \wedge h(\bar{x}) = g(\bar{x}) \},$$

em que, $h(\bar{x}) = [h_1(\bar{x})\ h_2(\bar{x})\ \cdots\ h_n(\bar{x})]^T$ e $g(\bar{x}) = [g_1(\bar{x})\ g_2(\bar{x})\ \cdots\ g_n(\bar{x})]^T$. Tem-se $A_1 \neq \varnothing$ porque, com $\bar{x} = \bar{a}$, $\bar{b} = g(\bar{a}) = h(\bar{a})$. Dado que $A_0 \cup A_1 = V_\theta(\bar{a})$ é um conjunto conexo e $A_0 \cap A_1 = \varnothing$, se for $A_0 \neq \varnothing$, só há duas possibilidades : a) Ou em A_0 há um ponto de acumulação de A_1; b) Ou em A_1 há um ponto de acumulação de A_0 .

Vejamos que nenhuma destas alternativas pode ocorrer, donde se concluirá que $A_0 = \varnothing$, ou seja, $A_1 = V_\theta(\overline{a})$, o que equivale a afirmar que $h(\overline{x}) = g(\overline{x})$ nos pontos $\overline{x} \in V_\theta(\overline{a})$ que é precisamente o que se pretende demonstrar.

A alternativa a) não pode ocorrer. Pois se certo $\overline{x}_0 \in A_0$ pudesse ser ponto de acumulação de A_1, existiria uma sucessão $\overline{x}_p \in A_1$ tal que $lim\ \overline{x}_p = \overline{x}_0$. Mas, devido à continuidade das funções $h(\overline{x})$ e $g(\overline{x})$ no ponto $\overline{x}_0$,

$$\overline{x}_p \in A_1 \Rightarrow h(\overline{x}_p) = g(\overline{x}_p) \Rightarrow h(\overline{x}_0) = g(\overline{x}_0) \Rightarrow \overline{x}_0 \in A_1 \ ;$$

ora não é possível que $\overline{x}_0 \in A_0$ seja também pertencente a A_1 porque estes dois conjuntos são disjuntos.

A alternativa b) também não pode ocorrer. Se certo $\overline{x}_0 \in A_1$ pudesse ser ponto de acumulação de A_0, existiria uma sucessão $\overline{x}_p \in A_0$ tal que $lim\ \overline{x}_p = \overline{x}_0$. Devido à continuidade da função $h(\overline{x})$ no ponto $\overline{x}_0$, seria então, $lim\ h(\overline{x}_p) = h(\overline{x}_0) = g(\overline{x}_0)$; mas como ,

$$[\,\overline{x}_0,\ h(\overline{x}_0)] = [\,\overline{x}_0,\ g(\overline{x}_0)] \in V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b}\,) \quad \text{(ver teorema 7)}$$

de $lim\ [\,\overline{x}_p,\ h(\overline{x}_p)] = [\,\overline{x}_0,\ g(\overline{x}_0)] \in V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b}\,)$ resultaria que, para $p = k$ suficientemente grande,

$$[\,\overline{x}_k,\ g(\overline{x}_k)] \in V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b}\,) \ \ ,\ \ [\,\overline{x}_k,\ h(\overline{x}_k)] \in V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b}\,) \ \text{ e } \ h(\overline{x}_k) \neq g(\overline{x}_k)\,.$$

O sistema de equações $f_i(\overline{x}\,,\overline{y}) = 0$, $i = 1\,,2\,,\,\dots\,,n$, teria então em $V_\delta\,(\overline{a}\,,\overline{b}\,)$ duas soluções distintas, $[\,\overline{x}_k,\ g(\overline{x}_k)]$ e $[\,\overline{x}_k,\ h(\overline{x}_k)]$, contrariamente ao estabelecido no teorema 5.

<u>Teorema 10</u>: *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, as funções* $y_j = g_j(\,\overline{x}\,)$ *referidas no teorema* 7*, são diferenciáveis na vizinhança* $V_\varepsilon(\overline{a})$ *em que são definidas .*

<u>Demonstração</u> : Considere-se um qualquer $\overline{x} \in V_\varepsilon(\overline{a})$ e seja α suficientemente pequeno de modo que $\overline{x} + \overline{h} \in V_\varepsilon(\overline{a})$ desde que $\|\,\overline{h}\,\| < \alpha$. A continuidade das funções $y_j = g_j(\,\overline{x}\,)$ garante que, sendo $k_j = g_j(\,\overline{x} + \overline{h}\,) - g_j(\,\overline{x}\,)$, se verifica,

$$\lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \overline{k} = \lim_{\overline{h} \to \overline{0}} \left[k_1\ k_2\ \cdots\ k_n\right]^T = \overline{0} \ .$$

Dado que o sistema de funções $y_j = g_j(\bar{x})$ é definido implicitamente pelo sistema de equações $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, podemos escrever,

$$f_i[\bar{x}, g(\bar{x})] = 0 \text{ e } f_i[\bar{x} + \bar{h}, g(\bar{x} + \bar{h})] = f_i[\bar{x} + \bar{h}, g(\bar{x}) + \bar{k}] = 0 ,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Atendendo agora à diferenciabilidade das funções $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ no ponto $[\bar{x}, g(\bar{x})]$, tem-se :

$$(1) \quad \begin{cases} f_i\left[\bar{x}+\bar{h}, g(\bar{x})+k\right] - f_i\left[\bar{x}, g(\bar{x})\right] = \sum\limits_{p=1}^{m} f'_{i x_p}.h_p + \sum\limits_{j=1}^{n} f'_{i y_j}.k_j + \varepsilon_i(\bar{h}, \bar{k}).\|(\bar{h}, \bar{k})\| = 0 \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

em que as derivadas parciais de $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ devem ser tomadas no ponto $[\bar{x}, g(\bar{x})]$ e, por outro lado,

$$\lim_{\substack{\bar{h} \to \bar{0} \\ \bar{k} \to \bar{0}}} \varepsilon_i(\bar{h}, \bar{k}) = 0 ,$$

devendo ainda notar-se que, como $\bar{k} = g(\bar{x} + \bar{h}) - g(\bar{x})$, $\bar{h} \to \bar{0} \Rightarrow \bar{k} \to \bar{0}$ e, portanto, $\varepsilon_i(\bar{h}, \bar{k})$ é em última análise função de $\bar{h}$ e $\lim\limits_{\bar{h} \to \bar{0}} \varepsilon_i(\bar{h}, \bar{k}) = 0$.

Com vista a facilitar o desenvolvimento da argumentação, vamos dar forma mais conveniente às parcelas residuais $\varepsilon_i .\|(\bar{h}, \bar{k})\|$, em que $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\bar{h}, \bar{k})$. Notando que,

$$\|(\bar{h}, \bar{k})\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_m^2 + k_1^2 + \cdots + k_n^2} \le |h_1| + \cdots + |h_m| + |k_1| + \cdots + |k_n| ,$$

conclui-se que existe um $\theta \in [0, 1]$ tal que,

$$\|(\bar{h}, \bar{k})\| = \theta.\left(\sum_{p=1}^{m} |h_p| + \sum_{j=1}^{n} |k_j|\right) ;$$

definindo agora, para $i, j = 1, 2, \ldots, n$ e $p = 1, 2, \ldots, m$,

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{\varepsilon_i . \theta . |k_j|}{k_j} \text{ (se } k_j \ne 0 \text{) e } \varepsilon^*_{ij} = 0 \text{ (se } k_j = 0 \text{)}$$

$$\delta^*_{ip} = \frac{\varepsilon_i . \theta . |h_p|}{h_p} \text{ (se } h_j \ne 0 \text{) e } \delta^*_{ij} = 0 \text{ (se } h_j = 0 \text{)} ,$$

tem-se ,

$$\varepsilon_i \,.\|(\bar{h}\,,\,\bar{k})\| \;=\; \varepsilon_i \,.\,\theta .\left(\sum_{p=1}^{m}\,|\,h_p\,|\;+\;\sum_{j=1}^{n}\,|k_j\,|\right) = \sum_{p=1}^{m}\;\delta^*_{i\,p}\,.\,h_p\;+\;\sum_{j=1}^{n}\;\varepsilon^*_{i\,j}\,.\,k_j$$

com $\lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}}\;\varepsilon^*_{i\,j} = \lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}}\;\delta^*_{i\,p} = 0$. As igualdades (1) supra podem então escrever-se do seguinte modo:

$$(2)\quad \sum_{p=1}^{m}\;f'_{i\,x_p}\,.\,h_p\;+\;\sum_{j=1}^{n}\;f'_{i\,y_j}\,.\,k_j\;+\;\sum_{p=1}^{m}\;\delta^*_{i\,p}\,.\,h_p\;+\;\sum_{j=1}^{n}\;\varepsilon^*_{i\,j}\,.\,k_j\;=\;0$$

$$(3)\quad \sum_{p=1}^{m}\;(f'_{i\,x_p}+\,\delta^*_{i\,p})\,.\,h_p\;+\;\sum_{j=1}^{n}\;(f'_{i\,y_j}+\varepsilon^*_{i\,j})\,.\,k_j\;=\;0$$

Pode escolher-se $\rho\;\le\alpha$ suficientemente pequeno de forma que com $\|\bar{h}\|<\;\rho$ se tenha o determinante $|\,f'_{i\,y_j}+\,\varepsilon^*_{i\,j}\,|\ne 0$, dado que,

$$[\,\bar{x}\,,\;g(\,\bar{x}\,)]\in \mathrm{V}_\delta\,(\bar{a}\,,\bar{b}\,)\;\Rightarrow\;D\,[\,\bar{x}\,,g(\,\bar{x}\,)]\;=\left|\;f'_{i\,y_j}\big[\bar{x}\;,\;\;g(\bar{x})\big]\right|\ne 0\;\Rightarrow\;|\,f'_{i\,y_j}\;+\varepsilon^*_{i\,j}\,|\ne 0,$$

(ver demonstração do teorema 7)

com os $\varepsilon^*_{i\,j}$ suficientemente pequenos. E então, para $\|\bar{h}\|<\;\rho$, o sistema

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\;(\,f'_{i\,y_j}\;+\varepsilon^*_{i\,j})\;.\,k_j\;\;=\;-\;\sum_{p=1}^{m}\;(\;f'_{i\,x_p}+\;\delta^*_{i\,p}\,)\,.\,h_p\\ i\;=1\;,2\;,\;\cdots\,,\,n\end{cases}$$

que se obtém a partir das igualdades (3) passando a segundo membro o primeiro somatório, permite obter,

$$(4)\qquad\qquad k_j\;=\;-\;\sum_{p=1}^{m}\;\beta_{p\,j}\,.\,h_p\quad(\;j\;=1\;,2\;,\ldots,n\;)\quad,$$

em que cada $\beta_{p\,j}$ é uma fracção cujo denominador é o determinante $|\,f'_{i\,y_j}\;+\;\varepsilon^*_{i\,j}\,|\ne 0$ e cujo numerador é determinante que daquele se obtém substituindo a sua coluna j pela coluna

$$\left[f'_{1x_p}+\delta^*_{1p}\quad\; f'_{2x_p}+\delta^*_{2p}\quad\;\cdots\quad\; f'_{nx_p}+\delta^*_{np}\;\right]^T\;.$$

Convirá notar que,

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}}\;\beta_{p\,j}\;=\;\lambda_{\,p\,j}(x_1\,,\,x_2\;,\;\ldots\;,\,x_m)\qquad\text{(finito)}\,,$$

sendo que este limite é uma fracção cujo denominador é o determinante $D\,[\,\bar{x}\,,\,g\,(\,\bar{x}\,)]\;=$ $=\left|\,f'_{i\,y_j}\big[\bar{x}\;,\;\;g\,(\bar{x})\big]\right|\;\ne 0$ e cujo numerador é determinante que daquele se obtém substituindo a sua coluna j pela coluna ,

$$\left[f'_{1x_p} \quad f'_{2x_p} \quad \cdots \quad f'_{nx_p} \right]^T \ .$$

Substituindo (4) no último somatório de (2) e passando ao segundo membro todos os somatórios excepto o segundo, obtém-se ($\|\bar{h}\| < \rho$),

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} f'_{iy_j} \, . \, k_j = - \sum\limits_{p=1}^{m} f'_{ix_p} \, . \, h_p - \sum\limits_{p=1}^{m} (\delta^*_{ip} - \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon^*_{ij} \, . \, \beta_{pj}) . h_p \\ i = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

Este sistema permite obter, para $\|\bar{h}\| < \rho$,

$$k_j = g_j(\bar{x} + \bar{h}) - g_j(\bar{x}) = - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \, . \, h_p - \sum_{p=1}^{m} \mu_{pj} . h_p$$

em que $\lambda_{pj}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tem o significado dado acima e μ_{pj} é uma fracção cujo denominador é o determinante $D[\bar{x}, g(\bar{x})] = \left| f'_{iy_j}[\bar{x}, g(\bar{x})] \right| \neq 0$ e cujo numerador é determinante que daquele se obtém substituindo a sua coluna j pela coluna,

$$\left[\delta^*_{1p} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^*_{1j} \, . \, \beta_{pj} \quad \delta^*_{2p} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^*_{2j} \, . \, \beta_{pj} \quad \cdots \quad \delta^*_{np} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^*_{nj} \, . \, \beta_{pj} \right]^T \ .$$

Claro que $\lim\limits_{\bar{h} \to 0} \mu_{pj} = 0$. Fazendo então,

$$\beta^*_j = - \sum_{p=1}^{m} \mu_{pj} \cdot \frac{h_p}{\|\bar{h}\|} \quad (\bar{h} \neq \bar{0}) \quad \text{e} \quad \beta^*_j = 0 \quad (\bar{h} = \bar{0}),$$

obtém-se finalmente

$$(5) \qquad k_j = g_j(\bar{x} + \bar{h}) - g_j(\bar{x}) = - \sum_{p=1}^{m} \lambda_{pj}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \, . \, h_p + \beta^*_j \, . \, \|\bar{h}\|$$

e claro que $\lim\limits_{\bar{h} \to 0} \beta^*_j = 0$.

Note-se que de (5) sai,

$$(6) \qquad \frac{\partial g_j(\bar{x})}{\partial x_p} = - \lambda_{pj}(x_1, x_2, \ldots, x_m) \ ,$$

que é o resultado que se obtém pela técnica estudada no ponto 2 : como se viu então, esta derivada parcial sai do sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial g_1}{\partial x_p} + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial g_2}{\partial x_p} + \cdots + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \dfrac{\partial g_j}{\partial x_p} + \cdots + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_n} \cdot \dfrac{\partial g_n}{\partial x_p} = - \dfrac{\partial f_i}{\partial x_p} \\ i = 1 \,,\, 2 \,,\, \ldots \,,\, n \end{cases}$$

cuja resolução dá para a derivada (6) uma fracção cujo denominador é o determinante $D\,[\,\bar{x}\,,\, g\,(\,\bar{x}\,)] = \left| f'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\,,\ g\,(\bar{x})\right]\right| \neq 0$ e cujo numerador é determinante que daquele se obtém substituindo a sua coluna j pela coluna ,

$$\left[-f'_{1x_p} \quad -f'_{2x_p} \quad \cdots \quad -f'_{n\,x_p}\right]^T \ .$$

o que corresponde precisamente a $-\lambda_{p\,j}(x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_m)$ [ver acima o significado de $\lambda_{p\,j}(x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_m)$] .

Como alternativa à demonstração anteriormente apresentada, o teorema de existência e continuidade de um sistema de funções definido implicitamete por um sistema de equações pode ser demonstrado por aplicação do teorema do ponto fixo.

Vejamos primeiro dois resultados auxiliares.

Teorema 11 : *Sendo* $h\,(\,\bar{x},\, \bar{y}\,) = [\, h_1(\,\bar{x},\, \bar{y}\,) \quad h_2(\,\bar{x},\, \bar{y}\,) \quad \ldots \quad h_n(\,\bar{x},\, \bar{y}\,)]^T$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R^{m+n}}$ *em* $\mathbf{R^n}$ *diferenciável em certa vizinhança de* $(\,\bar{a}\,,\,\bar{b}\,)$*, tal que* $h\,(\,\bar{a}\,,\,\bar{b}\,) = \bar{b}$ *e cujas derivadas parciais* $h'_{i\,y_j}(\bar{x},\, \bar{y})$ $(\, i\,,\, j = 1\,,\, 2\,,\, \ldots\,,\, n\,)$ *são todas nulas e contínuas em* $(\,\bar{a}\,,\,\bar{b}\,)$ *, então existem* $\varepsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *tais que para cada* $\bar{x} \in V_\varepsilon\,(\bar{a})$*, a equação em* $\bar{y}$*,* $h\,(\,\bar{x},\, \bar{y}\,) = \bar{y}$*, tem uma e uma só solução em* $V_\delta\,(\,\bar{b}\,)$*; e existe um conjunto fechado contido em* $V_\delta\,(\,\bar{b}\,)$ *ao qual pertencem todas essas soluções.*

Demonstração : Seja $V_r(\,\bar{a}\,,\,\bar{b}\,)$ a vizinhança em que as funções $h_i(\,\bar{x},\, \bar{y}\,)$ são diferenciáveis. Sendo $(\,\bar{x},\, \bar{y}\,'\,)$ e $(\,\bar{x},\, \bar{y}\,''\,)$ pertencentes a $V_r(\,\bar{a}\,,\,\bar{b}\,)$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, então o ponto

$[\,\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \lambda\,.(\bar{y}'' - \bar{y}')\,]$ também pertence a essa mesma vizinhança. Devido à diferenciabilidade das $h_i(\bar{x}\,,\,\bar{y})$ em $V_r(\bar{a}\,,\,\bar{b})$, as funções $\varphi_i(\lambda) = h_i[\,\bar{x}\,,\;\bar{y}' + \lambda\,.(\bar{y}'' - \bar{y}')\,]$, $0 \le \lambda \le 1$, podem derivar-se pela regra da função composta :

$$\varphi_i'(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \lambda\,.(\bar{y}'' - \bar{y}')\right].\,(y_j'' - y_j') \quad , \quad 0 \le \lambda \le 1\,.$$

Aplicando o teorema de Lagrange a $\varphi_i'(\lambda)$ em $[0\,,1]$, tem-se, com $0 \le \theta_i \le 1$,

$$(1) \qquad \begin{cases} h_i(\bar{x}\,,\,\bar{y}'') - h_i(\bar{x}\,,\,\bar{y}') = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \theta_i\,.\,(\bar{y}'' - \bar{y}')\right].\,(y''_j - y'_j) \\ i = 1\,,2\,,\,\cdots\,,n \end{cases}$$

Como as derivadas parciais $h'_{i\,y_j}(\bar{x}\,,\,\bar{y})$ são por hipótese nulas e contínuas em $(\bar{a}\,,\,\bar{b})$, resulta,

$$\lim_{\substack{\bar{x}\to\bar{a}\\ \bar{y}'\to\bar{b}\\ \bar{y}''\to\bar{b}}} h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \theta_i\,.\,(\bar{y}'' - \bar{y}')\right] = h'_{i\,y_j}(\bar{a}\,,\,\bar{b}) = 0\,.$$

Fixando $c \in\,]\,0\,,1\,[$ existe então uma $V_s(\bar{a}\,,\bar{b}\,,\bar{b})$, com certo $s < r$, tal que,

$$(\bar{x}\,,\,\bar{y}'\,,\,\bar{y}'') \in V_s(\bar{a}\,,\bar{b}\,,\bar{b}) \;\Rightarrow\; \left|h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \theta_i\,.(\bar{y}'' - \bar{y}')\right]\right| \le c/n^2\,.$$

De (1) resulta então, pela desigualdade modular da soma,

$$|\,h_i(\bar{x}\,,\,\bar{y}'') - h_i(\bar{x}\,,\,\bar{y}')\,| \le \sum_{j=1}^{n}\left|h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \theta_i\,.\,(\bar{y}'' - \bar{y}')\right]\right|.\,|\,y''_j - y'_j\,|\,,$$

e para $(\bar{x}\,,\,\bar{y}'\,,\,\bar{y}'') \in V_s(\bar{a}\,,\bar{b}\,,\bar{b})$ tem-se, portanto,

$$\begin{aligned}
\|\,h(\bar{x}\,,\,\bar{y}'') - h(\bar{x}\,,\,\bar{y}')\,\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|h_i(\bar{x},\,\bar{y}'') - h_i(\bar{x},\,\bar{y}')|^2} \le \\
&\le \sum_{i=1}^{n}|h_i(\bar{x},\,\bar{y}'') - h_i(\bar{x},\,\bar{y}')| \le \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \theta_i\,.\,(\bar{y}'' - \bar{y}')\right]\right|.\,|\,y''_j - y'_j\,| = \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|h'_{i\,y_j}\left[\bar{x}\;,\;\bar{y}' + \theta_i\,.\,(\bar{y}'' - \bar{y}')\right]\right|.\,|\,y''_j - y'_j\,| \le \\
&\le \sum_{j=1}^{n} n\,.\,(c/n^2)\,.\,|\,y''_j - y'_j\,| = (c/n)\,.\sum_{j=1}^{n}|\,y''_j - y'_j\,| \le \\
&\le (c/n)\,.\,n\,.\,Máx\left\{\,|\,y''_1 - y'_1\,|\;,\;|\,y''_2 - y'_2\,|\;,\;\ldots\;,\;|\,y''_n - y'_n\,|\right\} \le \\
&\le c\,.\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|\,y''_j - y'_j\,|^2} = c\,.\,\|\,\bar{y}'' - \bar{y}'\,\|\,.
\end{aligned}$$

Com $\delta = \rho = s/\sqrt{3}$, tem-se :

$$\bar{x} \in V_\rho(\bar{a}) \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{a}\|^2 < \rho^2 = s^2/3$$
$$\bar{y}' \in F(\bar{b}, \delta) = \{\ \bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \leq \delta\ \} \Rightarrow \|\bar{y}' - \bar{b}\|^2 \leq \delta^2 = s^2/3$$
$$\bar{y}'' \in F(\bar{b}, \delta) = \{\ \bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \leq \delta\ \} \Rightarrow \|\bar{y}'' - \bar{b}\|^2 \leq \delta^2 = s^2/3\ ,$$

donde resulta, $\|\bar{x} - \bar{a}\|^2 + \|\bar{y}' - \bar{b}\|^2 + \|\bar{y}'' - \bar{b}\|^2 < s^2$, o que obviamente implica $(\bar{x}, \bar{y}', \bar{y}'') \in V_s(\bar{a}, \bar{b}, \bar{b})$. Portanto, para cada $\bar{x} \in V_\rho(\bar{a})$ e $\bar{y}', \bar{y}'' \in F(\bar{b}, \delta)$, tem-se, $\|h(\bar{x}, \bar{y}'') - h(\bar{x}, \bar{y}')\| \leq c\,.\,\|\bar{y}'' - \bar{y}'\|$ com c previamente fixado no intervalo $]\,0\,,1\,[$.

Tome-se agora $\theta \leq \rho$, suficientemente pequeno, de forma que,

$$\bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \Rightarrow \|h(\bar{x}, \bar{b}) - h(\bar{a}, \bar{b})\| < (1-c)\delta\ ,$$

o que é possível pois $h(\bar{x}, \bar{y})$ é diferenciável e portanto contínua em $(\bar{a}, \bar{b})$. Para cada $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a})$ e $\bar{y}', \bar{y}'' \in F(\bar{b}, \delta)$ tem-se , como vimos , por ser $\theta \leq \rho$, a desigualdade $\|h(\bar{x}, \bar{y}'') - h(\bar{x}, \bar{y}')\| \leq c.\|\bar{y}'' - \bar{y}'\|$; por outro lado , se $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a})$ e $\bar{y} \in F(\bar{b}, \delta)$, aplicando a desigualdade precedente com $\bar{y}'' = \bar{y}$ e $\bar{y}' = \bar{b}$, obtém-se, por ser $h(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{b}$,

$$\|h(\bar{x}, \bar{y}) - \bar{b}\| = \|h(\bar{x}, \bar{y}) - h(\bar{a}, \bar{b})\| \leq$$

$$\leq \|h(\bar{x}, \bar{y}) - h(\bar{x}, \bar{b})\| + \|h(\bar{x}, \bar{b}) - h(\bar{a}, \bar{b})\| <$$

$$< c\,.\,\|\bar{y} - \bar{b}\| + (1-c)\delta \leq c\delta + (1-c)\delta = \delta\ ,$$

ou seja, também $h(\bar{x}, \bar{y}) \in F(\bar{b}, \delta)$. Acaba de provar-se que, para cada $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a})$, a função de $\bar{y}$, $h(\bar{x}, \bar{y})$, é uma contracção de $F(\bar{b}, \delta)$ em si próprio , pois verifica, como se viu, as seguintes condições;

a) $\bar{y} \in F(\bar{b}, \delta) \Rightarrow h(\bar{x}, \bar{y}) \in F(\bar{b}, \delta)$;
b) $\bar{y}', \bar{y}'' \in F(\bar{b}, \delta) \Rightarrow \|h(\bar{x}, \bar{y}'') - h(\bar{x}, \bar{y}')\| \leq c\,.\,\|\bar{y}'' - \bar{y}'\|$, com $c \in]\,0\,,1\,[$.

Como $\mathbf{R}^n$ é um espaço completo e $F(\bar{b}, \delta)$ é um conjunto fechado, o teorema do ponto fixo permite concluir que para cada $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a})$ a equação em $\bar{y}$, $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$, tem uma e uma só solução em $F(\bar{b}, \delta)$.

Voltemos agora um pouco atrás, ao momento em que se fixou o δ e depois, em função dele o θ. Se em vez de δ e θ, se fixar um $\eta < \delta$ e mais adiante um $\varepsilon < \theta$ em conformidade, pode-se concluir, com a mesma argumentação que foi usada para δ e θ , que , para cada $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$, a equação em $\bar{y}$, $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$, tem uma e uma só solução em $F(\bar{b}, \eta) = \{ \bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \leq \eta \} \subset V_\delta(\bar{b})$. Daqui resulta que, para cada $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$:

- A referida equação em $\bar{y}$ tem uma solução em $V_\delta(\bar{b})$;
- A referida equação em $\bar{y}$ tem apenas uma solução em $V_\delta(\bar{b})$: se para certo $\bar{x}$ de $V_\varepsilon(\bar{a})$ tivesse duas soluções em $V_\delta(\bar{b}) \subset F(\bar{b}, \delta) = \{ \bar{y} : \|\bar{y} - \bar{b}\| \leq \delta \}$, então, como $V_\varepsilon(\bar{a}) \subset V_\theta(\bar{a})$, para certo $\bar{x}$ de $V_\theta(\bar{a})$ teria duas soluções em $F(\bar{b}, \delta)$, o que vimos ser impossível;
- A solução (única) da referida equação pertence ao conjunto fechado $F(\bar{b}, \eta)$ contido em $V_\delta(\bar{b})$.

O teorema está demonstrado.

<u>Teorema 12</u> : *Sendo* $\bar{y} = [\, y_1 \;\; y_2 \;\; \ldots \;\; y_n]^T$, $f(\bar{y}) = [\, f_1(\bar{y}) \;\; f_2(\bar{y}) \;\; \ldots \;\; f_n(\bar{y})]^T$ *uma função de* $A \subseteq \mathbf{R}^n$ *em* $\mathbf{R}^n$ *, P uma matriz quadrada de ordem* <u>*n*</u> *e* $B(\bar{y})$ *a matriz Jacobiana de* $f(\bar{y})$ *, então a matriz Jacobiana da função* $d(\bar{y}) = \bar{y} - P \,.\, f(\bar{y})$ *é a matriz* $D(\bar{y}) = I - P \,.\, B(\bar{y})$ *, em que I é a matriz identidade de ordem* <u>*n*</u> *.*

<u>Demonstração</u> : Sendo $P = [\, p_{i\beta}]$, tem-se para *i*-ésima coordenada de $d(\bar{y})$:

$$d_i(\bar{y}) = y_i - \sum_{\beta=1}^{n} p_{i\beta} \,.\, f_\beta(\bar{y}) .$$

Portanto,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial d_i(\bar{y})}{\partial y_j} = \delta_{ij} - \sum_{\beta=1}^{n} p_{i\beta} \,.\, f'_{\beta y_j} \;, \text{ com } \; \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \;, & i = j \\ 0 \;, & i \neq j \end{cases} .$$

Ora a matriz $D(\bar{y})$ – matriz Jacobiana de $d(\bar{y})$ – é a matriz das derivadas parciais (1) e conclui-se de imediato que $D(\bar{y}) = I - P \,.\, B(\bar{y})$, como se queria provar.

A partir dos resultados auxiliares dos teoremas 11 e 12, podem demonstrar-se teoremas correspondentes aos teoremas 7, 8 e 9 sobre a existência, continuidade e unicidade do sistema de funções definido implicitamente por um sistema de equações a verificar as hipóteses do teorema 5.

Assim, em correspondência com o teorema 7, tem-se o seguinte:

Teorema 13 : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, o sistema de equações* $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ *,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *, define implicitamente um sistema de funções* $y_j = g_j(\bar{x})$ *(* $j = 1, 2, \ldots, n$ *) em certa* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *e tem-se ainda* $b_j = g_j(\bar{a})$ *, ou seja , em termos vectoriais,* $\bar{b} = g(\bar{a})$ *. E para cada* $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$*, tem-se* $g(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{b})$*, com o* δ *determinado como no teorema* 11*; e existe um conjunto fechado contido em* $V_\delta(\bar{b})$ *ao qual pertencem todos* $g(\bar{x})$ *correspondentes aos* $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$.

Demonstração : Seja $V_r(\bar{a}, \bar{b})$ a vizinhança onde as funções $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ são diferenciáveis. Considere-se a matriz $P(\bar{a}, \bar{b}) = \left[f'_{i y_j}(\bar{a}, \bar{b}) \right]$, matriz Jacobiana no ponto $(\bar{a}, \bar{b})$ das n funções $f_i(\bar{x}, \bar{y})$ consideradas apenas como funções de $\bar{y}$. Defina-se a função,

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \,.\, f(\bar{x}, \bar{y}) \quad ,$$

em que $f(\bar{x}, \bar{y}) = [\, f_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad f_2(\bar{x}, \bar{y}) \quad \ldots \quad f_n(\bar{x}, \bar{y})]^T$ e $P^{-1}(\bar{a}, \bar{b})$ é a matriz inversa de $P(\bar{a}, \bar{b})$ [a inversa existe pois, por hipótese do teorema 1, o determinante de $P(\bar{a}, \bar{b})$, ou seja, $D(\bar{a}, \bar{b}) = |\, f'_{i y_j}(\bar{a}, \bar{b}) \,|$ é não nulo] .

Vejamos em seguida que $h(\bar{x}, \bar{y})$ verifica as hipóteses do teorema 11 :

- É função diferenciável em $V_r(\bar{a}, \bar{b})$;
- Tem-se $h(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{b} - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \,.\, f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{b} - [\, 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,]^T = \bar{b}$, pois por hipótese do teorema 1, $f(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{0} = [\, 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,]^T$;
- De acordo com o teorema 8 , as derivadas parciais $h'_{i y_j}(\bar{x}, \bar{y})$ são os elementos da matriz $H(\bar{x}, \bar{y}) = I - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \,.\, P(\bar{x}, \bar{y})$, com $P(\bar{x}, \bar{y}) = \left[f'_{i y_j}(\bar{x}, \bar{y}) \right]$. Tem-se então que tais derivadas são contínuas em $(\bar{a}, \bar{b})$ e vê-se que nesse ponto são todas nulas : $H(\bar{a}, \bar{b}) = I - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \,.\, P(\bar{a}, \bar{b}) = I - I = O$, em que O é a matriz nula de ordem n .

Então, pelo teorema 11, existem reais $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que, para cada $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$, a equação em $\bar{y}$, $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$, tem uma e uma só solução $\bar{y} = g(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{b})$; e existe ainda um conjunto fechado contido em $V_\delta(\bar{b})$ ao qual pertencem todas essas soluções correspondentes aos $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$.

Ora, sendo $\bar{0} = [\, 0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,]^T$, tem-se,

$$h\,[\,\bar{x}\,,\,g(\bar{x})\,]\;=\;g(\,\bar{x}\,)\Rightarrow\;g(\,\bar{x}\,)\;-\;P^{-1}\,(\,\bar{a}\,,\bar{b}\,)\,.\;f\,[\,\bar{x}\,,\,g(\bar{x})\,]\;=\;g(\,\bar{x}\,)\;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;P^{-1}\,(\,\bar{a}\,,\bar{b}\,)\,.\;f\,[\,\bar{x}\,,\,g(\bar{x})\,]\;=\;\bar{0}\;=\;[\;0\;\;0\;\;\ldots\;\;0\;]^T\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;P\;(\,\bar{a}\,,\bar{b}\,)\,.\,P^{-1}\,(\,\bar{a}\,,\bar{b}\,)\,.\,f\,[\,\bar{x}\,,\,g(\bar{x})\,]\;=\;[\;0\;\;0\;\;\ldots\;\;0\;]^T\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\;f\,[\,\bar{x}\,,\,g(\bar{x})\,]\;=\;[\;0\;\;0\;\;\ldots\;\;0\;]^T=\;\bar{0}\;,$$

isto é, $\bar{y}=g\,(\,\bar{x}\,)$ é definida implicitamente pela equação vectorial $f\,(\,\bar{x}\,,\,\bar{y}\,)=\bar{0}$, em $V_\varepsilon\,(\bar{a})$; dito de outro modo, o sistema de funções $y_j = g_j\,(\,\bar{x}\,)$ ($j = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n$) é definido implicitamente pelo sistema de equações $f_i(\bar{x}\,,\,\bar{y}) = \;0$ ($i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n$) na referida $V_\varepsilon\,(\bar{a})$.

Já se viu anteriormente que $\bar{y}= g\;(\,\bar{x}\,)\;\in\;V_\delta\;(\,\bar{b}\,)$ e que existe um conjunto fechado contido em $V_\delta\;(\,\bar{b}\,)$ ao qual pertencem todas essas soluções correspondentes aos $\bar{x}\in V_\varepsilon\,(\bar{a})$.

Falta portanto apenas , para completar a demonstração, provar que $\bar{b}=\;g\,(\,\bar{a}\,)$. Por ser, como se viu, $h\,(\,\bar{a}\,,\bar{b}\,)\;=\bar{b}$, quando seja $\bar{x}\;=\bar{a}$, a solução (única) em $V_\delta\;(\,\bar{b}\,)$ da equação $h\,(\,\bar{a}\,,\,\bar{y}\,)=\,\bar{y}$ é precisamente $\bar{b}=\;g\,(\,\bar{a}\,)$.

O teorema está completamente demonstrado.

Vejamos em seguida o teorema correspondente ao teorema 4.

Teorema 14 : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, as funções* $y_j = g_j\,(\,\bar{x}\,)$ *a que se refere o teorema* 13*, são contínuas na* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *em que são definidas .*

Demonstração : A demonstração segue via semelhante à do teorema 8, apenas com alguns ajustamentos. Seja $\bar{x}_0\in V_\varepsilon(\bar{a})$ e considere-se uma sucessão $\bar{x}_p\in V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que $lim\,\bar{x}_p=\;\bar{x}_0$. Vejamos que a sucessão correspondente $\bar{y}_p = g\,(\bar{x}_p)$ tem por limite precisamente $g\,(\bar{x}_0)$, o que garantirá a continuidade de $\bar{y}\;=g(\bar{x})$ e, portanto, de cada uma das funções $y_j = g_j\,(\,\bar{x}\,)$ em $\bar{x}_0$.

Pelo teorema 13, $g\,(\,\bar{x}_p\,)\in V_\delta\;(\,\bar{b}\,)$ e , portanto , $\bar{y}_p = g\,(\bar{x}_p)$ é uma sucessão limitada. Se $\bar{y}_p$ não tivesse $\bar{y}_0 = g\,(\bar{x}_0)$ como limite, então certa subsucessão $\bar{y}_{\alpha_p}$ teria limite $\bar{y}_* \neq \bar{y}_0$.

Ainda pelo teorema 13, existe um conjunto fechado $F \subset V_\delta\;(\,\bar{b}\,)$ ao qual pertencem todos os $g(\bar{x})$ correspondentes aos $\bar{x}\in V_\varepsilon\;(\bar{a})$. Tem-se então , por ser $\bar{y}_p = g\,(\bar{x}_p)\in F$ e F fechado, $lim\;\bar{y}_{\alpha_p} =\;\bar{y}_*\;\in F\;\subset\;V_\delta\;(\,\bar{b}\,)$. Mas pela continuidade de $f\,(\,\bar{x}\,,\,\bar{y}\,)$, resulta,

$$f(\bar{x}_{\alpha_p}, \bar{y}_{\alpha_p}) = f[\bar{x}_{\alpha_p}, g(\bar{x}_{\alpha_p})] = \bar{0} \Rightarrow lim\, f(\bar{x}_{\alpha_p}, \bar{y}_{\alpha_p}) = f(\bar{x}_0, \bar{y}_*) = \bar{0} .$$

Retomando a função $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) . f(\bar{x}, \bar{y})$ utilizada na demonstração do teorema 13, seria então,

$$h(\bar{x}_0, \bar{y}_*) = \bar{y}_* - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) . f(\bar{x}_0, \bar{y}_*) = \bar{y}_* ,$$

$$h(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{y}_0 - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) . f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = \bar{y}_0 \neq \bar{y}_* ,$$

e assim a equação vectorial em $\bar{y}$, $h(\bar{x}_0, \bar{y}) = \bar{y}$, teria em $V_\delta(\bar{b})$ duas soluções distintas, $\bar{y}_0 = g(\bar{x}_0)$ e $\bar{y}_*$, o que seria contra o estabelecido na demonstração do teorema 9.

Portanto, inexiste o sublimite $\bar{y}_* \neq \bar{y}_0$, logo $\bar{y}_p = g(\bar{x}_p)$ tem por limite $\bar{y}_0 = g(\bar{x}_0)$, como se pretendia provar.

Finalmente, em correspondência com o teorema 9, tem-se:

<u>Teorema 15</u> : *Supostas verificadas as hipóteses do teorema* 5 *, o sistema de funções* $y_j = g_j(\bar{x})$ *a que se refere o teorema* 13 *é o único definido implicitamente pelo sistema de equações* $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ *,* $i = 1, 2, \ldots, n$ *, que verifica as propriedades:* 1) $b_j = g_j(\bar{a})$ *;* 2) *As funções* $g_j(\bar{x})$ *são contínuas em* $V_\varepsilon(\bar{a})$*. Ou seja, em termos mais gerais, se um outro sistema de funções* $y_j = h_j(\bar{x})$ *for definido implicitamente pelo mesmo sistema de equações em* $V_\eta(\bar{a})$ *e verificar* 1) $b_j = h_j(\bar{a})$ *e* 2) *As funções* $h_j(\bar{x})$ *são contínuas em* $V_\eta(\bar{a})$*, então nos pontos comuns às duas vizinhanças tem-se* $g_j(\bar{x}) = h_j(\bar{x})$.

<u>Demonstração</u> : A demonstração segue via semelhante à do teorema 9 , apenas com ligeiros ajustamentos. Sendo $\theta = Mín\,\{\varepsilon, \eta\}$, considerem-se, tal como na demonstração do teorema 9, os conjuntos,

$$A_0 = \{\, \bar{x} : \bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \wedge h(\bar{x}) \neq g(\bar{x}) \,\} \text{ e } A_1 = \{\, \bar{x} : \bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \wedge h(\bar{x}) = g(\bar{x}) \,\},$$

Tal como então, conclui-se que se $A_0 \neq \varnothing$, das duas uma: a) Ou em A_0 há um ponto de acumulação de A_1 , hipótese que logo se descarta usando o mesmo argumento que na demonstração do teorema 9 ; b) Ou em A_1 há um ponto de acumulação de A_0 , hipótese que veremos de seguida também ser impossível. Conclui-se então que $A_0 = \varnothing$, ou seja, $A_1 = V_\theta(\bar{a})$, o que equivale a afirmar que $h(\bar{x}) = g(\bar{x})$ nos pontos $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a})$.

Falta assim provar que em A_1 não pode haver pontos de acumulação de A_0 . Se certo $\bar{x}_0 \in A_1$ pudesse ser ponto de acumulação de A_0, existiria uma sucessão $\bar{x}_p \in A_0$ tal que

$lim\ \bar{x}_p = \bar{x}_0$. Pela continuidade da função $h(\bar{x})$ no ponto $\bar{x}_0$, seria então, $lim\ h(\bar{x}_p) =$ $= h(\bar{x}_0) = g(\bar{x}_0) \in V_\delta(\bar{b})$. Portanto, com $p = k$ suficientemente grande, teriamos ,

$$h(\bar{x}_k) \in V_\delta(\bar{b}) \quad , \quad g(\bar{x}_k) \in V_\delta(\bar{b}) \quad \text{e} \quad h(\bar{x}_k) \neq g(\bar{x}_k) \ .$$

Mas como $h(\bar{x})$ e $g(\bar{x})$ são ambas definidas implicitamente pelo sistema de equações $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), isto é, pela equação vectorial $f(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{0}$, seria,

$$f[\bar{x}_k,\ h(\bar{x}_k)] = f[\bar{x}_k,\ g(\bar{x}_k)] = \bar{0} \ ;$$

com a função auxiliar do teorema 13, $h(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y} - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \ . \ f(\bar{x}, \bar{y})$, ter-se-ia então,

$$h[\bar{x}_k,\ h(\bar{x}_k)] = h(\bar{x}_k) - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \ . \ \bar{0} = h(\bar{x}_k)$$
$$h[\bar{x}_k,\ g(\bar{x}_k)] = g(\bar{x}_k) - P^{-1}(\bar{a}, \bar{b}) \ . \ \bar{0} = g(\bar{x}_k) \ ,$$

ou seja, a equação vectorial em $\bar{y}$, $h(\bar{x}_k, \bar{y}) = \bar{y}$, teria em $V_\delta(\bar{b})$ duas soluções distintas, $h(\bar{x}_k)$ e $g(\bar{x}_k)$, o que seria contra o estabelecido na demonstração do teorema 13.

Uma observação final. Se se pretender, em termos análogos ao teorema 10, provar a diferenciabilidade do sistema de funções $\bar{y} = g(\bar{x}) = [\, g_1(\bar{x}) \quad g_2(\bar{x}) \quad \ldots \quad g_n(\bar{x}) \,]^T$ cuja existência, continuidade e unicidade foram demonstradas nos teoremas 13, 14 e 15, haverá que ter o cuidado, logo no teorema 13, em assegurar que para todos os $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ vem não nulo o determinante $D[\bar{x}, g(\bar{x})] = | f'_{i y_j}[\bar{x}, g(\bar{x})] |$, pois tal condição desempenha um papel essencial na demonstração do teorema 10.

Consegue-se tal desiderato considerando, logo no início da demonstração do teorema 13, que a vizinhança $V_r(\bar{a}, \bar{b})$ é suficientemente estreita para garantir que,

$$D(\bar{x}, \bar{y}) = | f'_{i y_j}(\bar{x}, \bar{y}) | \neq 0 \ \text{ para todo o } (\bar{x}, \bar{y}) \in V_r(\bar{a}, \bar{b}) \ ,$$

sendo tal possível porque as hipóteses do teorema 13 (que são as do teorema 5) asseguram a continuidade e não anulamento do determinante $D(\bar{x}, \bar{y})$ ponto $(\bar{a}, \bar{b})$.

Se assim for, recordando como se fixam os valores δ e ε de acordo com teorema 11 , tem-se, $\delta = s/\sqrt{3} < r/\sqrt{3}$ e $\varepsilon < \theta \leq \rho = s/\sqrt{3} < r/\sqrt{3}$; e dado que,

$$\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{a}\|^2 < \varepsilon^2 < r^2/3$$
$$g(\bar{x}) \in V_\delta(\bar{b}) \Rightarrow \|g(\bar{x}) - \bar{b}\|^2 < \delta^2 < r^2/3$$

ou ainda $\| [\bar{x}, g(\bar{x})] - (\bar{a}, \bar{b}) \|^2 < 2r^2/3 < r^2$, donde se tira $[\bar{x}, g(\bar{x})] \in V_r(\bar{a}, \bar{b})$ o que por sua vez implica $D[\bar{x}, g(\bar{x})] \neq 0$.

Termina-se o presente ponto, com a apresentação de um exemplo. Considere-se o sistema de equações,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0 \\ x_1 . x_2 + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} - 4 = 0 \\ x_1 - x_2 + y_1 + y_2 - \sqrt{y_1 . y_3} - 1 = 0 \end{cases} ,$$

e o ponto de coordenadas $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 1$. Dado que este ponto é uma solução do sistema e que as funções dos primeiros membros :

- São contínuas e diferenciáveis em certa vizinhança desse ponto;
- Têm derivadas $f'_{i y_j}(\bar{x} , \bar{y})$ contínuas em certa vizinhança desse ponto ;
- O determinante funcional ou Jacobiano,

$$D(\bar{x} , \bar{y}) = \begin{vmatrix} -2y_1 & -2y_2 & 2y_3 \\ \dfrac{1}{2 . \sqrt{y_1}} & \dfrac{1}{2 . \sqrt{y_2}} & \dfrac{1}{2 . \sqrt{y_3}} \\ 1 - \dfrac{y_3}{2 . \sqrt{y_1 . y_3}} & 1 & -\dfrac{y_1}{2 . \sqrt{y_1 . y_3}} \end{vmatrix} ,$$

é não nulo nesse ponto ,

$$D(1, 1 , 1 , 1 , 1) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Então o sistema dado define implicitamente em certa $V_\varepsilon(1,1)$ um sistema de funções diferenciáveis $y_1 = g_1(x_1 , x_2)$, $y_2 = g_2(x_1 , x_2)$ e $y_3 = g_3(x_1 , x_2)$. Para determinar as derivadas parciais das funções $g_j(x_1 , x_2)$, pode usar-se a técnica descrita no ponto 2 . Assim, por exemplo, para achar as derivadas $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_1}$ usa-se o sistema ,

$$\begin{cases} (-2y_1) \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + (-2y_2) \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + (2y_3) \cdot \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} = -1 \\ \dfrac{1}{2 . \sqrt{y_1}} \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2 . \sqrt{y_2}} \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dfrac{1}{2 . \sqrt{y_3}} \cdot \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} = -x_2 \\ (1 - \dfrac{y_3}{2 . \sqrt{y_1 . y_3}}) \cdot \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + 1 \cdot \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + (-\dfrac{y_1}{2 . \sqrt{y_1 . y_3}} \cdot \dfrac{\partial y_3}{\partial x_1} = -1 \end{cases} ;$$

que permite obter as derivadas pretendidas ; em particular, no ponto de coordenadas $x_1 = x_2 = 1$, tem-se ,

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \end{vmatrix}} = 7/4 \ ,$$

e analogamente para $\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial y_3}{\partial x_1}$. Dado que as funções do primeiro membro do sistema são de classe C^{∞} , também as funções $g_j(x_1 , x_2)$ são de classe C^{∞} na $V_{\varepsilon}(1,1)$ onde são definidas e as respectivas derivadas parciais de ordem superior podem calcular-se, por derivação sucessiva, a partir das expressões que dão as primeiras derivadas (aplicando, quando seja necessário, a regra de derivação de uma função composta).

4 . Invertibilidade local

Considere-se o sistema de funções,

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = f_1(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \\ y_2 = f_2(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \\ \cdots \\ y_n = f_n(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \end{cases} ,$$

ou seja, a função $\bar{y} = f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$ e admita-se que as funções $f_i(\bar{x})$, $i = 1 , 2 , \ldots , n$, são contínuas e têm derivadas parciais contínuas no conjunto A , suposto aberto.

No que se segue representaremos por $D(\bar{x})$ o seguinte determinante funcional ou Jacobiano, que por hipótese será não nulo para qualquer vector $\bar{x} \in A$ e que desempenhará um papel fundamental no estudo que vamos efectuar:

$$D(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} .$$

Representando por B o transformado do aberto A dado por $\bar{y} = f(\bar{x})$, ou seja, $B = \{\bar{y} \ : \ \exists \ \bar{x} \in A$ tal que $\bar{y} = f(\bar{x})\}$, vamos provar que, verificadas as hipóteses supra , o conjunto B também é aberto . Para tal considere-se um ponto $\bar{b}$ e seja $\bar{a} \in A$ tal que $\bar{b} = f(\bar{a})$. O ponto de coordenadas $\bar{y} = \bar{b}$, $\bar{x} = \bar{a}$ é solução do seguinte sistema de equações nas incógnitas $y_1 , y_2 , \dots , y_n , x_1 , x_2 , \dots , x_n$:

$$(2) \begin{cases} y_1 - f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ y_2 - f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ y_n - f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} .$$

Vou aqui

Como $\bar{a} \in A$ e A é aberto, existe uma $V_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$ na qual as funções $f_i(\bar{x})$ do sistema (1) são contínuas e têm derivadas contínuas. Consequentemente, as funções dos primeiros membros do sistema (2) são contínuas e têm derivadas parciais contínuas nas variáveis $y_1 , y_2 , \dots , y_n , x_1 , x_2 , \dots , x_n$ em qualquer $(\bar{y} , \bar{x})$ tal que $\bar{y} \in \mathbf{R^n}$ e $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$; portanto, as funções dos primeiros membros do sistema (2) são contínuas e têm derivadas parciais contínuas em $V_\varepsilon(\bar{b} , \bar{a})$, pois ,

$$(\bar{y} , \bar{x}) \in V_\varepsilon(\bar{b} , \bar{a}) \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - b_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2} < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) .$$

Por outro lado, o Jacobiano $D(\bar{x})$ não se anula no ponto de coordenadas $\bar{y} = \bar{b}$, $\bar{x} = \bar{a}$. Então, de acordo com o teorema 9, o sistema (1) define implicitamente em certa $V_\eta(\bar{b})$ uma função $\bar{x} = \psi(\bar{y})$ – ou seja , um sistema de n funções $x_i = \psi_i(\bar{y})$ – a verificar as propriedades da tese do mencionado teorema .

Como $\bar{a} = \psi(\bar{b})$ e $\bar{x} = \psi(\bar{y})$ é contínua, existe uma $V_\delta(\bar{b}) \subseteq V_\eta(\bar{b})$ tal que, $\bar{y} \in V_\delta(\bar{b}) \Rightarrow \bar{x} = \psi(\bar{y}) \in V_\varepsilon(\bar{a})$, e pode ver-se facilmente que $V_\delta(\bar{b}) \subseteq B$ o que, devido à arbitrariedade do $\bar{b} \in B$ considerado, assegura que B é um conjunto aberto ; com efeito, para qualquer $\bar{y} \in V_\delta(\bar{b})$ o ponto $[\bar{y}\ ,\ \psi(\bar{y})]$ é solução do sistema (2), ou seja, $\bar{y} = f[\ \psi(\bar{y})]$ com $\psi(\bar{y}) \in V_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$, o que prova ser $\bar{y} \in B$ (ver definição do conjunto B).

Posto isto, vamos demonstrar o seguinte teorema fundamental:

<u>Teorema 16</u> : *Se as funções $y_i = f_i(\bar{x})$ do sistema (1) são contínuas e têm derivadas contínuas no aberto A e, além disso, $D(\bar{x}) \neq 0$ em A , então a função $\bar{y} = f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R^n}$ em $\mathbf{R^n}$ é localmente invertível , isto é, para cada $\bar{a} \in A$ existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ onde $f(\bar{x})$ é injectiva. Além disso, o transformado de $V_\varepsilon(\bar{a})$ dado por $\bar{y} = f(\bar{x})$ é um conjunto aberto*

<u>Demonstração</u> : Para cada $\bar{a} \in A$, temos que provar que existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que,

$$\bar{c}\ ,\ \bar{d} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \wedge \bar{c} \neq \bar{d} \ \Rightarrow f(\bar{c}) \neq f(\bar{d})\ .$$

Para tal,

A) Considere-se em primeiro lugar o determinante,

$$\varphi(\bar{a}_1\,,\bar{a}_2\,,\ \cdots\ ,\ \bar{a}_n\ ) = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}\,=\,\bar{a}_1} & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{\bar{x}\,=\,\bar{a}_1} \\ \cdots & & \\ \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_{\bar{x}\,=\,\bar{a}_n} & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{\bar{x}\,=\,\bar{a}_n} \end{vmatrix} \quad ,$$

e note-se que a função $\varphi(\bar{a}_1\,,\bar{a}_2\,,\ \cdots\ ,\ \bar{a}_n\ )$ é definida no conjunto,

$$A \times A \times\ \ldots\ \times A \ \subseteq\ \mathbf{R^n} \times\ \mathbf{R^n}\ \times\ \ldots \times \mathbf{R^n}\ ,$$

e toma valores em $\mathbf{R}$: trata-se de uma função real nas n^2 variáveis reais a_{ij} , com $\bar{a}_i = (a_{i1}\ ,\ a_{i2}\ ,\ \cdots\ ,\ a_{in})$ e $i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ n$. Quando seja $\bar{a}_1 = \bar{a}_2 = \cdots = \bar{a}_n = \bar{a} \in A$, tem-se $\varphi(\bar{a}\,,\bar{a}\,,\ \cdots\ ,\ \bar{a}\ ) = D(\bar{a}) \neq 0$ (por hipótese) ; ora , sendo contínuas as derivadas parciais das funções $f_i(\bar{x})$, também $\varphi(\bar{a}_1\,,\bar{a}_2\,,\ \cdots\ ,\ \bar{a}_n\ )$ será contínua em $A \times A \times\ \ldots\ \times A$ e então a desigualdade $\varphi(\bar{a}_1\,,\bar{a}_2\,,\ \cdots\ ,\ \bar{a}_n\ ) \neq 0$ verificar-se-á para,

$$\bar{a}_1 \in V_\varepsilon(\bar{a})\ ,\ \bar{a}_2 \in V_\varepsilon(\bar{a})\ ,\ \ldots\ ,\ \bar{a}_n \in V_\varepsilon(\bar{a})\ ,$$

com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno .

B) Na vizinhança $V_\varepsilon(\overline{a})$ determinada na alínea A) , tomem-se arbitrariamente $\overline{c} = (c_1 , c_2 , ... c_n)$ e $\overline{d} = (d_1 , d_2 , ..., d_n)$. Como $V_\varepsilon(\overline{a})$ é um conjunto convexo, tem-se, $0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \overline{c} + \lambda . (\overline{d} - \overline{c}) \in V_\varepsilon(\overline{a})$. Para cada $i = 1 , 2 , \dots , n$, tem--se então,

$$\varphi_i(\lambda) = f_i [\, \overline{c} + \lambda . (\overline{d} - \overline{c})] \quad , \; 0 \leq \lambda \leq 1 \; ,$$

regular no intervalo $[\,0 , 1]$ e como,

$$\varphi'_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} f'_{i x_j} \left[\, \overline{c} + \lambda . (\overline{d} - \overline{c})\right] . (d_j - c_j) \; ,$$

o teorema de Lagrange (para funções reais de variável real) permite escrever :

$$\varphi_i(1) - \varphi_i(0) = \sum_{j=1}^{n} f'_{i x_j} \left[\, \overline{c} + \lambda^*_i . (\overline{d} - \overline{c})\right] . (d_j - c_j) \; ,$$

ou ainda,

$$f_i(\overline{d}) - f_i(\overline{c}) = \sum_{j=1}^{n} f'_{i x_j} (\overline{c}^*_i) . (d_j - c_j) \; ,$$

com $\overline{c}^*_i = \overline{c} + \lambda^*_i . (\overline{d} - \overline{c}) \in V_\varepsilon(\overline{a})$. Então,

$$\begin{bmatrix} f_1(\overline{d}) - f_1(\overline{c}) \\ \cdots \\ f_n(\overline{d}) - f_n(\overline{c}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(\overline{c}^*_1) & \cdots & f'_{1x_n}(\overline{c}^*_1) \\ \cdots & & \\ f'_{nx_1}(\overline{c}^*_n) & \cdots & f'_{nx_n}(\overline{c}^*_n) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} d_1 - c_1 \\ \cdots \\ d_n - c_n \end{bmatrix} .$$

C) Como a matriz das derivadas $f'_{i x_j}(\overline{c}^*_i)$ tem determinante igual a $\varphi(\overline{c}^*_1 , \overline{c}^*_2 , \cdots , \overline{c}^*_n)$, com $\overline{c}^*_i \in V_\varepsilon(\overline{a})$, $i = 1 , 2 , \dots , n$, determinante que, como vimos em A) , é não nulo, aquela matriz é regular ; então, se for $\overline{c} \neq \overline{d}$, alguma das diferenças $d_j - c_j \neq 0$ e não pode ser portanto,

$$f_1(\overline{d}) - f_1(\overline{c}) = f_2(\overline{d}) - f_2(\overline{c}) = \dots = f_n(\overline{d}) - f_n(\overline{c}) = 0 \, ,$$

ou seja, $f(\overline{d}) = f(\overline{c})$, caso contrário teríamos um sistema homogéneo nas diferenças $d_j - c_j$ com uma solução não nula o que, como sabemos, não é possível quando a matriz do sistema seja regular. Fica assim provado que a função $\overline{y} = f(\overline{x})$ é injectiva, logo invertível em $V_\varepsilon(\overline{a})$.

D) A última parte do teorema resulta imediatamente das considerações que precedem o enunciado. A vizinhança (esfera aberta) $V_\varepsilon(\overline{a})$ é um conjunto aberto e o seu transformado dado por $\overline{y} = f(\overline{x})$ será portanto também aberto.

Antes de passarmos ao estudo das propriedades da função inversa, notemos que, para $n = 1$, ou seja, no caso de uma função real de variável real , $y = f(x)$, a continuidade e o não anulamento de $D(x) = f'(x)$ num intervalo são mais do que suficientes para garantir a invertibilidade da função no intervalo (invertibilidade global e não apenas local). Com efeito, do não anulamento e continuidade da derivada no intervalo decorre a monotonia estricta da função no intervalo a qual é, portanto, invertível no intervalo.

Porém, no caso $n > 1$, vale apenas o teorema 16 tal como foi enunciado, não ficando de modo algum assegurada a existência de inversa global em A , mesmo no caso mais simples em que A seja um intervalo de $\mathbf{R}^n$, como mostra o exemplo seguinte : para a função $f(x_1 , x_2)$ de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ definida por ,

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \, . \, sen \; x_2 \\ y_2 = x_1 \, . \, cos \; x_2 \end{cases} ,$$

as hipóteses do teorema são verificadas no aberto, $A = \{(x_1 , x_2) \; : \; x_1 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$, pois ,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen \; x_2 & x_1 \, . \, cos \; x_2 \\ cos \; x_2 & -x_1 \, . \, sen \; x_2 \end{vmatrix} = - \, x_1 \neq 0 \ ,$$

para $(x_1 , x_2) \in A$; no entanto, a função não é globalmente invertível no intervalo A dado não ser injectiva neste intervalo, pois, por exemplo,

$$f(1, \pi) = f(1, 3\pi) = (0 , -1) \, .$$

Continuando a supor verificadas as hipóteses do teorema 16 , vamos agora estudar as propriedades da inversa local cuja existência fica assegurada pelo referido teorema.

Nas condições do teorema 16, a função $\bar{y} = f(\bar{x})$ de $A \subseteq \mathbf{R}^n$ em $\mathbf{R}^n$ é, para cada ponto $\bar{a}$ pertencente ao aberto A , invertível em certa vizinhança $V_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$ e o transformado $B_\varepsilon(\bar{a}) = f\,[V_\varepsilon(\bar{a})]$ é também um conjunto aberto. A função inversa de $\bar{y} = f(\bar{x})$ em $V_\varepsilon(\bar{a})$ será pois a função $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ que a cada $\bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a})$ associa o $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ (único) que faz $\bar{y} = f(\bar{x})$. Vamos então estudar algumas propriedades desta função, supondo sempre que são verificadas as hipóteses do teorema 16.

Considere-se um particular $\bar{y}_0 \in B_\varepsilon(\bar{a})$, seja $\bar{x}_0 = f^{-1}(\bar{y}_0) \in V_\varepsilon(\bar{a})$ e fixe-se uma $V_\eta(\bar{x}_0) \subseteq V_\varepsilon(\bar{a})$, sendo que esta inclusão é assegurada, com $\eta > 0$

suficientemente pequeno, pelo facto de $V_\varepsilon(\bar{a})$ ser um conjunto aberto. Claro que $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$, pelo que o ponto ($\bar{y}_0$, $\bar{x}_0$) é uma solução particular de $\bar{y} - f(\bar{x}) = \bar{0}$, ou seja, do sistema de equações,

$$\begin{cases} y_1 - f_1(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) = 0 \\ y_2 - f_2(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) = 0 \\ \cdots \\ y_n - f_n(x_1 , x_2 , \cdots , x_n) = 0 \end{cases} ,$$

e conclui-se com facilidade que este sistema verifica em relação àquele ponto as hipóteses do teorema 5 , pelo que tal sistema de equações define implicitamente em certa $V_\theta(\bar{y}_0)$ um sistema de funções $x_i = \psi_i(\bar{y})$, $i = 1 , 2 , \dots , n$, ou seja, uma função $\bar{x} = \psi(\bar{y})$, a verificar as propriedades da tese dos teoremas 7 a 10. Como $\bar{x} = \psi(\bar{y})$ é contínua, existe uma $V_{\theta^*}(\bar{y}_0) \subseteq V_\theta(\bar{y}_0)$ tal que ,

$$\bar{y} \in V_{\theta^*}(\bar{y}_0) \Rightarrow \bar{x} = \psi(\bar{y}) \in V_\eta(\bar{x}_0) \subseteq V_\varepsilon(\bar{a}) ,$$

e vamos ver que:

a) $V_{\theta^*}(\bar{y}_0) \subseteq B_\varepsilon(\bar{a})$. Com efeito,

$$\bar{y} \in V_{\theta^*}(\bar{y}_0) \Rightarrow \bar{x} = \psi(\bar{y}) \in V_\eta(\bar{x}_0) \subseteq V_\varepsilon(\bar{a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} = f[\psi(\bar{y})] \text{ , com } \psi(\bar{y}) \in V_\varepsilon(\bar{a}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a}) \ ;$$

b) Em $V_{\theta^*}(\bar{y}_0)$ tem-se $\psi(\bar{y}) = f^{-1}(\bar{y})$. Com efeito , se para certo vector $\bar{y}_1 \in V_{\theta^*}(\bar{y}_0)$ fosse,

$$\bar{x}_1 = \psi(\bar{y}_1) \in V_\varepsilon(\bar{a}) \quad , \bar{x}_2 = f^{-1}(\bar{y}_1) \in V_\varepsilon(\bar{a}) \quad \text{e} \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \ ,$$

seria, $\bar{y}_1 = f(\bar{x}_1) = f(\bar{x}_2)$ com $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ ambos pertencentes a $V_\varepsilon(\bar{a})$, o que é impossível, por ser $f(\bar{x})$ injectiva nesta vizinhança de $\bar{a}$.

Segundo os teoremas 7 a 10, a função $\bar{x} = \psi(\bar{y})$ é contínua e diferenciável em $V_{\theta^*}(\bar{y}_0)$, logo o mesmo acontece com $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y}) = \psi(\bar{y})$, ou seja, em particular, $f^{-1}(\bar{y})$ é contínua e diferenciável em $\bar{y}_0 \in B_\varepsilon(\bar{a})$. E como o $\bar{y}_0$ que foi considerado pode ser um qualquer, podemos concluir que $f^{-1}(\bar{y})$ é contínua e diferenciável em $B_\varepsilon(\bar{a})$.

As derivadas parciais das n funções $x_i = \left[f^{-1}\right]_i(\bar{y})$ que definem a função inversa $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ podem obter-se uma a uma pela técnica estudada no ponto 2. , pois tal sistema de funções diferenciáveis em $B_\varepsilon(\bar{a})$ é definido implicitamente neste aberto pelo sistema $\bar{y} - f(\bar{x}) = \bar{0}$ e , para cada $\bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a})$, as hipóteses do teorema 16 chegam e sobram para garantir os pressupostos em que se baseia a aplicação de tal técnica : em particular, não se anula o Jacobiano das derivadas $\partial f_i / \partial x_j$ tomadas no ponto $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$. A observação das expressões a que se chega para as derivadas parciais das funções $x_i = \left[f^{-1}\right]_i(\bar{y})$ permite ainda concluir que, como as derivadas parciais das $f_i(\bar{x})$ são por hipóteses contínuas em A , o mesmo se passa com aquelas no aberto $B_\varepsilon(\bar{a})$ em que são definidas ; mais geralmente, se as funções $f_i(\bar{x})$ forem de classe C^r no aberto A , o mesmo se passa com as $\left[f^{-1}\right]_i(\bar{y})$ no aberto $B_\varepsilon(\bar{a})$ em que são definidas.

É no entanto possível calcular em bloco (de uma vez só) as derivadas parciais das n funções $x_i = \left[f^{-1}\right]_i(\bar{y})$, calculando matricialmente a Jacobiana de $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$, como seguidamente se indica:

a) A função composta $f \, o \, f^{-1}$ é a função que a cada $\bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a})$ associa o vector $\bar{w} = f\,[\,f^{-1}(\bar{y})\,] = \bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a})$, ou seja, trata-se da função definida por,

$$\begin{cases} w_1 = y_1 \\ w_2 = y_2 \\ \cdots \\ w_n = y_n \end{cases} ,$$

que tem como matriz Jacobiana a matriz identidade .

b) Por outro lado, para cada $\bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a})$, a matriz Jacobiana de $f \, o \, f^{-1}$ pode obter-se, como vimos nas considerações subsequentes ao teorema 3 do Capítulo VI, fazendo o produto matricial,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\left[\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})\right]} \times \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots & & \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{(\bar{y})} ,$$

em que, por comodidade de notação se fez,

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \text{ em vez de } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \text{ em vez de } \frac{\partial \left[f^{-1}\right]_i}{\partial x_j} \;.$$

c) Por definição de matriz inversa resulta então de a) e b),

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{(\bar{y})} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\left[\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})\right]} \right\}^{-1} ,$$

e, entre os determinantes Jacobianos tem-se a relação:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}_{(\bar{y})} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\left[\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})\right]} = 1 ,$$

igualdades que generalizam ao caso $n > 1$ a regra de derivação de uma função inversa estudada para o caso das funções reais de variável real.

Em síntese, podemos então enunciar :

<u>Teorema 17</u> : *Verificadas as hipóteses do teorema 16, então para cada $\bar{a} \in A$ existe uma $\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a}) \subseteq A$ onde $\bar{y} = f(\bar{x})$ é invertível e a respectiva inversa local $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$ definida no aberto $B_\varepsilon(\bar{a}) = f\ [\mathrm{V}_\varepsilon(\bar{a})]$, verifica as seguintes propriedades:*

a) É contínua e diferenciável em $B_\varepsilon(\bar{a})$;
b) Tem derivadas parciais contínuas em $B_\varepsilon(\bar{a})$ até à mesma ordem que $f(\bar{x})$ em A ;
c) Para cada $\bar{y} \in B_\varepsilon(\bar{a})$, a matriz Jacobiana de $f^{-1}(\bar{y})$ é a inversa da matriz Jacobiana de $f(\bar{x})$ tomada no ponto $\bar{x} = f^{-1}(\bar{y})$

O teorema precedente merece as seguintes observações :

1) Verificadas as hipóteses do teorema 16 , se $\bar{y} = f(\bar{x})$ for globalmente invertível no aberto A , é óbvio que as diversas inversas locais cuja existência é assegurada pelo teorema 16 para cada $\bar{a} \in A$ coincidem todas, nos abertos $B_\varepsilon(\bar{a})$ onde são definidas, com a inversa global. Sendo assim, são automaticamente válidas para a inversa global as propriedades enunciadas no teorema 17 ;

2) Se as hipóteses do teorema 16 forem apenas verificadas na vizinhança de um dado ponto $\bar{a} \in A$, a função $\bar{y} = f(\bar{x})$ é localmente invertível em certa $V_\varepsilon(\bar{a})$, verificando a respectiva inversa local as propriedades do enunciado do teorema 17 .

5. Exercícios

5.1 - Verifique que a função $y = 1 + \sqrt{x}$ é definida implicitamente pela equação,

$$x^2 + y^2 - x\,y^2 - 1 + 2\,x\,\sqrt{x} - 2\,\sqrt{x} = 0\,,$$

no intervalo $[\,0\,,+\infty\,[$. Mostre que a mesma equação define também, no mesmo intervalo, a função $y = -1 - \sqrt{x}$.

5.2 - Mostre que o sistema de funções $y = x + \sqrt{u}$, $z = x - \sqrt{u}$ é definido implicitamente pelo sistema de equações,

$$\begin{cases} y\,.\,z = x^2 - u \\ sen\;y + sen\;z = 2\,.\,sen\;x\,.\,cos\,\sqrt{u} \end{cases} ,$$

no conjunto $A = \{\,(x\,,u) \;:\; u \geq 0\,\}$.

5.3 - Admita que a equação $y^2 + x\,z + z^2 - e^z - c = 0$ define implicitamente a variável z como função diferenciável de x e y , ou seja, $z = g(x\,,y)$ em certa $V_\varepsilon\,(0\,,e)$. Determine a constante c , sabendo que $g(0\,,e) = 2$ e calcule as derivadas parciais de $g(x\,,y)$ no ponto de coordenadas $x = 0$, $y = e$.

5.4 - Dado o sistema de equações,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 - y_2 = 0 \\ x_1 - x_2^2 + y_1 + y_2 = 0 \end{cases} ,$$

seja $y_1 = g_1\,(x_1\,,x_2)$, $y_2 = g_2\,(x_1\,,x_2)$, um sistema de duas funções diferenciáveis definido implicitamente por aquele sistema de equações em certo aberto $A \subset \mathbf{R}^2$.

a) Escreva os sistemas de equações que devem ser verificados pelas derivadas parciais $\partial\,y_j\,/\,\partial\,x_1$ e $\partial\,y_j\,/\,\partial\,x_2$;

b) Mostre que para $y_1 \neq 1/2$ (o que equivale a ser $x_1 \neq -\,1/2$) os dois sistemas da alínea anterior permitem calcular as derivadas parciais $\partial\,y_j\,/\,\partial\,x_i$ e determine as respectivas expressões ;

c) Calcule as expressões das segundas derivadas parciais das funções $y_1 = g_1\,(x_1\,,x_2)$ e $y_2 = g_2\,(x_1\,,x_2)$ num ponto genérico $(x_1\,,x_2) \in A$, com $x_1 \neq -\,1/2$.

5.5 - Considere o sistema de equações,

$$\begin{cases} y\,.\,z = x - 1 \\ sen\;y + sen\;z = sen\;x \end{cases} ,$$

e o ponto de coordenadas $x = y = 1$, $z = 0$.

a) Mostre que o sistema dado define implicitamente em certa $V_\varepsilon(1)$ um único sistema de funções contínuas $y = g(x)$, $z = h(x)$, tais que $g(1) = 1$ e $h(1) = 0$;

b) Mostre que as funções $g(x)$ e $h(x)$ da alínea anterior admitem derivadas de todas as ordens e calcule $g'(1)$ e $h'(1)$.

5.6 - Mostre que a equação $y^6 . x + y . x = 2$ define implicitamente em certa $V_\varepsilon(1)$ uma única função contínua $y = g(x)$ cujo gráfico passa pelo ponto (1, 1) e calcule $g'(1)$ e $g''(1)$.

5.7 - Verifique que o sistema,

$$\begin{cases} u^v - x^2 = 0 \\ \log(u\,v) - 2y = 0 \end{cases} ,$$

define implicitamente u e v como funções de x e y e que tais funções são de classe $\mathbf{C}^\infty$ em certa $V_\varepsilon(1, 0)$. Calcule os valores de u e v quando $x = 1$ e $y = 0$. Calcule ainda $\partial v / \partial y$ no ponto de coordenadas $x = 1$, $y = 0$.

5.8 - Seja $y = g(x)$ uma função definida implicitamente pela equação,

$$x^2 + y^2 - x\,y^2 + 2x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 0 ,$$

em certo aberto $A \subset \mathbf{R}^+$ e admita que existe finita a derivada $g'(x)$ em A .

a) Escreva uma equação a ser verificada por $dy/dx = g'(x)$ para qualquer $x \in A$;

b) Deduza a partir da equação da alínea anterior uma expressão para $d\,y\,/\,d\,x$, indicando as condições para as quais é válida a expressão obtida.

5.9 - Considere o seguinte sistema de equações,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0 \\ x_1\,x_2 + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} - 4 = 0 \\ x_1 - x_2 + y_1 + y_2 - \sqrt{y_1\,y_3} - 1 = 0 \end{cases} ,$$

e o ponto de coordenadas $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = y_3 = 1$.

a) Mostre que o sistema dado define implicitamente em certa $V_\varepsilon(1, 1)$ um único sistema de funções contínuas,

$$y_j = g_j(x_1 , x_2) \ , \ j = 1 , 2 , 3 \ ,$$

tais que $g_1(1\,,1) = g_2(1\,,1) = g_3(1\,,1) = 1$;

b) Mostre que tais funções são diferenciáveis e calcule $\partial y_1 / \partial x_1$ no ponto de coordenadas $x_1 = x_2 = 1$.

5.10 - Considere a função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ definida pelo sistema,

$$\begin{cases} u = x^3 \\ v = y \end{cases} ,$$

a) Verifique que se trata de uma função injectiva em $\mathbf{R}^2$ e determine a respectiva inversa ;

b) Mostre que, no entanto, o Jacobiano se anula nos pontos $(0\,,y)$ qualquer que seja $y \in \mathbf{R}$;

c) A função inversa poderá ser diferenciável nos pontos de coordenadas $u = 0$, $v = k$, com $k \in \mathbf{R}$.

5.11 - Considere a função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ definida pelo sistema,

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases} ,$$

a) Determine o Jacobiano e mostre que se anula na origem;

b) A função dada será invertível em certa vizinhança da origem ? Justifique.

5.12 - Considere a função de $\mathbf{R}^2 - \{(0\,,0)\}$ em $\mathbf{R}^2$ definida pelo sistema ,

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} \\[2ex] v = \dfrac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} .$$

a) Mostre que se trata de uma função injectiva no seu domínio e determine a respectiva inversa ;

b) Determine matricialmente as derivadas parciais de primeira ordem da função inversa no ponto de coordenadas $u = v = 1$, a partir da matriz Jacobiana da função dada.

5.13 - Considere a função de $D = \{(\rho\,,\,\alpha\,) : \ \rho > 0 \ \ , \ \ 0 \leq \ \alpha \ < 2\,\pi\,\} \subset \mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ definida pelo sistema ,

$$\begin{cases} x \ = \ \rho \,.\, cos\ \alpha \\ y \ = \ \rho \,.\, sen\ \alpha \end{cases} \quad ,$$

a) Mostre que se trata de uma função injectiva em D e determine a respectiva inversa global ;

b) Calcule o determinante Jacobiano da função dada e, a partir dele, determine o da função inversa .

5.14 - Seja $g(x)$ uma função de classe C^1 em $\mathbf{R}$ e tal que $g'(x) \neq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbf{R}$. Considere em seguida a função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ definida pelo sistema,

$$\begin{cases} z \ = \ g(x) \ + \ g(y) \\ w \ = \ g(x) \ - \ g(y) \end{cases} \quad .$$

a) Mostre que a função de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ dada é globalmente invertível e determine a respectiva inversa;

b) Calcule as derivadas parciais $\partial\, y \,/\, \partial\, z$ e $\partial\, y \,/\, \partial\, w$.

<u>**RESPOSTAS**</u> **:**

5.3 - $c \ = 4 \ , \ z'_x \ = \ \dfrac{2}{e^2 \ - \ 4} \quad , \ z'_y \ = \ \dfrac{2e}{e^2 \ - \ 4} \quad .$

5.4 - a) $\begin{cases} -\,2\,y_1 \cdot \dfrac{\partial\, y_1}{\partial\, x_1} \ - \ \dfrac{\partial\, y_2}{\partial\, x_1} \ = \ -\,2\ x_1 \\ \dfrac{\partial\, y_1}{\partial\, x_1} \ + \ \dfrac{\partial\, y_2}{\partial\, x_1} \ = \ -\,1 \end{cases}$ e $\begin{cases} -\,2\,y_1 \cdot \dfrac{\partial\, y_1}{\partial\, x_2} \ - \ \dfrac{\partial\, y_2}{\partial\, x_2} \ = \ -\,2\ x_2 \\ \dfrac{\partial\, y_1}{\partial\, x_2} \ + \ \dfrac{\partial\, y_2}{\partial\, x_2} \ = \ 2\ x_2 \end{cases}$;

b) $\dfrac{\partial\, y_1}{\partial\, x_1} \ = \ \dfrac{2\ x_1 \ + \ 1}{2\ y_1 \ - 1} \quad , \ \dfrac{\partial\, y_2}{\partial\, x_1} \ = \ \dfrac{2\ y_1 \ + \ 2\ x_1}{1 \ - \ 2\ y_1} \quad , \ \dfrac{\partial\, y_1}{\partial\, x_2} \ = \ 0 \quad , \ \dfrac{\partial\, y_2}{\partial\, x_2} \ = \ 2\ x_2$;

c) $\dfrac{\partial^2\, y_1}{\partial\, x_1\, \partial\, x_2} \ = \ \dfrac{\partial^2\, y_1}{\partial\, x_2\, \partial\, x_1} \ = \ \dfrac{\partial^2\, y_1}{\partial\, x_2^2} \ = \ 0 \quad ,$

$$\frac{\partial^2\, y_1}{\partial\, x_1^2} \ = \ \frac{2\,.\,(2\ y_1 \ - \ 1)^2 \ - \ 2\,.\,(2\ x_1 \ + \ 1)^2}{(2\ y_1 \ - \ 1)^3} \quad .$$

5.5 - b) $g'(1) = \dfrac{cos\,1 - 1}{cos\,1}$, $h'(1) = 1$.

5.6 - $g'(1) = -2/7$, $g''(1) = 76/343$.

5.7 - $u = v = 1$, $\left[\dfrac{\partial v}{\partial y}\right]_{(1\,,\,0)} = 2$.

5.8 - $(2y - 2xy) \cdot \dfrac{dy}{dx} = -2x + y^2 - 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x\sqrt{x} + y^2\sqrt{x} - 3x + 1}{2y\,(1-x)\sqrt{x}} \quad \text{, para } x > 0 \text{ , } x \neq 1 \text{ e } y \neq 0 \text{ .}$$

5.9 - b) 7/4 .

5.10 - a) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{u} \\ y = v \end{cases}$;

c) Não pode. Se o fosse, o produto da respectiva matriz Jacobiana pela matriz Jacobiana da função dada seria a matriz identidade; mas então a matriz Jacobiana da função dada teria inversa e o respectivo determinante não poderia ser nulo.

5.11 - a) $4x^2 + 4y^2$; **b)** Não, porque não é injectiva em nenhuma vizinhança da origem .

5.12 - a) $\begin{cases} x = \dfrac{u}{u^2 + v^2} \\ y = \dfrac{v}{u^2 + v^2} \end{cases}$; **b)** $\dfrac{\partial x}{\partial u} = 0$; $\dfrac{\partial x}{\partial v} = -1/2$; $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -1/2$;

$$\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \text{ .}$$

5.13 - a) $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = arc\left[\; sen\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ \wedge\ cos\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \;\right] \in [\,0\ ,\ 2\pi\,[\end{cases}$;

b) Determinante Jacobiano da função $= \rho$

Determinante Jacobiano da função inversa $= \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5 . 14 - a) $\begin{cases} x = g^{-1}\left(\dfrac{z+w}{2}\right) \\ y = g^{-1}\left(\dfrac{z-w}{2}\right) \end{cases}$; **b)** $\dfrac{\partial y}{\partial z} = \left[\dfrac{1}{2\,g'(y)}\right]_{y = g^{-1}(\frac{z-w}{2})}$;

$$\frac{\partial y}{\partial w} = \left[-\frac{1}{2\,g'(y)}\right]_{y = g^{-1}(\frac{z-w}{2})} .$$

CAPÍTULO X

EXTREMANTES CONDICIONADOS EM $\mathbf{R}^n$

1 . Introdução

Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma função com domínio em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ e tomando valores em $\mathbf{R}$ e considere-se o problema da determinação dos extremantes relativos da restrição dessa função ao conjunto $B \cap A$, em que B é um conjunto definido por $m < n$ equações,

$$\begin{cases} g_1(x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n) \ = \ 0 \\ g_2(x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n) \ = \ 0 \\ \cdots \\ g_m(x_1\,,\ x_2\,,\ \cdots\,,\ x_n) \ = \ 0 \end{cases} ,$$

tendo as funções $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ domínio em certo aberto $A_0 \subseteq \mathbf{R}^n$.

Fazendo $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tem-se,

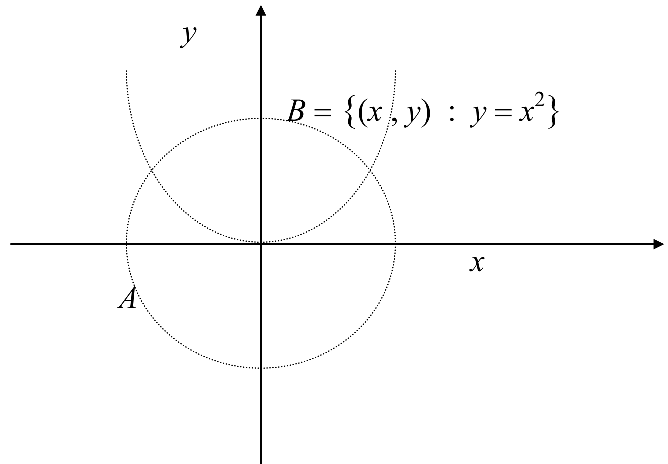
$$B = \{\ \bar{x}\ :\ \bar{x} \in A_0\ \wedge\ g_i(\bar{x}) = 0\ \ (i = 1, 2, \dots, m)\ \} \subseteq A_0 ,$$

e claro que para o problema apresentado ter sentido deverá ser $B \cap A \neq \varnothing$ e, por maioria de razão, $A \cap A_0 \neq \varnothing$.

Para melhor esclarecimento do que está em causa neste capítulo considere--se a função,

$$f(x, y) = \frac{y + x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} ,$$

cujo domínio é o conjunto $A = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 < 1\}$. Usando uma técnica estudada em capítulo anterior, sabemos já determinar os extremantes relativos de $f(x, y)$ considerando a função definida em todo o seu domínio, isto é, sem outra restrição quanto aos valores a assumir pelas variáveis x e y que não seja a decorrente de dever ter-se $(x, y) \in A$. Considere-se porém que se pretendem determinar os extremantes relativos da função dada mas considerando que o domínio da função se restringe ao conjunto $B \cap A$ em que B é o conjunto dos pontos (x, y) que verificam a equação $y - x^2 = 0$; isto é, trata-se de determinar os extremantes relativos da função supondo que (x, y), em vez de variar livremente no domínio da função, tem a sua variação restringida aos pontos desse domínio que verificam a equação $y - x^2 = 0$ (falando-se então de *extremantes relativos condicionados* por $y - x^2 = 0$) . A figura seguinte, onde se representam os conjuntos A e B é elucidativa:



Quando se pretendem determinar os extremantes relativos de $f(x,y)$ sob a condição $y = x^2$, está em causa a determinação dos extemantes da referida função supondo que o seu domínio se restringe aos pontos do arco de parábola contido em A .

Voltando ao caso geral, vamos estudar a questão da determinação dos extremantes relativos da restrição de $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ ao conjunto $B \cap A$ admitindo como hipóteses fundamentais , que serão assumidas em tudo o que se segue sem necessidade de menção explícita:

1) A função $f(x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ admite no aberto $A \cap A_0$ derivadas parciais contínuas pelo menos de primeira e segunda ordens ;
2) As funções $g_i (x_1 , x_2 , \ldots , x_n)$ ($i = 1 , 2 , \ldots, m$) admitem no aberto $A \cap A_0$ derivadas parciais contínuas pelo menos de primeira e segunda ordens .

2 . <u>Primeira condição necessária de extremante</u>

Admita-se que o ponto $\overline{a} = (a_1 , a_2 , \ldots , a_n)$ é um extremante relativo da restrição de $f(\overline{x})$ ao conjunto $B \cap A$ e , para assentar ideias, vamos admitir que se trata de um minimizante (a argumentação adapta-se com facilidade ao caso do maximizante).

Então, por definição,

a) Esse ponto pertence ao conjunto $B \cap A$; e
b) Existe um $\varepsilon > 0$ tal que,

$$\overline{x} \in V_\varepsilon(\overline{a}) \cap B \cap A \Rightarrow f(\overline{x}) \geq f(\overline{a}) \ .$$

Considere-se agora a matriz ,

$$M = \begin{bmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} & \cdots & f'_{x_n} \\ g'_{1x_1} & g'_{1x_2} & \cdots & g'_{1x_n} \\ \cdots & & & \\ g'_{mx_1} & g'_{mx_2} & \cdots & g'_{mx_n} \end{bmatrix} ,$$

com as derivadas envolvidas tomadas no ponto $\overline{a} = (a_1 , a_2 , \dots , a_n)$. Vamos provar que a matriz M tem as suas $m + 1$ linhas linearmente dependentes, para o que bastará provar que são nulos todos os menores de ordem $m + 1$.

Como $m + 1 \leq n$, qualquer menor de ordem $m + 1$ da matriz M se obtém, suprimindo nesta matriz $n - m - 1$ colunas. Considere-se sem perda de generalidade o menor,

$$\Delta = \begin{vmatrix} f'_{x_1} & f'_{x_2} & \cdots & f'_{x_{m+1}} \\ g'_{1x_1} & g'_{1x_2} & \cdots & g'_{1x_{m+1}} \\ \cdots & & & \\ g'_{mx_1} & g'_{mx_2} & \cdots & g'_{mx_{m+1}} \end{vmatrix} ,$$

e repare-se que se este determinante não for nulo, então o sistema,

$$(1) \quad \begin{cases} f\,(x_1 \,,\, \cdots \,,\, x_n) - f\,(a_1 \,,\, \cdots \,,\, a_n) - u = 0 \\ g_i\,(x_1 \,,\, \cdots \,,\, x_n) = 0 \quad , \quad i = 1\,, 2\,, \cdots , m \end{cases} ,$$

de $m + 1$ equações nas $n + 1$ incógnitas, $x_1 , \dots , x_{m+1} , x_{m+2} , \dots , x_n$, u define implicitamente um sistema de funções contínuas,

$$\begin{cases} x_1 = h_1\,(x_{m+2} \,,\, \cdots \,,\, x_n \,,\, u) \\ x_2 = h_2\,(x_{m+2} \,,\, \cdots \,,\, x_n \,,\, u) \\ \cdots \\ x_{m+1} = h_{m+1}\,(x_{m+2} \,,\, \cdots \,,\, x_n \,,\, u) \end{cases} ,$$

em certa vizinhança do ponto $(a_{m+2} , \dots , a_n , 0)$; e então tomando um ponto $(a_{m+2} , \dots , a_n , s)$, com s negativo e suficientemente próximo de 0 de tal maneira que esse ponto pertença ao domínio das funções h_j e fazendo ,

$$a'_j = h_j\,(a_{m+2} , \dots , a_n , s) \quad , \quad j = 1 , 2 , \dots , m + 1 \ ,$$

é evidente que o ponto $(a'_1 , \dots , a'_{m+1} , a_{m+2} , \dots , a_n , s)$ é solução do sistema (1) ; e atendendo ainda a que as funções h_j são contínuas no ponto $(a_{m+2} , \dots , a_n , 0)$, é possível escolher s_0 suficientemente próximo de zero e negativo de forma que o ponto $(a'_1 , \dots , a'_{m+1} , a_{m+2} , \dots , a_n)$ pertença a $V_\varepsilon(\overline{a})$ e claro que,

$$\begin{cases} f(a'_1 \,,\, \cdots \,,\, a'_{m+1} \,,\, a_{m+2} \,,\, \cdots \,,\, a_n) - f(a_1 \,,\, \cdots \,,\, a_n) - s_0 = 0 \\ g_i(a'_1 \,,\, \cdots \,,\, a'_{m+1} \,,\, a_{m+2} \,,\, \cdots \,,\, a_n) = 0 \quad , \quad i = 1\,,2\,,\cdots\,,\, m \end{cases} \qquad ,$$

donde, por ser $s_0 < 0$,

$$f(a'_1 \,, \ldots \,, a'_{m+1} \,, a_{m+2} \,, \ldots \,, a_n) < f(a_1 \,, \ldots \,, a_n) \,,$$

e portanto $(a_1 \,, \ldots \,, a_n)$ não pode ser minimizante relativo da restrição da função $f(x_1 \,, \ldots \,, x_n)$ ao conjunto $B \cap A$. Então para que o ponto $(a_1 \,, \ldots \,, a_n)$ seja minimizante, deverá ser nulo o menor Δ ; para os outros menores de ordem $m + 1$ da matriz M um raciocínio semelhante permite concluir que eles têm igualmente de ser nulos.

A argumentação precedente, embora desenvolvida para o caso de um minimizante, adapta-se com facilidade ao caso de maximizante, utilizando, em vez de um s_0 negativo suficientemente próximo de zero, um s_0 positivo também suficientemente próximo de zero .

Fica assim provado que, se o ponto $(a_1 \,, \ldots \,, a_n)$ for extremante relativo da restrição da função $f(x_1 \,, \ldots \,, x_n)$ ao conjunto $B \cap A$, então a matriz M tem os suas linhas linearmente dependentes, ou seja, existem multiplicadores constantes $\lambda_0 \,, \lambda_1 \,, \ldots \,, \lambda_m$, não todos nulos, tais que,

$$\begin{cases} \lambda_0 \cdot f'_{x_j}(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g'_{i\,x_j}(\bar{a}) = 0 \\ j = 1 \,,\, 2 \,,\, \cdots \,,\, n \end{cases} \qquad .$$

Por outro lado , como o extremante $(a_1 \,, \ldots \,, a_n)$ pertence ao conjunto B definido pelas m equações $g_i(\bar{x}) = 0$, tem-se que $g_i(\bar{a}) = 0$ para $i = 1 \,, 2 \,, \ldots \,, m$. E como os primeiros membros das equações do sistema ,

$$\begin{cases} \lambda_0 \cdot f'_{x_j}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g'_{i\,x_j}(\bar{x}) = 0 \quad , \; j = 1 \,,\, 2 \,,\, \cdots \,,\, n \\ g_i(\bar{x}) = 0 \quad , \; i = 1 \,,\, 2 \,,\, \cdots \,,\, m \end{cases} \qquad ,$$

são as derivadas parciais F'_{x_j} e F'_{λ_i} da chamada *função Lagrangeana* ,

$$F(\bar{x} \;;\, \lambda_0 \,,\, \lambda_1 \,,\, \ldots \,,\, \lambda_m) = \lambda_0 \,.\, f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,.\, g_i(\bar{x}) \quad \text{, tem-se:}$$

Teorema 1 : *Sendo* $(a_1 , \dots , a_n)$ *um extremante relativo da restrição da função* $f(x_1 , \dots , x_n)$ *ao conjunto* $B \cap A$ *, em que B é o conjunto definido pelas equações* $g_i(\bar{x}) = 0$ *,* $i = 1 , 2 , \dots , m$ *, então o sistema,*

$$\begin{cases} F'_{x_j}(\bar{x} ; \lambda_0 , \lambda_1 , \cdots , \lambda_m) = 0 \quad , j = 1 , 2 , \cdots , n \\ F'_{\lambda_i}(\bar{x} ; \lambda_0 , \lambda_1 , \cdots , \lambda_m) = 0 \quad , i = 1 , 2 , \cdots , m \end{cases} ,$$

de $n+m$ *equações nas* $m+n+1$ *incógnitas* λ_0 , λ_1 , … , λ_m , x_1 , … , x_n *, cujos primeiros membros são as derivadas* F'_{x_j} *(* $j = 1 , 2 , \dots n$*) e* F'_{λ_i} *(* $i = 1 , 2 , \dots , m$*) da função Lagrangeana , tem como solução* $(\lambda_0 , \lambda_1 , \dots , \lambda_m , a_1 , \dots , a_n)$ *com os* λ_i *,* $i = 0 , 1 , 2 , \dots , m$ *, não todos nulos*

O teorema precedente permite na prática determinar os possíveis extremantes a partir do sistema,

$$\begin{cases} F'_{x_j} = \lambda_0 \cdot f'_{x_j}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g'_{i x_j}(\bar{x}) = 0 \quad , j = 1 , 2 , \cdots , n \\ F'_{\lambda_i} = g_i(\bar{x}) = 0 \quad , i = 1 , 2 , \cdots , m \end{cases} ;$$

se este sistema não tiver soluções ou em todas as possíveis soluções for $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, então a restrição de $f(x_1 , \dots , x_n)$ ao conjunto $B \cap A$ não admite extremantes relativos ; caso existam soluções que tenham algum $\lambda_i \neq 0$, os correspondentes pontos $(a_1 , \dots , a_n)$ são possíveis extremantes e designam-se por *pontos de estacionaridade* .

Vejamos alguns exemplos de aplicação do teorema 1.

1) Determinar os pontos de estacionaridade de $f(x , y) = x^2 + 3\,x\,y$ sob a condição $x + x\,y = 1$, ou seja, os pontos de estacionaridade da restrição de $f(x , y)$ ao conjunto $\{(x , y) \ : x + x\,y = 1\}$. A partir da função Lagrangeana,

$$F(x , y ; \lambda_0 , \lambda_1) = \lambda_0 \cdot (x^2 + 3\,x\,y) + \lambda_1 \cdot (x + x\,y - 1) ,$$

obtém-se o sistema ,

$$\begin{cases} F'_x = 2x\lambda_0 + 3y\lambda_0 + \lambda_1 + y\lambda_1 = 0 \\ F'_y = 3x\lambda_0 + x\lambda_1 = 0 \\ F'_{\lambda_1} = x + xy - 1 = 0 \end{cases} ,$$

cuja resolução se apresenta seguidamente :

$$\begin{cases} (2x + 3y)\,\lambda_0 + (1+y)\,\lambda_1 = 0 \\ x\,(3\lambda_0 + \lambda_1) = 0 \\ x + xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x + 3y)\,\lambda_0 + (1+y)\,\lambda_1 = 0 \\ x = 0 \;\vee\; \lambda_1 = -3\lambda_0 \\ x + xy - 1 = 0 \end{cases} ;$$

como, no caso $x = 0$, a terceira equação fica uma igualdade impossível, podemos prosseguir considerando apenas o caso $\lambda_1 = -3\,\lambda_0$,

$$\begin{cases} (2x + 3y)\,\lambda_0 + (1+y)(-3\lambda_0) = 0 \\ \lambda_1 = -3\lambda_0 \\ x + xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - 3)\,\lambda_0 = 0 \\ \lambda_1 = -3\lambda_0 \\ x + xy - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_0 = 0 \;\vee\; x = 3/2 \\ \lambda_1 = -3\lambda_0 \\ x + xy - 1 = 0 \end{cases} ;$$

ora no caso $\lambda_0 = 0$ a segunda equação dá também $\lambda_1 = 0$ e, portanto, somos levados a soluções do tipo (0 , 0 , a , b) que, por não apresentarem pelo menos um dos $\lambda_i \neq 0$, não correspondem a pontos de estacionaridade (a , b) ; resta portanto o caso $x = 3/2$ que determina, com a terceira equação, $y = -1/3$, valores que conjugados com um $\lambda_0 \neq 0$ arbitrário dão a solução (λ_0 , - 3 λ_0 , 3/2 , - 1/3) .

Existe, portanto, apenas um ponto de estacionaridade, com coordenadas $x = 3/2$, $y = -1/3$.

2) Determinar os pontos de estacionaridade de $f(x_1 , x_2) = 2x_1^2 - x_2^2$ sob a condição $x_1^2 \,.\, x_2 - x_2^3 = 0$. Tem-se,

$$F(x_1 , x_2 ; \lambda_0 , \lambda_1) = \lambda_0 \,.\, (2x_1^2 - x_2^2) + \lambda_1 \,.\, (x_1^2 \,.\, x_2 - x_2^3) ,$$

assim se obtendo,

$$\begin{cases} 4x_1\lambda_0 + 2x_1x_2\lambda_1 = 0 \\ -2x_2\lambda_0 + x_1^2\lambda_1 - 3x_2^2\lambda_1 = 0 \\ x_1^2x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1\lambda_0 + 2x_1x_2\lambda_1 = 0 \\ -2x_2\lambda_0 + (x_1^2 - 3x_2^2)\lambda_1 = 0 \\ x_2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1\lambda_0 + 2x_1x_2\lambda_1 = 0 \\ -2x_2\lambda_0 + (x_1^2 - 3x_2^2)\lambda_1 = 0 \\ x_2 = 0 \;\vee\; x_1 = -x_2 \;\vee\; x_1 = x_2 \end{cases} ;$$

considerando separadamente cada uma das alternativas obtidas a partir da terceira equação, temos:

a) Se $x_2 = 0$, a primeira equação reduz-se a $4x_1\lambda_0 = 0$ e a segunda a $x_1^2\lambda_1 = 0$; portanto, se for $x_1 \neq 0$, só é possível ser $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, donde resulta que com $a_1 \neq 0$ o ponto $(a_1, 0)$ não é ponto de estacionaridade ; se for $x_1 = 0$, quaisquer λ_0 e λ_1 são possíveis e, portanto, o sistema admite a solução $(\lambda_0, \lambda_1, 0, 0)$ com os λ_i não todos nulos, assim se concluindo que $(0, 0)$ é ponto de estacionaridade .

b) Se $x_1 = -x_2$, as duas primeiras equações do sistema reduzem-se a,

$$-4x_2\lambda_0 - 2x_2^2\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad -2x_2\lambda_0 - 2x_2^2\lambda_1 = 0 \;;$$

resolvendo o sistema formado por estas duas equações conclui-se que, com $x_2 \neq 0$, só é possível ser $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$, pelo que $(-a_2, a_2)$, com $a_2 \neq 0$, não é ponto de estacionaridade ; com $x_1 = -x_2 = 0$, obtém-se o ponto de estacionaridade já encontrado em a) .

c) Finalmente, se $x_1 = -x_2$, sai uma conclusão semelhante à da alínea b), obtendo-se de novo o ponto de estacionaridade já encontrado em a).

3. <u>Pontos de estacionaridade singulares e não singulares</u>

Os pontos de estacionaridade podem classificar-se em singulares e não singulares, sendo esta distinção importante como adiante se verá.

Como se disse, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é ponto de estacionaridade se e só se existem λ_0, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, não todos nulos tais que ,

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m, a_1, a_2, \dots, a_n) \,,$$

é uma solução do sistema do teorema 1, ou seja, do sistema,

$$\begin{cases} F'_{x_j} = \lambda_0 \cdot f'_{x_j}(\bar{x}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g'_{i x_j}(\bar{x}) = 0 \;, \; j = 1, 2, \cdots, n \\ F'_{\lambda_i} = g_i(\bar{x}) = 0 \;, \; i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} .$$

Vê-se sem dificuldade que a cada ponto de estacionaridade correspondem infinitas soluções desse sistema com algum $\lambda_i \neq 0$. De facto, se o ponto $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ é ponto de estacionaridade, então o sistema homogéneo,

$$(1) \quad \begin{cases} F'_{x_j}(\bar{a}\,; \lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) = \lambda_0 \cdot f'_{x_j}(\bar{a}) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot g'_{i x_j}(\bar{a}) = 0 \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{cases} ,$$

de n equações nas $m + 1$ incógnitas λ_0 , λ_1 , … , λ_m , admite pelo menos uma solução não nula e portanto admite uma infinidade. Assim, sendo $\overline{a}$ ponto de estacionaridade, existem infinitas soluções,

$$(\lambda_0 , \lambda_1 , \dots , \lambda_m , \ a_1 \ , \ a_2 \ , \dots , \ a_n) \ \text{com certo} \ \lambda_i \neq 0 \ ,$$

para o sistema do enunciado do teorema 1.

Ora, um ponto de estacionaridade $\overline{a} = (a_1 \ , \ a_2 \ , \dots , \ a_n)$ diz-se *não singular* se e só se todas as soluções não nulas do sistema homogéneo (1) são tais que $\lambda_0 \neq 0$; diz-se *singular* se existem soluções não nulas do tipo $(0 , \lambda_1 , \dots , \lambda_m)$ para esse mesmo sistema homogéneo .

A singularidade de um ponto de estacionaridade $\overline{a} = (a_1 \ , \ a_2 \ , \dots , \ a_n)$ pode relacionar-se com a característica da matriz ,

$$G = \begin{bmatrix} g'_{1x_1}(\overline{a}) & g'_{1x_2}(\overline{a}) & \cdots & g'_{1x_n}(\overline{a}) \\ g'_{2x_1}(\overline{a}) & g'_{2x_2}(\overline{a}) & \cdots & g'_{2x_n}(\overline{a}) \\ \cdots & & & \\ g'_{mx_1}(\overline{a}) & g'_{mx_2}(\overline{a}) & \cdots & g'_{mx_n}(\overline{a}) \end{bmatrix} .$$

Com efeito, a qualquer solução não nula da forma $(0 , \lambda_1 , \dots , \lambda_m)$ para o sistema homogéneo (1) , corresponde a solução não nula $(\lambda_1 , \dots , \lambda_m)$ para o sistema também homogéneo,

$$(2) \begin{cases} F'_{x_j}(\overline{a} \ ; 0 \ , \ \lambda_1 \ , \ \cdots \ , \ \lambda_m) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \ . \ g'_{ix_j}(\overline{a}) = 0 \\ j = 1 \ , 2 \ , \ \cdots \ , \ n \end{cases} ,$$

e inversamente ; e como o sistema (2) admite soluções não nulas se e só se a sua matriz (que é a transposta da matriz G) tiver característica inferior a m , podemos afirmar que o ponto de estacionaridade $(a_1 \ , \ a_2 \ , \dots , \ a_n)$ é singular se e só se a matriz G tiver característica inferior a m ; e evidentemente será não singular se e só se a matriz G tiver característica igual a m .

Vejamos alguns exemplos:

1) O ponto de estacionaridade do exemplo 1) do ponto 2. é não singular. Com efeito, como então se viu, os valores dos multiplicadores correspondentes ao ponto de estacionaridade encontrado são $\lambda_1 = -3\lambda_0$, com λ_0 arbitrário ; ora, para se ter um dos λ_i diferente de zero tem de ser necessariamente $\lambda_0 \neq 0$. A mesma conclusão se tira considerando a matriz G que no caso presente é $G = [2/3 \quad 3/2 \ ]$ e tem característica igual a 1 (= m).

2) O ponto de estacionaridade do exemplo 2) do ponto 2. é singular. Com efeito, como então se viu, os valores dos multiplicadores correspondentes ao ponto de estaciona-

ridade encontrado são λ_0 e λ_1 , ambos arbitrários, assim se concluindo que o sistema do teorema 1 admite soluções do tipo (0 , λ_1 , 0 , 0), com $\lambda_1 \neq 0$. A mesma conclusão se tira considerando a matriz G que no caso presente é $G = [0 \quad 0\,]$ e tem característica igual a 0 (m = 1).

Relativamente aos pontos de estacionaridade não singulares é possível reformular a condição necessária do teorema 1. Vamos efectivamente ver que para um ponto de estacionaridade $\bar{a} = (a_1\ ,\ a_2\ , \ldots ,\ a_n)$ não singular é possível encontrar uma e uma só solução do tipo $(1, \lambda_1\ , \ldots ,\ \lambda_m)$ para o sistema homogéneo (1) : a partir de uma qualquer solução não nula $(\lambda_0\ ,\ \lambda_1\ , \ldots ,\ \lambda_m)$ desse sistema homogéneo, obtém-se, dado que $\lambda_0 \neq 0$,

$$(1/\lambda_0)\,.\,(\lambda_0\ , \lambda_1\ , \ldots , \lambda_m) = (1\ ,\ \lambda_1/\lambda_0\ , \ldots ,\ \lambda_m/\lambda_0)\ ,$$

que é ainda uma solução não nula desse mesmo sistema ; por outro lado, se tal sistema homogéneo admitisse duas soluções distintas,

$$(1, \lambda_1\ , \ldots , \lambda_m) \ \text{ e } \ (1, \xi_1\ , \ldots , \xi_m)\ , \text{com algum } \ \xi_i \neq \lambda_i\ ,$$

admitiria também a solução não nula $(0\ ,\ \lambda_1 - \xi_1\ , \ldots ,\ \lambda_m - \xi_m)$ e, portanto, o ponto de estacionaridade $\bar{a} = (a_1\ ,\ a_2\ , \ldots ,\ a_n)$ seria singular contrariamente ao admitido.

Estas considerações permitem mostrar que, para os pontos de estacionaridade não singulares,

<u>Teorema 2</u> : *Sendo* $(a_1\ , \ldots\ , a_n)$ *um ponto de estacionaridade não singular da restrição da função* $f\,(x_1\ , \ldots\ , x_n)$ *ao conjunto* $B \cap A$ *, em que B é o conjunto definido pelas equações* $g_i\,(\bar{x}) = 0$ *,* $i = 1\ , 2\ , \ldots , m$ *, então o sistema,*

$$\begin{cases} F'_{x_j}\,(\bar{x}\ ;\lambda_1\ , \cdots\ , \lambda_m) = 0 \quad , \ j = 1\ , 2\ , \cdots\ , n \\ F'_{\lambda_i}\,(\bar{x}\ ;\lambda_1\ , \cdots\ , \lambda_m) = 0 \quad , \ i = 1\ , 2\ , \cdots\ , m \end{cases} ,$$

de $n{+}m$ *equações nas* $m{+}n$ *incógnitas* $\lambda_1\ , \ldots\ , \lambda_m\ , x_1\ , \ldots , x_n$ *, cujos primeiros membros são as derivadas parciais* F'_{x_j} $(j = 1\ , 2\ , \ldots\ n)$ *e* F'_{λ_i} $(i = 1\ , 2\ , \ldots\ m)$ *da função Lagrangeana ,*

$$F\,(\bar{x}\ ;\lambda_1\ , \ldots\ , \lambda_m) = f\,(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ .\ g_i\,(\bar{x})$$

tem como solução $(\lambda_1\ , \ldots\ , \lambda_m\ , a_1\ , \ldots\ , a_n)$ *com um único sistema de multiplicadores* λ_i

<u>Demonstração</u> : As considerações que precedem o enunciado do teorema mostram que, sendo $\bar{a} = (a_1\ ,\ a_2\ , \ldots ,\ a_n)$ um ponto de estacionaridade não singular , existe um único sistema de multiplicadores $\lambda_1\ , \ldots\ , \lambda_m$ que fazem com que

$(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m, a_1, \dots, a_n)$ seja solução do sistema do enunciado do teorema 1 . E como a esta solução para o sistema do teorema 1 corresponde a solução $(\lambda_1, \dots, \lambda_m, a_1, \dots, a_n)$ para o sistema do teorema 2 e inversamente , podemos considerar concluída a demonstração.

A resolução do sistema do teorema 2 permite obter todos os pontos de estacionaridade $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ para os quais existem multiplicadores $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tais que $(1, \lambda_1, \dots, \lambda_m, a_1, \dots, a_n)$ é solução do sistema do teorema 1 ; entre esses pontos de estacionaridade encontram-se seguramente todos os não singulares (pelo disposto no teorema 2) mas também, eventualmente, alguns singulares pois nada impede que para determinados pontos singulares o sistema do teorema 1 admita soluções em que seja $\lambda_0 = 1$.

Na que se segue vamos tratar exclusivamente do caso dos pontos de estacionaridade não singulares, muito embora um dos teoremas a estudar seja também válido para certo tipo de pontos singulares. A isso faremos referência na altura própria.

Refira-se a propósito que os pontos de estacionaridade não singulares se podem obter resolvendo o sistema da teorema 2 e averiguando em seguida, pelo cálculo da característica da matriz G , quais os pontos obtidos que são não singulares, devendo sempre ter-se em atenção que entre os pontos obtidos na resolução daquele sistema pode haver pontos singulares.

4. Segunda condição necessária de extremante

Considere-se um ponto de estacionaridade $(a_1, \dots, a_n)$ não singular da restrição da função $f(x_1, \dots, x_n)$ ao conjunto $B \cap A$, em que B é o conjunto definido pelas equações $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$. Como preparação para se estabelecer uma segunda condição necessária de extremante vamos demonstrar primeiro o,

Teorema 3 : *Se o ponto de estacionaridade $(a_1, \dots, a_n)$ não singular da restrição da função $f(x_1, \dots, x_n)$ ao conjunto $B \cap A$, em que B é o conjunto definido pelas equações $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, for um extremante, então, dados os valores $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ tais que ,*

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \cdot \xi_j = 0 \\ i = 1, 2, \cdots, m \end{cases} ,$$

existe um sistema de funções $x_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, n$, definidas em certa vizinhança $]-\varepsilon, \varepsilon[$ da origem, com derivadas contínuas de primeira e segunda ordens, e tais que,

$$g_i[x_1(t), \dots, x_n(t)] = 0 \quad (-\varepsilon < t < \varepsilon) \quad , \; x_j(0) = a_j \;\; e \;\; x'_j(0) = \xi_j$$

para $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

Demonstração : Além das funções $g_i(\bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, m$, considerem-se mais $n - m$ funções arbitrárias

$$g_{m+1}(\bar{x}) \ , \ g_{m+2}(\bar{x}) \ , \ \dots \ , \ g_n(\bar{x}) \ ,$$

que tenham segundas derivadas parciais contínuas em certa vizinhança do ponto $(a_1, \dots, a_n)$ e de tal modo que o determinante,

$$\Delta = \left[g'_{i\,x_j}(\bar{a}) \right] \ (\, i = 1, 2, \dots, m, m+1, \dots, n \ ; \ j = 1, 2, \dots, n \,)$$

seja não nulo. Repare-se que a hipótese da não singularidade de ponto de estacionaridade envolvido é fundamental . No caso de se tratar de um ponto de estacionaridade singular, a matriz formada pelas primeiras m linhas de Δ teria característica menor que m e portanto qualquer escolha que se fizesse quanto às $n - m$ funções $g_{m+j}(\bar{x})$ não poderia evitar o anulamento daquele determinante.

Com as m funções $g_i(\bar{x})$ mais as $n - m$ funções $g_{m+j}(\bar{x})$ escolhidas como se indicou, construa-se o sistema,

$$\begin{cases} h_i(\bar{x}\,;t) = g_i(\bar{x}) = 0 & , \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ h_r(\bar{x}\,;t) = g_r(\bar{x}) - g_r(\bar{a}) - t \,.\, \sum_{j=1}^{n} g'_{r\,x_j}(\bar{a}) \,.\, \xi_j = 0 & , \quad r = m+1, \cdots, n \end{cases} .$$

Trata-se de um sistema de n equações nas $n + 1$ incógnitas $x_1, \dots, x_n, t$ que verifica as seguintes propriedades:

a) Para $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ e $t = 0$, o sistema é verificado ;

b) As funções $h_j(\bar{x}\,; t)$ têm derivadas parciais de primeira e segunda ordens contínuas em certa vizinhança do ponto $(a_1, \dots, a_n, 0)$;

c) O determinante funcional $|\, \partial h_i / \partial x_j \,|$ não se anula no ponto de coordenadas $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ e $t = 0$ pois, nesse ponto, ele coincide com o determinante Δ .

De acordo com o que sabemos da teoria das funções implícitas podemos então concluir que existe um sistema de n funções $x_j(t)$, definidas em certa vizinhança $]-\varepsilon, \varepsilon[$ da origem e a verificar as seguintes propriedades:

- As funções $x_j(t)$ são contínuas e têm derivadas parciais contínuas de primeira e segunda ordens em $]-\varepsilon, \varepsilon[$;

- Fazendo $x_j = x_j(t)$, as n igualdades $h_j(\bar{x}\,; t) = 0$ transformam-se noutras tantas identidades para $-\varepsilon < t < \varepsilon$;

- Para $t = 0$, tem-se $x_j(0) = a_j$.

Fica assim provado o teorema , com excepção da parte em que se afirma ser $x'_j(0) = \xi_j$. Para completar a demonstração , considerem-se as n identidades que se obtêm de $h_j(\bar{x}\,;t) = 0$ fazendo $x_j = x_j(t)$ com $-\varepsilon < t < \varepsilon$:

$$\begin{cases} g_i\left[x_1(t), \cdots, x_n(t)\right] = 0 \qquad , \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ g_r\left[x_1(t), \cdots, x_n(t)\right] - g_r(\bar{a}) - t \,.\, \sum_{j=1}^{n} g'_{r x_j}(\bar{a}) \,.\, \xi_j = 0 \;\;,\;\; r = m+1, \cdots, n \end{cases}$$

Por diferenciação , obtém-se, para $t = 0$,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \,.\, x'_j(0) = 0 \qquad , \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n} g'_{r x_j}(\bar{a}) \,.\, \left[x'_j(0) - \xi_j\right] = 0 \quad , \quad r = m+1, \cdots, n \end{cases} ,$$

e como por hipótese $\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \,.\, \xi_j = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, tem-se,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \,.\, \left[x'_j(0) - \xi_j\right] = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n} g'_{r x_j}(\bar{a}) \,.\, \left[x'_j(0) - \xi_j\right] = 0 \quad , \quad r = m+1, \cdots, n \end{cases} ,$$

e dado que o determinante deste sistema homogéneo de n equações nas n incógnitas $x'_1(0) - \xi_1, \ldots, x'_n(0) - \xi_n$ é $\Delta = \left[g'_{i x_j}(\bar{a})\right] \neq 0$, tem-se necessariamente $x'_1(0) =$ $= \xi_1, \ldots, x'_n(0) = \xi_n$, como faltava demonstrar.

O teorema precedente vai permitir estabelecer uma nova condição necessária para que um ponto de estacionaridade não singular seja extremante.

<u>Teorema 4</u> : *Se o ponto de estacionaridade* $(a_1 , \ldots , a_n)$ *não singular da restrição da função* $f(x_1 , \ldots , x_n)$ *ao conjunto* $B \cap A$ *, em que B é o conjunto definido pelas equações* $g_i(\bar{x}) = 0$ *,* $i = 1 , 2 , \ldots , m$ *, for um minimizante (maximizante), então a segunda diferencial no ponto* $\bar{x} = \bar{a}$ *da função que se obtém a partir de,*

$$F(\bar{x} \; ; \lambda_1 , \ldots , \lambda_m) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, . \, g_i(\bar{x}) \; ,$$

dando aos λ_i *os valores (únicos) que formam com* $\bar{a}$ *a solução do sistema do enunciado do teorema* 2 *, é uma forma quadrática definida ou semidefinida positiva (negativa) no subespaço das soluções do seguinte sistema homogéneo nos acréscimos* h_j *:*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \, . \, h_j = 0 \\ i = 1 , 2 , \cdots , m \end{cases}$$

<u>Demonstração</u> : Com os acréscimos h_j a verificar o sistema homogéneo do enunciado, sejam $x_j(\mathrm{t})$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, $j = 1 , 2 , \ldots , n$, as funções cuja existência e propriedades são asseguradas pelo teorema anterior. A função composta ,

$$h(t) = f[x_1(t) , \ldots , x_n(t)] \quad , \; -\varepsilon < t < \varepsilon \; ,$$

tem evidentemente um extremo relativo em $t = 0$. Com efeito, sendo $\bar{a}$ um minimizante , temos $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$ para $\bar{x}$ pertencente ao mesmo tempo a certa $V_\delta(\bar{a})$ e ao conjunto B ; ora, para $-\varepsilon < t < \varepsilon$, tem-se,

$$g_i[x_1(t) , \ldots , x_n(t)] = 0 \; , \; i = 1 , 2 , \ldots , m \, ,$$

e portanto o ponto $[x_1(t) , \ldots , x_n(t)]$ pertence ao conjunto B ; como as funções $x_i(t)$ são contínuas em $t = 0$, ponto em que assumem os valores a_j , então, para t pertencente a certa $V_\eta(0)$, tem-se ,

$$[x_1(t) , \ldots , x_n(t)] \in V_\delta(\bar{a}) \cap B \, ,$$

pelo que,

$$t \in V_\eta(0) \;\Rightarrow\; h(t) = f[x_1(t) , \ldots , x_n(t)] \geq f(a_1 , \ldots , a_n) = h(0) \, .$$

Da mesma forma se prova que, sendo $\overline{a}$ um maximizante, h(t) tem um máximo relativo em $t = 0$.

Aplicando a regra de derivação de uma função composta, obtém-se,

$$h'(t) = \sum_{r=1}^{n} f'_{x_r}\left[x_1(t)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(t)\right]\ .\ x'_r(t)$$

$$h''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} f''_{x_r x_j}\left[x_1(t)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(t)\right] . x'_r(t) . x'_j(t)\ +$$

$$+\ \sum_{r=1}^{n} f'_{x_r}\left[x_1(t)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(t)\right] .\ x''_r(t)\ \ ;$$

atendendo agora a que $x'_j(0) = h_j$ (ver teorema 3) , resulta,

$$h''(0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} f''_{x_r x_j}(\overline{a}) . h_r\, h_j\ +\ \sum_{r=1}^{n} f'_{x_r}(\overline{a})\ .\ x''_r(0)$$

e deverá ter-se $h''(0) \geq 0$ se $\overline{a}$ for minimizante e $h''(0) \leq 0$ se $\overline{a}$ for maximizante .

Notando que, com o sistema (único) de valores λ_i correspondentes ao extremante $\overline{a}$, se verifica ser , de acordo com o teorema 2,

$$f'_{x_j}(\overline{a})\ +\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i . g'_{i x_j}(\overline{a})\ =\ 0 \quad ,\ j\ =\ 1\,,2\,,\ldots\,,n\ ,$$

resulta, multiplicando ambos os membros por $x''_j(0)$ e somando em j de 1 a n ,

$$(A) \qquad \sum_{j=1}^{n} x''_j(0) . f'_{x_j}(\overline{a})\ +\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \lambda_i . g'_{i x_j}(\overline{a}) . x''_j(0)\ =\ 0 .$$

Mas de $g_i[\,x_1(t)\,, \ldots\,,\ x_n(t)] = 0$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, resulta sucessivamente,

$$\sum_{r=1}^{n} g'_{i x_r}\left[x_1(t)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(t)\right]\ .\ x'_r(t)\ =\ 0$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} g''_{i x_r x_j}\left[x_1(t)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(t)\right] . x'_r(t) . x'_j(t)\ +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n} g'_{i\,x_r}\left[\,x_1(t)\ ,\ \cdots\ ,\ x_n(t)\right] .\ x''_r(t) = 0\ ,$$

e em $t = 0$,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} g''_{i\,x_r x_j}(\bar{a})\,.\,h_r\,h_j \ + \sum_{r=1}^{n} g'_{i\,x_r}(\bar{a})\ .\ x''_r(0) = 0\ ;$$

multiplicando ambos os membros desta igualdade por λ_i e somando em i de 1 a m , obtém-se,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} \lambda_i\ .\ g'_{i\,x_r}(\bar{a})\ .\ x''_r(0) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \lambda_i\,.\,g''_{i\,x_r x_j}(\bar{a})\,.\,h_r\,h_j\ .$$

Entrando com o este resultado na igualdade supra referenciada por (A) , tem-se ,

$$\sum_{j=1}^{n} x''_j(0)\ .\ f'_{x_j}(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\ .\left[\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} g''_{i\,x_r x_j}(\bar{a})\ .\,h_r\,h_j\right]\ ;$$

então, a expressão anteriormente obtida para $h''(0)$ transforma-se em,

$$h''(0) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} f''_{x_r x_j}(\bar{a})\,.\,h_r\,h_j \ + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\,.\left[\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} g''_{i\,x_r x_j}(\bar{a})\ .\ h_r\,h_j\right],$$

que é precisamente a segunda diferencial a que se refere o enunciado.

Então, se $\bar{a}$ for minimizante tem-se $h''(0) \geq 0$ e a segunda diferencial referida no enunciado será portanto não negativa, quaisquer que sejam os h_j a verificar o sistema homogéneo também referido no enunciado; se $\bar{a}$ for maximizante tem-se $h''(0) \leq 0$ e a segunda diferencial referida será portanto não negativa, quaisquer que sejam os h_j a verificar o mesmo sistema homogéneo .

O teorema está completamente demonstrado.

Para mostrar que a condição do teorema precedente não é necessária quando o ponto de estacionaridade em causa seja singular, retome-se o exemplo 2) do ponto 2. , em que,

$$f(x_1\,,x_2) = 2\,x_1^2 - x_2^2 \quad \text{e} \quad g(x_1\,,x_2) = x_1^2\ .\ x_2 - x_2^3 = 0\ .$$

Recorde-se que o ponto (0 , 0) é ponto de estacionaridade singular, verificando o sistema do teorema 1 com λ_0 e λ_1 arbitrários . Assim, o referido ponto de estacionaridade verifica o sistema do teorema 2 com, por exemplo, $\lambda_1 = 2$. Com $\lambda_1 = 2$, a segunda diferencial a que se refere o teorema 4 tem a seguinte expressão ,

$$d^2 F = 4h_1^2 - 2h_2^2 \ ,$$

enquanto o sistema homogéneo referido no mesmo teorema é,

$$0 \,.\, h_1 + 0 \,.\, h_2 = 0 \ ,$$

e é óbvio que a forma quadrática $d^2 F$ é indefinida no subespaço das soluções de $0 \,.\, h_1 + 0 \,.\, h_2 = 0$ (que é $\mathbf{R}^2$) .

Se o teorema 4 fosse aplicável, o ponto (0 , 0) não poderia ser nem maximizante nem minimizante da restrição de $f\,(x_1 \,,\, x_2\,) = 2x_1^2 - x_2^2$ ao conjunto definido pela equação $g\,(x_1 \,,\, x_2\,) = x_1^2 \,.\, x_2 - x_2^3 = 0$. No entanto, verifica-se sem dificuldade que tal ponto é minimizante (absoluto) da função no conjunto em causa. Com efeito, dado que,

$$g\,(x_1 \,,\, x_2\,) = x_1^2 \,.\, x_2 - x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_2 \,.\, (\,x_1 + x_2\,) \,.\, (\,x_1 - x_2\,) = 0 \ ,$$

a restrição da função ao conjunto definido pela condição $g\,(x_1 \,,\, x_2\,) = 0$ assume os seguintes valores:

$$f(x_1 \,,\, x_2\,) = 2x_1^2 \quad , \ \text{se} \ \ x_2 = 0 \ ,$$

$$f(x_1 \,,\, x_2\,) = x_2^2 \quad , \ \text{se} \ \ x_1 = \pm\, x_2 \ ,$$

donde resulta $f\,(x_1 \,,\, x_2\,) \geq f\,(0 \,,\, 0) = 0$, qualquer que seja $(x_1 \,,\, x_2\,)$ a verificar a condição $g\,(x_1 \,,\, x_2\,) = 0$.

5. <u>Condições suficientes de extremante</u>

Vamos seguidamente estabelecer condições suficientes para que um ponto de estacionaridade $\bar{a} = (a_1 \,, \ldots ,\, a_n)$ seja extremante relativo da restrição de $f(x_1 \,, \ldots ,\, x_n)$ ao conjunto $A \cap B$, em que B é o conjunto definido pelas equações $g_i(\,\bar{x}\,) = 0$, $i = 1$, 2 , … , m , condições válidas no caso especial em que o sistema do teorema 2 tenha como solução,

$$(\lambda_1 \,, \ldots ,\, \lambda_m \,,\, a_1 \,, \ldots ,\, a_n\,) \ ,$$

com um certo sistema de multiplicadores λ_i .

Repare-se que não se exige que o ponto de estacionaridade em causa seja não singular ; basta que seja obtido por resolução do sistema do teorema 2 que, como se viu, pode também conduzir a pontos de estacionaridade singulares.

Como resultado auxiliar, que será depois utilizado na demonstração do teorema que dá as condições suficientes de extremante, vamos primeiro demonstrar que,

<u>Teorema 5</u> : *Sendo* (λ_1 , … , λ_m , a_1 , … , a_n) *uma solução do sistema do teorema* 2, *considere-se a segunda diferencial da função de* $\bar{x}$,

$$F(\bar{x}\,;\lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, . \, g_i(\bar{x}) \ ,$$

no ponto $\bar{x} = \bar{a}$, *supondo os* λ_i *fixados nos valores que constam daquela solução. Se para qualquer acréscimo* (h_1 , … , h_n) ≠ (0 , … , 0) *tal que,*

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \, . \, h_j = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \ ,$$

a segunda diferencial referida assume sempre um valor positivo (negativo), então existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ *tal que para* $\bar{x}_i$ *e* $\bar{y}$ *pertencentes a essa vizinhança e valores* h_j *não todos nulos e a verificar,*

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{x}_i) \, . \, h_j = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \ ,$$

se verifica também $d^2 F(\bar{y}\,; \lambda_1, \dots, \lambda_m) > 0 \ (< 0)$

<u>Demonstração</u> : De facto , se nas condições do enunciado não existisse a referida $V_\varepsilon(\bar{a})$, seria então possível fixar uma sucessão $\varepsilon_p \to 0$ de modo que para cada p se encontrassem $\bar{x}_{ip}$ e $\bar{y}_p$ pertencentes a $V_{\varepsilon_p}(\bar{a})$ e acréscimos h_{jp} não todos nulos , tais que,

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{x}_{ip}) \, . \, h_{jp} = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \ ,$$

$$d^2 F(\bar{y}_p \,; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \le 0 \ .$$

Fazendo então,

$$k_{jp} = \frac{h_{jp}}{\max\limits_{1 \le j \le n} |h_{jp}|} \quad , \quad j = 1 , 2 , \dots , n \ ,$$

seria, $|k_{jp}| \le 1$ para $j = 1 , 2 , \dots , n$ e $|k_{j_p p}| = 1$ para certo j_p . É claro que, para os acréscimos k_{jp} seria também ,

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{x}_{ip}) \, . \, k_{jp} = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \ ,$$

$$d^2 F(\bar{y}_p \,; \lambda_1, \dots, \lambda_m) \le 0 \ .$$

Ao fazermos $p \to +\infty$, claro que $\varepsilon_p \to 0$, $\bar{x}_{ip} \to \bar{a}$ e $\bar{y}_p \to \bar{a}$, mas a sucessão limitada $\bar{k}_p = (k_{1p} , \dots , k_{np})$ pode não ter limite , admitindo no entanto uma subsucessão com limite,

$$\bar{k} = (k_1 , \dots , k_n) = lim\ \bar{k}_{\alpha_p} = lim\,(k_{1\alpha_p} , \dots , k_{n\alpha_p}) .$$

Para qualquer p , pelo menos uma das coordenadas $k_{j\alpha_p}$ tem módulo igual à unidade e, assim, como só há um número finito de coordenadas, uma delas tem módulo igual à unidade para infinitos valores de p pelo que os k_j não são todos nulos. A continuidade das primeiras e segundas derivadas parciais das funções f, $g_1 , \dots g_m$ permitiria concluir que, com os acréscimos k_j,

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \,.\, k_j = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \ ,$$

$$d^2 F(\bar{a} \,;\, \lambda_1 , \dots , \lambda_m) \le 0$$

o que seria contrário à hipótese assumida no enunciado do teorema.

No caso da segunda diferencial em $\bar{x} = \bar{a}$ ser negativa, a demonstração faz-se do mesmo modo, trocando apenas o sinal das desigualdades envolvidas.

O resultado que acaba de ser estabelecido vai ser utilizado para demonstrar o teorema seguinte, onde são dadas condições suficientes de extremante (maximizante ou minimizante).

Teorema 6 : *Sendo* $(\lambda_1 , \dots , \lambda_m ,\ a_1 , \dots , a_n)$ *uma solução do sistema do teorema* 2, *considere-se a segunda diferencial da função de* $\bar{x}$,

$$F(\bar{x} \,;\, \lambda_1 , \dots , \lambda_m) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,.\, g_i(\bar{x}) \ ,$$

no ponto $\bar{x} = \bar{a}$, *supondo os* λ_i *fixados nos valores que constam daquela solução. Se para qualquer acréscimo* $(h_1 , \dots , h_n) \neq (0 , \dots , 0)$ *tal que,*

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{a}) \,.\, h_j = 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \dots , m \ ,$$

a segunda diferencial referida assume sempre um valor positivo (negativo) , então o ponto $\bar{a} = (a_1 , \dots , a_n)$ *é um minimizante (maximizante) relativo da restrição da função* $f(x_1 , \dots , x_n)$ *ao conjunto* $A \cap B$ *, em que* B *é o conjunto definido pelas equações* $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1 , 2 , \dots , m$

Demonstração : Faz-se a demonstração apenas para o caso correspondente ao minimizante, dado que o argumento se aplica facilmente ao caso do maximizante por troca do sentido das desigualdades envolvidas.

A função de $\bar{x}$,

$$F(\bar{x}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,.\, g_i(\bar{x})\ ,$$

é contínua e tem derivadas parciais contínuas até à segunda ordem em certa $V_\delta(\bar{a})$. Escrevendo a segunda fórmula de Taylor com resto de Lagrange, tem-se, para $\bar{x} \in V_\delta(\bar{a})$,

$$F(\bar{x}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) - F(\bar{a}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) = d\,F(\bar{a}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) +$$

$$+\ \frac{1}{2}\,.\,d^2 F[\,\bar{a} + \theta.(\bar{x}-\bar{a})\,;\ \lambda_1\,,\dots,\lambda_m\,]$$

com certo $\theta \in\ ]\,0\,,1[$. Notando agora que,

$$F(\bar{x}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,.\, g_i(\bar{x})$$

$$F(\bar{a}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) = f(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,.\, g_i(\bar{a}) = f(\bar{a})$$

$$d\,F(\bar{a}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) = \sum_{j=1}^{n} F'_{x_j}(\bar{a}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m)\,.\,(x_j - a_j) = 0\ ,$$

e que, com $\bar{x} \in B$, $g_i(\bar{x}) = 0$, tem-se qualquer que seja $\bar{x} \in V_\delta(\bar{a}) \cap B$,

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2}\,.\,d^2 F[\,\bar{a} + \theta.(\bar{x}-\bar{a})\,;\ \lambda_1\,,\dots,\lambda_m\,]\quad ,\ 0 < \theta < 1\ .$$

Escrevendo agora a primeira fórmula de Taylor com resto de Lagrange em $V_\delta(\bar{a})$ para cada uma das funções $g_i(\bar{x})$,

$$g_i(\bar{x}) - g_i(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}\left[\bar{a} + \theta_i.(\bar{x} - \bar{a})\right].(x_j - a_j)\quad ,\ 0 < \theta_i < 1$$

e notando que, com $\bar{x} \in V_\delta(\bar{a}) \cap B$, $g_i(\bar{x}) = g_i(\bar{a}) = 0$, resulta,

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}\left[\bar{a} + \theta_i.(\bar{x} - \bar{a})\right].(x_j - a_j) = 0\quad ,\ i = 1\,,2\,,\dots,m\ .$$

Repare-se agora que, nas condições do enunciado, é válido o teorema 5, ou seja, existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ tal que para $\bar{z}_i$ e $\bar{y}$ a ela pertencentes e valores h_j não todos nulos e a verificar,

$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{z}_i)\,.\,h_j = 0\quad ,\ i = 1\,,2\,,\dots,m\ ,$$

se verifica $d^2 F(\bar{y}\,;\lambda_1\,,\dots,\lambda_m) > 0$. Supondo $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap V_\delta(\bar{a}) \cap B$, tem-se que,

$$\bar{z}_i = \bar{a} + \theta_i.(\bar{x}-\bar{a})\quad \text{e}\quad \bar{y} = \bar{a} + \theta.(\bar{x}-\bar{a})\ ,$$

pertencem a $V_\varepsilon(\bar{a})$. Aplicando o resultado anterior com tais $\bar{z}_i$ e $\bar{y}$ e considerando $h_j = x_j - a_j$, tem-se,

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2} \cdot d^2 F[\bar{a} + \theta \cdot (\bar{x} - \bar{a}) ; \lambda_1 , \dots , \lambda_m] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot d^2 F(\bar{y} ; \lambda_1 , \dots , \lambda_m) > 0 ,$$

desde que $\bar{x} \neq \bar{a}$ (o que equivale a não serem todos nulos os acréscimos $h_j = x_j - a_j$), dado que,

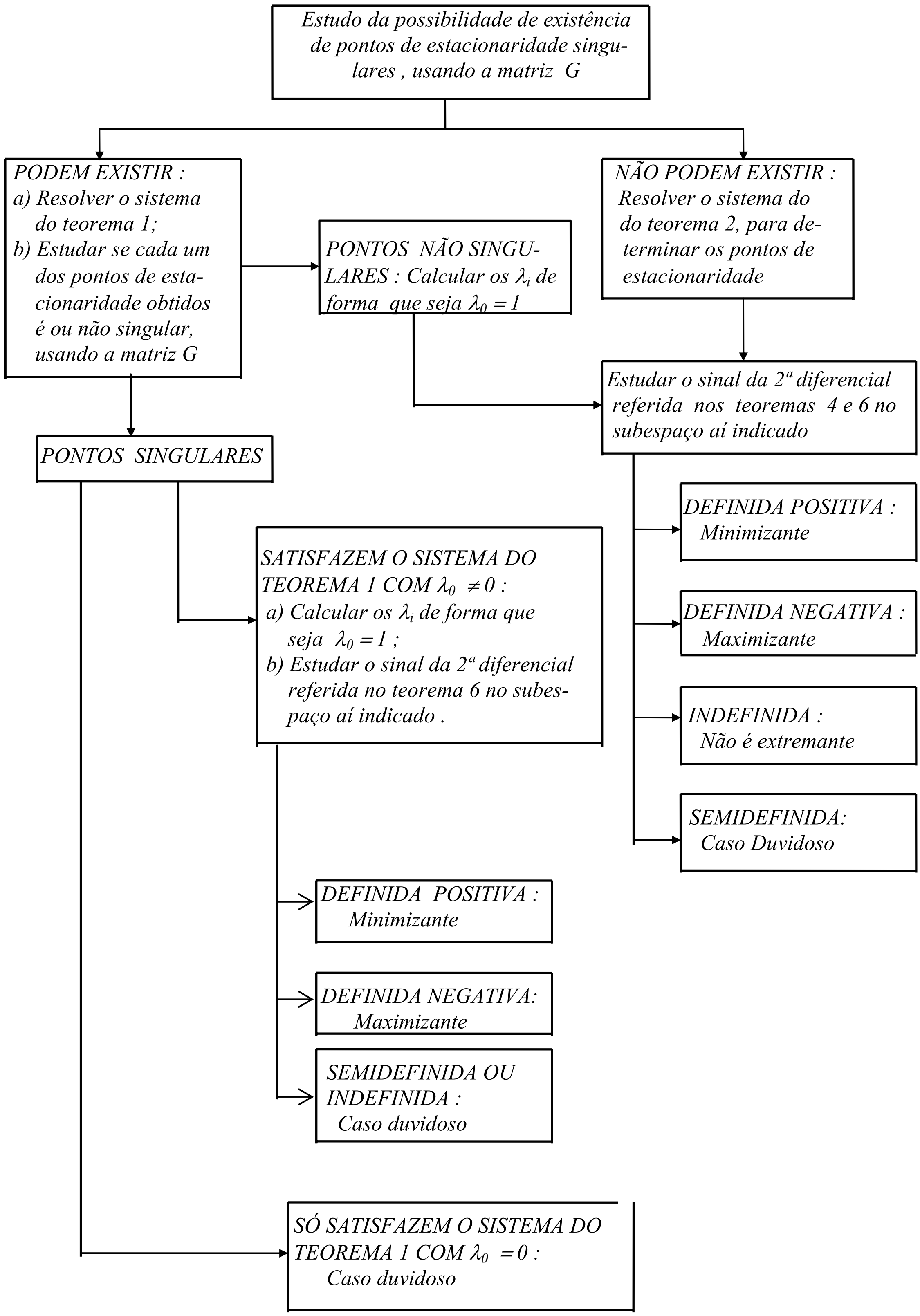
$$\sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}(\bar{z}_i) \cdot h_j = \sum_{j=1}^{n} g'_{i x_j}\left[\bar{a} + \theta_i \cdot (\bar{x} - \bar{a})\right] \cdot (x_j - a_j) = 0 ,$$

para $i = 1 , 2 , \dots , m$.

Fica assim provado que $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \cap V_\delta(\bar{a}) \cap B \Rightarrow f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, verificando-se a igualdade apenas com $\bar{x} = \bar{a}$, ou seja, $\bar{a}$ é minimizante relativo estrito da restrição da função $f(x_1 , \dots , x_n)$ ao conjunto $A \cap B$, em que B é definido pelas equações $g_i(\bar{x}) = 0$, $i = 1 , 2 , \dots , m$.

Os teoremas 4 e 6 permitem esclarecer, na maioria dos casos de interesse, se um ponto de estacionaridade não singular é ou não extremante. Se o ponto de estacionaridade é singular, o caso é mais complicado : o teorema 4 não pode aplicar-se e o teorema 6 só é aplicável se o ponto de estacionaridade em questão tiver sido obtido a partir da resolução do sistema do teorema 2.

Na página seguinte apresenta-se um diagrama que resume a técnica a utilizar na determinação dos extremantes condicionados.


Estudo da possibilidade de existência de pontos de estacionaridade singulares, usando a matriz G
PODEM EXISTIR :
a) Resolver o sistema do teorema 1;
b) Estudar se cada um dos pontos de estacionaridade obtidos é ou não singular, usando a matriz G
NÃO PODEM EXISTIR :
Resolver o sistema do do teorema 2, para determinar os pontos de estacionaridade
PONTOS NÃO SINGULARES : Calcular os λ_i de forma que seja $\lambda_0 = 1$
Estudar o sinal da 2^a diferencial referida nos teoremas 4 e 6 no subespaço aí indicado
PONTOS SINGULARES
DEFINIDA POSITIVA : Minimizante
DEFINIDA NEGATIVA : Maximizante
INDEFINIDA : Não é extremante
SEMIDEFINIDA: Caso Duvidoso
SATISFAZEM O SISTEMA DO TEOREMA 1 COM $\lambda_0 \neq 0$:
a) Calcular os λ_i de forma que seja $\lambda_0 = 1$;
b) Estudar o sinal da 2^a diferencial referida no teorema 6 no subespaço aí indicado .
DEFINIDA POSITIVA : Minimizante
DEFINIDA NEGATIVA: Maximizante
SEMIDEFINIDA OU INDEFINIDA : Caso duvidoso
SÓ SATISFAZEM O SISTEMA DO TEOREMA 1 COM $\lambda_0 = 0$: Caso duvidoso

6. Condições suficientes . Técnica do determinante orlado

6.1 - Generalidades sobre formas quadráticas reais

Sem se pretender fazer um tratamento detalhado do tema (para o que se remete o leitor para a obra *ÁLGEBRA LINEAR - Gregório Luís & Silva Ribeiro*) , vamos aqui apresentar um breve resumo das principais definições e resultados.

A forma quadrática $Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j$, com $a_{ij} = a_{ji}$, pode representar-se matricialmente por $Q = X^T A\, X$, em que,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad X^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \quad (\text{ Transposta de } X\,)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{(Matriz real simétrica de ordem } n \text{) .}$$

A forma quadrática $Q = X^T A\, X$ diz-se :

- *Definida positiva* se e só se para qualquer $X \neq O$, $Q = X^T A\, X > 0$;
- *Definida negativa* se e só se para qualquer $X \neq O$, $Q = X^T A\, X < 0$;
- *Semidefinida positiva* se e só se para qualquer X , $Q = X^T A\, X \geq 0$ e , pelo menos para um $X \neq O$, $Q = X^T A\, X = 0$;
- *Semidefinida negativa* se e só se para qualquer X , $Q = X^T A\, X \leq 0$ e , pelo menos para um $X \neq O$, $Q = X^T A\, X = 0$;
- *Indefinida* se e só se existem X_1 e X_2 tais que , $Q_1 = X_1^T A\, X_1 > 0$ e $Q_2 = = X_2^{\,T} A\, X_2 < 0$.

O critério teoricamente mais simples (que não o mais fácil de aplicar na prática) para classificação da forma quadrática $Q = X^T A\, X$ baseia-se no cálculo dos valores próprios da matriz simétrica A , isto é, no cálculo das n raízes (todas reais, iguais ou diferentes) da seguinte equação polinomial de grau n em λ :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \; .$$

A análise dos sinais das raízes da equação característica permite imediatamente fazer a classificação da forma quadrática :

- É definida positiva se e só se todas as raízes da equação característica forem positivas ;
- É definida negativa se e só se todas as raízes da equação característica forem negativas ;
- É semidefinida positiva se e só todas as raízes da equação característica forem não negativas e uma pelo menos nula ;
- É semidefinida negativa se e só todas as raízes da equação característica forem não positivas e uma pelo menos nula ;
- É indefinida se e só se a equação característica admite pelo menos uma raiz positiva e outra negativa.

Do ponto de vista prático, a classificação de uma forma quadrática pelo sinal dos valores próprios da matriz A envolve a resolução de uma equação polinomial de grau n . Para ultrapassar esta dificuldade, existem critérios baseados no cálculo da cadeia fundamental de menores principais do determinante da matriz A : calculados os menores,

$$H_1 = a_{11} \ , \ H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \ , \ \dots \ , H_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(*Cadeia fundamental de menores principais*)

tem-se :

a) A forma quadrática é definida positiva se e só se,

$$H_1 > 0 \ , \ H_2 > 0 \ , \ \dots \ , \ H_n > 0 \ ;$$

b) A forma quadrática é definida negativa se e só se,

$$H_1 < 0 \ , \ H_2 > 0 \ , \ \dots \ , \ (-1)^n . H_n > 0 \ ;$$

c) Se $H_n \neq 0$ e não se verifica nem a) nem b) , a forma quadrática é indefinida ;

d) Se $H_1 > 0$, $H_2 > 0$, … , $H_{n-1} > 0$, $H_n = 0$, a forma quadrática é semidefinida positiva ;

e) Se $H_1 < 0$, $H_2 > 0$, … , $(-1)^{n-1}. H_{n-1} > 0$, $H_n = 0$, a forma quadrática é semidefinida negativa ;

f) Se $H_n = 0$ e não se verifica d) ou e) , a forma quadrática pode ser semidefinida ou indefinida e a questão tem de esclarecer-se por outra via.

No caso da alínea f), a natureza da forma quadrática pode esclarecer-se pelo cálculo dos valores próprios da matriz A , embora exista uma técnica alternativa baseada no cálculo das cadeias fundamentais de menores principais de todas as matrizes que possam obter-se a partir de A por troca de linhas seguida de idêntica troca de colunas. Esta técnica fundamenta-se no seguinte teorema (pode ver-se a demonstração no artigo *Definite and Semidefinite Quadratic Forms* da autoria de *G. Debreu* publicado originalmente em *Econometrica, Vol 20, Pág 295*) :

<u>Teorema 7</u> : *Dada a forma quadrática* $Q = X^T A \ X$ *, com A matriz real simétrica, calculem-se as cadeias fundamentais de menores principais das n! matrizes que podem obter-se por permutação idêntica das linhas e colunas da matriz* A *:*

a) Tem-se $Q = X^T A \ X \geq 0$ *qualquer que seja* X *se e só se são não negativos todos os menores principais referidos ;*

b) Tem-se $Q = X^T A \ X \leq 0$ *qualquer que seja* X *se e só se têm o sinal de* $(-1)^r$ *todos os menores principais referidos, em que* $\underline{r}$ *designa a ordem do menor principal em causa*

O teorema precedente permite aliás esclarecer a situação quando não se verifique a) ou b) - casos em que, como se disse, a forma quadrática é definida positiva ou negativa - . No entanto, trata-se de um critério de difícil aplicação prática (por poder envolver o cálculo de um grande número de determinantes) e é preferível usar os critérios expressos em c) , d) e e), guardando o teorema como alternativa ao cálculo dos valores próprios quando haja que esclarecer a situação no caso f).

Para exemplificar a aplicação do teorema, considere-se a forma quadrática,

$$Q = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + x_2^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad .$$

A cadeia fundamental de menores principais da matriz A é ,

$$H_1 = 1 \ , \ H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \ H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

pelo que estamos no caso f). Calculando os valores próprios,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda \, . [\, 3 \ - \ (1 - \lambda)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 1 + \sqrt{3} > 0 \ \vee \ \lambda = 1 - \sqrt{3} < 0 \ ,$$

conclui-se que a forma quadrática em questão é indefinida. A mesma conclusão pode tirar-se com base no teorema 7 : a cadeia fundamental de menores principais da matriz A é, como já vimos,

$$H_1 = 1 \ , \ H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ , \ H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

trocando na matriz A a segunda com a terceira linhas e a segunda com a terceira colunas, obtém-se a matriz,

$$A_{132} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

a que corresponde a seguinte cadeia fundamental de menores principais,

$$K_1 = 1 \ , \ K_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ , \ K_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Tendo em conta os sinais de K_1 , K_2 e K_3 , o teorema 7 permite concluir tratar-se de uma forma quadrática indefinida.

6.2 - Classificação das formas quadráticas no conjunto das soluções de um sistema homogéneo indeterminado

Em certas aplicações interessa fazer a classificação de uma forma quadrática não em todo o domínio ($\mathbf{R}^n$) mas sim num subespaço desse domínio, ou seja, no conjunto das soluções de um sistema homogéneo indeterminado. É o que se passa, por exemplo, quando na resolução de um problema de extremantes condicionados pretendemos esclarecer pela aplicação dos teoremas 4 e 6 se um dado ponto de estacionaridade é ou não minimizante ou maximizante.

Considere-se a forma quadrática $Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i \, x_j = X^T A \ X$ e o sistema homogéneo indeterminado,

$$\begin{cases} b_{11} x_1 + b_{12} x_2 + \cdots + b_{1n} x_n = 0 \\ b_{21} x_1 + b_{22} x_2 + \cdots + b_{2n} x_n = 0 \\ \cdots \\ b_{m1} x_1 + b_{m2} x_2 + \cdots + b_{mn} x_n = 0 \end{cases} ,$$

ou seja, $B\,X = O$, com ,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Podemos desde logo supor que a característica de B é m (o que, conjuntamente com a hipótese de o sistema ser indeterminado, implica ser $m < n$) ; se tal característica for $r < m$, a matriz B tem $m - r$ linhas que são combinações lineares de r linhas independentes e as correspondentes equações do sistema são portanto redundantes, isto é, podem ser eliminadas na obtenção da solução geral do sistema.

A maneira mais directa de classificar a forma quadrática $Q = X^T A X$ no conjunto das soluções do sistema $B X = O$ envolve os seguintes passos (*ÁLGEBRA LINEAR - Gregório Luís & Silva Ribeiro*) :

a) Determinação geral da solução do sistema $B X = O$ na qual m incógnitas principais se exprimem como funções lineares de $n - m$ incógnitas não principais ;

b) Substituição em $Q = X^T A X$ das m incógnitas principais pelas respectivas expressões em termos das $n - m$ incógnitas não principais ;

c) Classificação da forma quadrática obtida na alínea anterior, após substituição, no seu domínio (espaço $\mathbf{R}^{\mathbf{n-m}}$) pelas técnicas referidas no ponto 6.1 .

Para exemplificar a aplicação desta técnica, considere-se a classificação da forma quadrática,

$$Q = x_1^2 + x_2 x_3 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad ,$$

no conjunto das soluções do sistema homogéneo,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad .$$

A solução geral do sistema é,

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{3} \cdot x_4 - x_3 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \cdot x_4 \\ x_3 \ , \ x_4 \ \textit{quaisquer} \end{cases} \quad .$$

Substituindo em Q as variáveis x_1 e x_2 pelas suas expressões em termos de x_3 e x_4 e simplificando obtém-se a seguinte forma quadrática nestas últimas variáveis :

$$Q^* = 2x_3^2 + x_3 x_4 + \frac{4}{3} x_4^2 = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 4/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} .$$

Dado que,

$$H_1 = 2 > 0 \ , \ H_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 4/3 \end{vmatrix} = \frac{8}{3} - \frac{1}{4} = \frac{29}{12} > 0 \ ,$$

a forma quadrática Q^* é definida positiva e, portanto, a forma quadrática inicial é definida positiva no subespaço das soluções do sistema homogéneo dado.

É possível estabelecer critérios que permitem classificar uma forma quadrática $Q = X^T A \ X$ como definida positiva ou negativa no conjunto das soluções do sistema homogéneo indeterminado $B \ X = O$, critérios baseados no estudo dos sinais de certos menores principais de um determinante especial construído à custa das matrizes A e B (o chamado *determinante orlado*).

A utilização de tais critérios requer certos cuidados e a verificação prévia de certas hipóteses, o que nem sempre é devidamente explicitado na apresentação ligeira e simplista desta técnica que é feita nos Apêndices Matemáticos de alguns manuais de Economia ou mesmo em alguns manuais de Matemática para Economistas.

Mesmo quando não explicitamente mencionado, em tudo o que vai seguir-se admite-se que A é uma matriz quadrada e simétrica de ordem n e que B é uma matriz $m \times n$ com característica $r = m < n$ (1) . Vamos estudar condições necessárias e suficientes para que a forma quadrática $Q = X^T A \ X$ seja definida positiva (negativa) no conjunto das soluções do sistema homogéneo indeterminado $B\,X = O$.

---

(1) *Quando seja $r < m$, podemos eliminar no sistema $m - r$ equações redundantes e o problema reconduz-se a uma situação em que a nova matriz B tem característica igual ao número de linhas.*

Em primeiro lugar tem-se o seguinte,

<u>Teorema 8</u> : *Dada a forma quadrática $Q = X^T A \ X$, tem-se :*

a) $Q = X^T A \ X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B\,X = O$ se e só se existe um nu-mero real λ tal que $K = X^T [\,A + \lambda\, B^T B]\,X$ é definida positiva (no seu domínio $\mathbf{R^n}$ *) ;*

b) $Q = X^T A\ X < 0$ *para todos os* $X \neq O$ *tais que* $B\,X = O$ *se e só se existe um número real* λ *tal que* $K = X^T\,[\,A + \lambda\,B^T B]\ X$ *é definida negativa (no seu domínio* $\mathbf{R^n}$*)*

__Demonstração__ **:** ***a)*** **A condição é necessária** . Seja $Q = X^T A\ X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B\,X = O$ e vejamos que existe um número real λ nas condições do enunciado. A função,

$$h(X) = -\,\frac{X^T A\ X}{X^T (B^T B)\ X} \;=\; -\,\frac{X^T A\ X}{(X^T B^T)(B\,X)} \quad ,$$

é definida e contínua no conjunto $D = \{\,X \;:\; B\,X \neq O\,\} \subset \mathbf{R^n}$ e vamos ver que se trata de uma função majorada nesse conjunto. Se não fosse majorada , existiria uma sucessão $X_p \in D$ ($p = 1 , 2 , 3 , \dots$) tal que $lim\ h\,(X_p) = +\infty$ e claro que , como $X_p \in D \Rightarrow X_p \neq O$, poderíamos então definir a sucessão,

$$Y_p = \frac{1}{\|\,X_p\,\|} \cdot X_p \in D \quad , \quad p = 1 , 2 , 3 , \dots ,$$

para a qual se teria $h\,(Y_p) = h\,(X_p)$ e, portanto, também $lim\ h\,(Y_p) = +\infty$. Por ser $\|\,Y_p\,\| = 1$ para $p = 1 , 2 , 3 , \dots$, a sucessão Y_p admitiria uma subsucessão Y_{α_p} com limite $Y \neq O$ e claro que também $lim\ h\,(Y_{\alpha_p}) = +\infty$. Se fosse $Y \in D$, a continuidade de $h(X)$ daria $lim\ h\,(Y_{\alpha_p}) = h\,(\,Y\,)$ finito , portanto deveria ser $Y \notin D$, ou seja, $B\ Y = O$. Mas como por hipótese,

$$B\,Y = O \;\wedge\; Y \neq O \;\Rightarrow\; Q \;=\; Y^T A\ \ Y > 0 \;\;,$$

ter-se-ia o numerador de,

$$h\,(Y_{\alpha_p}) = \;-\,\frac{Y_{\alpha_p}^T\ A\ \ Y_{\alpha_p}}{(Y_{\alpha_p}^T\ B^T)\ (B\ Y_{\alpha_p})}$$

a tender para $Y^T A\ Y > 0$; para que $lim\ h\,(Y_{\alpha_p}) = +\infty$, deveria portanto $(Y_{\alpha_p}^T\ B^T)(B\ Y_{\alpha_p})$ tender para zero por valores negativos, o que é impossível por ser $(\,X^T B^T)\,(\,B\,X) \geq 0$ para todo o X .

Então $h\,(\,X\,)$ tem de ser majorada em $D = \{\,X \;:\; B\,X \neq O\,\}$ como se queria mostrar. Sendo λ^* um majorante de $h\,(\,X\,)$ em D tem-se, fixando qualquer $\lambda > \lambda^*$,

$$h(\,X\,) \;=\, -\,\frac{X^T A\ X}{X^T (B^T B)\ X} \;<\; \lambda \quad , \;\forall\, X \in D\,,$$

ou seja,

$$K = X^T A X + \lambda \,.\, X^T (B^T B) X = X^T [\, A + \lambda \,.\, (B^T B)] \; X > 0 \,,$$

para qualquer $X \in D$; para $X \notin D$, ou seja, $B X = O$, tem-se,

$$K = X^T [\, A + \lambda \,.\, (B^T B)] \; X = X^T A X + \lambda \,.\, X^T (B^T B) X =$$

$$= X^T A X + \lambda \,.\, (X^T B^T)(B X) = X^T A \; X > 0 \,,$$

por hipótese. <u>Em conclusão</u> : se $Q = X^T A \; X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B X = O$, então existe um número real λ tal que $K = X^T [\, A + \lambda B^T B] \; X$ é definida positiva no seu domínio $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$.

A condição é suficiente. Se existe um real λ tal que $K = X^T [\, A + \lambda B^T B] \; X$ é definida positiva no seu domínio $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$, então com $X \neq O$ e $B X = O$ tem-se em particular,

$$K = X^T [\, A + \lambda B^T B] \; X = X^T A \; X + \lambda \;.\, X^T (B^T B) X =$$

$$= X^T A \; X + \lambda \;.\, (X^T \; B^T)(B X) = X^T A \; X > 0 \;,$$

ou seja, $Q = X^T A \; X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B X = O$.

b) Resulta imediatamente de ***a)*** notando que $Q = X^T A \; X < 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B X = O$ se e só se $Q^* = X^T (-A) \; X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B X = O$.

O teorema que se segue constitui um resultado auxiliar a utilizar posteriormente.

<u>**Teorema 9**</u> **:** *O determinante* $| \, A + \lambda B^T B \, |$ *é um polinómio em* λ *cujo termo de mais alto grau (eventualmente nulo) é,*

$$(-1)^m \,.\, \begin{vmatrix} A & B^T \\ B & O_m \end{vmatrix} \,.\, \lambda^m \,,$$

em que O_m *representa uma matriz quadrada de ordem* <u>*m*</u> *com elementos todos iguais a zero (matriz nula de ordem* <u>*m*</u> *)*

<u>**Demonstração**</u> **:** No que se segue $O_{n\,m}$ representa uma matriz $n \times m$ com elementos todos iguais a zero (matriz nula tipo $n \times m$) e I_m a matriz identidade de ordem m .

Utilizando a técnica da multiplicação de matrizes por blocos, obtém-se,

$$\begin{bmatrix} A & \lambda \, B^T \\ B & -I_m \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_n & O_{n\,m} \\ B & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \lambda \, B^T B & \lambda \, B^T \\ O_{mn} & -I_m \end{bmatrix} \,,$$

devendo salientar-se que todas as matrizes envolvidas na igualdade precedente são quadradas de ordem $n + m$. Tomando determinantes em ambos os membros da igualdade obtida, resulta,

$$\begin{vmatrix} A & \lambda\, B^T \\ B & -I_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_n & O_{nm} \\ B & I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + \lambda\, B^T B & \lambda\, B^T \\ O_{mn} & -I_m \end{vmatrix} \quad ;$$

fazendo em seguida os desenvolvimentos de Laplace segundo os menores de ordem n contidos nas primeiras n linhas do segundo determinante do primeiro membro da igualdade e segundo os menores de ordem m contidos nas últimas m linhas do determinante do segundo membro, obtém-se,

$$\begin{vmatrix} A & \lambda\, B^T \\ B & -I_m \end{vmatrix} \cdot 1 = (\text{-}1)^m \,.\, |\, A + \lambda\, B^T B \,| \ .$$

Ora, na expressão que define o determinante do primeiro membro da última igualdade obtida, os termos de mais alto grau em λ aparecem quando nas últimas m colunas se escolhem elementos de $\lambda\, B^T$; a soma algébrica de tais termos coincide com o determinante,

$$\begin{vmatrix} A & \lambda\, B^T \\ B & O_m \end{vmatrix} \ ,$$

porque neste último é nulo qualquer termo que tenha como factor um elemento das últimas m colunas que não seja de $\lambda\, B^T$.

Então, no determinante $|\, A + \lambda\, B^T B \,|$ o termo de mais alto grau em λ é portanto,

$$(\text{-}1)^m \,.\, \begin{vmatrix} A & \lambda\, B^T \\ B & O_m \end{vmatrix} = (\text{-}1)^m \,.\, \begin{vmatrix} A & B^T \\ B & O_m \end{vmatrix} \,.\, \lambda^m \,,$$

como se queria provar.

Estuda-se seguidamente nova condição necessária e suficiente para que a forma quadrática $Q = X^T A\, X$ seja definida positiva (negativa) no espaço das soluções do sistema homogéneo indeterminado $B\ X = O$, no pressuposto de ser não nulo o determinante da submatriz formada pelos elementos contidos nas m linhas e nas m primeiras colunas de B (esta condição necessária e suficiente será depois adaptada ao caso geral em que a característica de B é $r = m$, o que é perfeitamente compatível com a nulidade do determinante da citada submatriz) .

Dada uma qualquer matriz M convencionaremos em geral que :

- $M_{\alpha\beta}$ designa a submatriz formada pelos elementos contidos nas α primeiras linhas e β primeiras colunas de M ;

- $M_\alpha = M_{\alpha\,\alpha}$ designa a submatriz formada pelos elementos contidos nas α primeiras linhas e α primeiras colunas de M ;

por outro lado, O_α designará a matriz nula quadrada de ordem α e I_α a matriz identidade também de ordem α .

Para uma melhor sistematização da assunto a tratar, consideraremos teoremas separados para as questões da necessidade e suficiência da condição a enunciar.

Teorema 10 : *Sendo* $|\,B_m\,| \neq 0$ *e* $Q = X^T A\, X > 0$ *para todos os* $X \neq O$ *tais que* $B\,X = O$ *, então,*

$$(-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A_s & B_{m\,s}^T \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1\,,\, m+2\,,\, \ldots\,,\, n$

Demonstração : Fixe-se um $s = m+1\,,\, m+2\,,\, \ldots\,,\, n$ e na matriz coluna X anulem--se as variáveis $x_{s+1}\,,\, x_{s+2}\,,\, \ldots\,,\, x_n$. Com este procedimento a forma quadrática original transforma-se em $Q^* = X_0{}^T A_s\, X_0$ e o sistema homogéneo em $B_{m\,s}\, X_0 = O$, em que,

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_s \end{bmatrix} .$$

Para $X_0 \neq O$ tal que $B_{m\,s}\, X_0 = O$ deverá ser $Q^* = X_0{}^T A_s\, X_0 > 0$ pois , se fosse $Q^* = X_0{}^T A_s\, X_0 \leq 0$, tomando

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

ter-se-ia $B\,X = O$ e $Q = X^T A\, X = Q^* = X_0{}^T A_s\, X_0 \leq 0$, contrariamente à hipótese do teorema.

Mas se a forma quadrática $Q^* = X_0{}^T A_s\, X_0$ é positiva para todos os $X_0 \neq O$ tais que $B_{m\,s}\, X_0 = O$, então, pelo teorema 8, a forma quadrática,

$$K^* = X_0^T \left[\, A_s + \lambda\, B_{m\,s}^T\, B_{m\,s} \right] X_0 \;\;,$$

deverá ser definida positiva no seu domínio $\mathbf{R}^s$ para $\lambda > \lambda^*$, com certo λ^* (ver demonstração do teorema 8). Tal implica ser $\left| A_s + \lambda\, B_{m\,s}^T\, B_{m\,s} \right| > 0$ para $\lambda > \lambda^*$.

De acordo com o teorema 9, o determinante $\left| A_s + \lambda\, B_{m\,s}^T\, B_{m\,s} \right|$ é um polinómio em λ cujo termo de mais alto grau é,

$$(-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A_s & B_{m\,s}^T \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} \cdot \lambda^m ,$$

e se o coeficiente de λ^m for não nulo, tem de ser positivo pois, sendo negativo, o polinómio $\left| A_s + \lambda\, B_{m\,s}^T\, B_{m\,s} \right|$ em λ tornar-se-ia negativo para λ suficientemente grande e não poderia portanto ser positivo para todos os valores $\lambda > \lambda^*$.

Portanto, provaremos o teorema se provarmos que deve ter-se,

$$\begin{vmatrix} A_s & B_{m\,s}^T \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Para tal considere-se o seguinte sistema de $m + s$ equações nas $m + s$ incógnitas x_1, x_2, … , x_s, y_1, … , y_m :

$$\begin{cases} A_s\, X_0 + B_{ms}^T\, Y = O \\ B_{ms}\, X_0 = O \end{cases} ,$$

em que,

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_s \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} .$$

Trata-se de um sistema homogéneo e vamos ver que apenas admite a solução nula, o que provará o que se pretende uma vez que tal implicará ser ,

$$\begin{vmatrix} A_s & B_{m\,s}^T \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Das primeiras s equações do sistema , condensadas na primeira equação matricial, tira-se,

$$X_0^T\, A_s\, X_0 + X_0^T\, B_{ms}^T\, Y = 0 ,$$

e ainda, atendendo à segunda equação matricial, $X_0^T\, A_s\, X_0 = 0$; desta última igualdade resulta $X_0 = O$, pois como vimos,

$$X_0 \neq O \;\wedge\; B_{m\,s}\, X_0 = O \quad\Rightarrow\quad X_0^T\, A_s\, X_0 > 0 \;.$$

Mas se $X_0 = O$ obtém-se, novamente a partir da primeira equação matricial do sistema, $B_{m\,s}^T\; Y = O$; e como $|\, B_m \,| \neq 0$ implica que a característica de B_{ms}^T é m , obtém-se necessariamente $Y = O$. Então o sistema homogéneo em causa apenas admite a solução nula como se queria provar.

Completada a demonstração do teorema 10 e antes de passarmos ao teorema seguinte, convém evidenciar uma particularidade relacionada com a parte final da demonstração que acaba de ser apresentada. A hipótese assumida de ser $|\, B_m \,| \neq 0$ destina-se a garantir que é m a característica da matriz $B_{m\,s}^T$, com qualquer $s = m + 1$, $m + 2$, … , n pois esse facto desempenha um papel essencial no argumento utilizado. No entanto, para o particular valor $s = n$, a hipótese $|\, B_m \,| \neq 0$ é dispensável no quadro geral que estamos considerando de ser m a característica da matriz B do sistema $B\,X = O$, uma vez que $B_{m\,n}^T = B^T$. Ou seja, sendo $Q = X^T A\, X > 0$ para todos os $X \neq 0$ tais que $B\,X = O$, então,

$$(-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A_n & B_{m\,n}^T \\ B_{m\,n} & O_m \end{vmatrix} = (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A & B^T \\ B & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

desde que evidentemente se assuma, como temos vindo a fazer, que a matriz B tem característica m , o que equivale a não haver equações redundantes no sistema homogéneo $B\,X = O$. Esta observação é importante e será utilizada mais adiante.

A partir do teorema 10 tira-se sem dificuldade o,

Teorema 11 : *Sendo* $|B_m| \neq 0$ *e* $Q = X^T A\, X < 0$ *para todos os* $X \neq O$ *tais que* $B\,X = O$ *, então,*

$$(-1)^s \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1\,, m+2\,, \dots\,, n$

Demonstração : Nas condições do enunciado, $Q^- = X^T(-A)\,X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $(-B)\,X = O$ [pois, $B\,X = O \Leftrightarrow (-B)\,X = O$] e, portanto, pelo teorema 10 deverá ser,

$$(-1)^m \cdot \begin{vmatrix} -A_s & -B^T_{m\,s} \\ -B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \quad (s = m+1\,, m+2\,, \dots\,, n)\ .$$

Como o determinante precedente tem $m+s$ colunas todas elas multiplicadas por -1 , tem-se então,

$$(-1)^m \cdot (-1)^{m+s} \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} = (-1)^s \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1\,, m+2\,, \dots\,, n$, como se queria provar.

Nos teoremas seguintes prova-se agora a suficiência das condições necessárias estabelecidas nos teoremas 10 e 11.

Teorema 12 : *Sendo* $|B_m| \neq 0$ *, para que se tenha* $Q = X^T A\, X > 0$ *para todos os* $X \neq O$ *tais que* $B\,X = O$ *é suficiente ser,*

$$(-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1\,, m+2\,, \dots\,, n$

Demonstração : Bastará provar que o coeficiente do termo de mais alto grau em λ do determinante (polinómio) $\left| A_s + \lambda\ B^T_{m\,s}\, B_{m\,s} \right|$ é positivo para $s = 1\,, 2\,, \dots\,, n$, porque então será possível escolher λ_0 suficientemente grande por forma que $\left| A_s + \lambda_0\ B^T_{m\,s}\, B_{m\,s} \right| > 0$ para todos aqueles valores de s ; e como estes n determinantes formam a cadeia fundamental de menores principais da matriz $A + \lambda_0\, B^T B$, tal garantirá que a forma quadrática $K^* = X^T\,[A + \lambda_0\, B^T B]\ X$ é definida positiva no seu domínio $\mathbf{R^n}$ o que, pelo disposto na alínea a) do teorema 8, assegurará que $Q = X^T A X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B X = O$.

Para $s = m + 1 , m + 2 , \ldots , n$, o teorema 9 assegura que o coeficiente do termo de mais alto grau em λ do polinómio $\left| A_s + \lambda \; B^T_{m\,s} \, B_{m\,s} \right|$ é,

$$(-1)^m \, . \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} ,$$

o qual por hipótese é positivo.

Para $s = 1 , 2 , \ldots , m$, tem-se, como se viu na demonstração do teorema 9,

$$(-1)^m \, . \left| A_s + \lambda \; B^T_{m\,s} \, B_{m\,s} \right| = \begin{vmatrix} A_s & \lambda \, B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & -I_m \end{vmatrix} \; ;$$

na expressão que define o determinante do segundo membro da igualdade precedente os termos de mais alto grau em λ aparecem quando nas s $(\leq m)$ primeiras linhas se escolhem elementos de $\lambda \, B^T_{m\,s}$; a soma algébrica de tais termos coincide com o determinante,

$$\begin{vmatrix} O_s & \lambda \, B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & -I_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & -I_m \end{vmatrix} . \, \lambda^m ,$$

porque neste é nulo qualquer termo que tenha como factor um elemento das primeiras s linhas que não seja de $\lambda \, B^T_{m\,s}$. No polinómio $\left| A_s + \lambda \; B^T_{m\,s} \, B_{m\,s} \right|$ o coeficiente do termo de mais alto grau em λ é, portanto,

$$(-1)^m \, . \begin{vmatrix} O_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & -I_m \end{vmatrix} = (-1)^s \, . \begin{vmatrix} I_m & B_{m\,s} \\ B^T_{m\,s} & O_s \end{vmatrix} ,$$

justificando-se a igualdade pela realização sobre o determinante do primeiro membro das seguintes operações sucessivas : 1) multiplicação das primeiras s linhas por -1 ; 2) multiplicação das m últimas colunas por -1; 3) troca de cada uma das últimas m colunas com todas as primeiras s colunas ; 4) troca de cada uma das últimas m linhas com todas as primeiras s linhas .

Vamos então estudar o sinal deste coeficiente, considerando separadamente os casos $s = m$ e $s < m$:

<u>1º caso</u> : Quando seja $s = m$, o determinante que dá o coeficiente pode ser calculado fazendo o desenvolvimento Laplaceano segundo os menores de ordem m contidos nas últimas m linhas, obtendo-se,

$$(-1)^s \cdot \begin{vmatrix} I_m & B_{m\,s} \\ B^T_{m\,s} & O_s \end{vmatrix} = (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} I_m & B_m \\ B^T_m & O_m \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m \cdot (-1)^{m\,(2m+1)} \cdot \left| B^T_m \right| \cdot \left| B_m \right| =$$

$$= | B_m |^2 > 0 \ ,$$

porque por hipótese $| B_m | \neq 0$.

<u>2º Caso</u> : Quando seja $s < m$, façamos,

$$m^* = s \quad , \quad n^* = m \quad \text{e} \quad B^* = B^T_{m\,s} \ ,$$

e notemos que a matriz B^* é do tipo $s \times m$ ou , com as novas notações, do tipo $m^* \times n^*$; note-se ainda que B^* tem característica $m^* = s$ porque, se fossem nulos todos os determinantes de submatrizes de ordem s contidas em $B^* = B^T_{m\,s}$, seriam nulos todos os menores de ordem s contidos nas primeiras s colunas do determinante $| B_m |$ e então este seria nulo contrariamente à hipótese do teorema. Considerem-se então a forma quadrática $Q^* = \sum_{j=1}^{n^*} y_j^2 = Y^T I_{n^*} Y$ e o sistema homogéneo indeterminado $B^* Y = O$. Trata-se de uma forma quadrática claramente definida positiva no espaço das soluções de $B^* Y = O$; tendo em conta a observação inserida logo a seguir à demonstração do teorema 10, tem-se então (relembre-se que B^* tem característica m^*),

$$(-1)^{m^*} \cdot \begin{vmatrix} I_{n^*} & B^{*T} \\ B^* & O_{m^*} \end{vmatrix} > 0 \quad ;$$

e como $m^* = s$, $n^* = m$ e $B^* = B^T_{m\,s}$, resulta finalmente,

$$(-1)^s \cdot \begin{vmatrix} I_m & B_{m\,s} \\ B^T_{m\,s} & O_s \end{vmatrix} > 0 \ ,$$

como se queria provar.

Deste teorema resulta imediatamente o,

<u>Teorema 13</u> : *Sendo* $| B_m | \neq 0$ *, para que se tenha* $Q = X^T A\, X < 0$ *para todos os* $X \neq O$ *tais que* $B\,X = O$ *é suficiente ser,*

$$(-1)^s \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \ ,$$

para $s = m + 1 , m + 2 , \ldots , n$

<u>Demonstração</u> : Basta notar que,

$$(-1)^s \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} = (-1)^{m+2s} \cdot \begin{vmatrix} -A_s & -B^T_{m\,s} \\ -B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} -A_s & -B^T_{m\,s} \\ -B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1,\ m+2, \ldots, n$, resultando, pelo teorema 12 , que $Q = X^T (-A)\, X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $-B\,X = O$; ora tal equivale a ser $Q = X^T A\, X < 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B\,X = O$.

Para melhor sistematização podemos reunir num só os teoremas 10, 11 , 12 e 13 :

<u>Teorema 14</u> : *a) Sendo* $|\, B_m \,| \neq 0$ *, tem-se* $Q = X^T A\, X > 0$ *para todos os* $X \neq O$ *tais que* $B\,X = O$ *se e só se*

$$(-1)^m \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1\,, m+2\,, \ldots, n$ *;*

b) Sendo $|\, B_m \,| \neq 0$ *, tem-se* $Q = X^T A\, X < 0$ *para todos os* $X \neq 0$ *tais que* $B\,X = O$ *se e só se*

$$(-1)^s \cdot \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} > 0 \,,$$

para $s = m+1\,, m+2\,, \ldots, n$

Na prática , a verificação das condições a) ou b) do teorema precedente faz-se utilizando,

$$\begin{vmatrix} O_m & B_{m\,s} \\ B^T_{m\,s} & A_s \end{vmatrix} \quad \text{em vez de} \quad \begin{vmatrix} A_s & B^T_{m\,s} \\ B_{m\,s} & O_m \end{vmatrix} \,,$$

determinantes que facilmente se vê serem coincidentes ; o determinante da esquerda é o menor principal de ordem $m + s$ da cadeia fundamental de menores principais do seguinte determinante (*determinante orlado*) :

$$\begin{vmatrix} O_m & B_{m\,n} \\ B^T_{m\,n} & A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \\ b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \cdots & & & \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

As condições a) e b) do teorema 14 podem então exprimir-se nos seguintes termos :

a) Sendo $|\,B_m\,| \neq 0$, tem-se $Q = X^T A\,X > 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B\,X = O$ (forma quadrática definida positiva no espaço das soluções do sistema homogéneo $B\,X = O$) se e só se os menores principais de ordens $2\,m + 1$, $2\,m + 2$, … , $m + n$, da cadeia fundamental de menores principais do determinante orlado, têm o sinal de $(-1)^m$;

b) Sendo $|\,B_m\,| \neq 0$, tem-se $Q = X^T A\,X < 0$ para todos os $X \neq O$ tais que $B\,X = O$ (forma quadrática definida negativa no espaço das soluções do sistema homogéneo $B\,X = O$) se e só se os menores principais de ordens $2\,m + 1$, $2\,m + 2$, … , $m + n$, da cadeia fundamental de menores principais do determinante orlado, têm os sinais respectivamente de $(-1)^{m+1}$, $(-1)^{m+2}$, … , $(-1)^n$.

O procedimento anterior pode adaptar-se ao caso em que a matriz B, embora de característica m, tem as primeiras m colunas dependentes, ou seja, $|\,B_m\,| = 0$. Trata-se do caso em que qualquer sistema de incógnitas principais do sistema homogéneo $B\,X = O$ inclui obrigatoriamente pelo menos uma das incógnitas associadas a colunas de B com índice superior a m . Neste caso podem reordenar-se as incógnitas e ao mesmo tempo as colunas de B e as linhas e colunas de A que lhes estão associadas, de modo que, após a reordenação, a forma quadrática,

$$Q = X^T A\,X = X_R{}^T A_R\ X_R\ ,$$

e o sistema $B_R\ X_R = O$ (equivalente ao inicial) permitam a aplicação da técnica anteriormente descrita (para o que as primeiras m colunas da matriz reordenada B_R devem ser independentes) ; o determinante orlado deverá ser construído como se indicou, mas a partir das matrizes reordenadas A_R e B_R .

Quando a característica de B seja inferior a m, há equações redundantes no sistema, as quais devem ser eliminadas antes da aplicação do método.

O método que acaba de ser estudado permite apenas esclarecer se uma forma quadrática é ou não definida positiva (ou negativa) no espaço das soluções de um sistema homogéneo. Caso se conclua que a forma quadrática em causa não é nem definida positiva nem definida negativa no espaço das soluções do sistema dado, subsiste a questão de esclarecer se se trata de uma forma semidefinida (positiva ou negativa) ou indefinida. É possível desenvolver um método que permite fazer tal esclarecimento com base nos determinantes orlados que podem construir-se a partir todos os pares de matrizes $(A_P\ ,\ B_P)$ que possam obter-se respectivamente de A por permutação idêntica de linhas e colunas e de B fazendo a mesma permutação das suas colunas. O cálculo é proibitivo, mesmo para valores modestos de n e é preferível recorrer ao método directo para fazer a classificação (obtenção da solução geral do sistema homogéneo, substituição na forma quadrática e classificação subsequente da forma quadrática resultante da substituição).

Para terminar esta digressão pelas técnicas de classificação de uma forma quadrática no espaço das soluções de um sistema homogéneo indeterminado, apresentam-se a seguir alguns exemplos :

1) Classificar a forma quadrática $Q = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_3 + x_2 x_3$ no espaço das soluções do sistema ,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Tem-se ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} ,$$

e como $m = 2$ e

$$|\,B_2\,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \text{-}3 \neq 0 ,$$

pode aplicar-se a técnica do determinante orlado, sem necessidade de qualquer reordenação das colunas de B e das linhas e colunas de A . O determinante orlado é,

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \end{vmatrix} ,$$

e o único menor principal relevante para a classificação é o de ordem 5 (dado que $m = 2 \ \wedge\ n = 3 \ \Rightarrow\ 2\,m + 1 = m + n = 5$) . Ora, $H_5 = H = 8$ (deixa-se o cálculo do determinante ao cuidado do leitor), assumindo portanto H_5 o sinal de $(\text{-}1)^2 = 1$, assim se concluindo que a forma quadrática dada é definida positiva no espaço das soluções do sistema homogéneo também dado.

2) Classificar a forma quadrática $Q = x^2 - y^2 - 3\,z^2 + 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z$ no espaço das soluções de $x + y + z = 0$. Tem-se,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [\,1 \quad 1 \quad 1\,] \ ,$$

e como $m = 1$ e $|\,B_1\,| = 1 \neq 0$, não há necessidade de qualquer reordenação das colunas de B e das linhas e colunas de A . O determinante orlado é ,

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \ ,$$

e os menores principais relevantes para a classificação são os de ordens 3 e 4 ($m = 1 \;\wedge\; n = 3 \;\Rightarrow\; 2\,m + 1 = 3 \;\wedge\; m + n = 4$) . Ora,

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0 \quad \text{e} \quad H_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -8 < 0 \ ,$$

têm, respectivamente, os sinais de $(-1)^{1+1} = 1$ e $(-1)^3 = -1$, pelo que se trata de uma forma quadrática definida negativa no espaço das soluções da equação dada.

3) Classificar a forma quadrática $Q = x^2 + y^2 + x\,y - z^2$ no espaço das soluções de $z = 0$. Tem-se ,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = [\,0 \quad 0 \quad 1\,] \ ,$$

e como $m = 1$ e

$$|\,B_1\,| = 0 \ ,$$

temos de reordenar as colunas de B de modo que a primeira passe a corresponder à incógnita principal (z) e, em conformidade, fazer a mesma reordenação das linhas e colunas da matriz A :

$B_R = [\ 1 \quad 0 \quad 0\ ]$
(troca da primeira coluna de B com a terceira)

$$A_R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

(troca da primeira coluna de A com a terceira e da primeira linha de A com a terceira) .

O determinante orlado a considerar é então,

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} ,$$

e os menores principais relevantes para a classificação são os de ordem *3* e *4* ($m = 1 \ \wedge \ n = 3 \ \Rightarrow \ 2\,m + 1 = 3 \ \wedge \ m + n = 4$) . Ora,

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \ \text{ e } \ H_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} = -3/4 < 0 \ ,$$

têm ambos o sinal de $(-1)^1 = -1$, assim se concluindo que a forma quadrática é definida positiva no espaço das soluções de $z = 0$.

7. <u>Determinação de extremantes condicionados : exemplos</u>

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de determinação de extremantes condicionados.

<u>Exemplo 1</u> : Determinar os extremantes de $f(x_1\ , x_2\ , x_3\ ) = x_1\, x_2 + x_3^2$ sob as condições $x_1 - x_2 - 1 = 0$ e $x_1 - x_2 - x_3 = 0$. Dado que a matriz,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} ,$$

tem característica 2 , os eventuais pontos de estacionaridade são não singulares e podem, portanto, ser determinados resolvendo o sistema do teorema 2.

Para tal, considere-se a Lagrangeana,

$$F(x_1 , x_2 , x_3 \; ; \lambda_1 , \lambda_2) = x_1\, x_2 + x_3^2 + \lambda_1 \,(x_1 - x_2 - 1) + \lambda_2 (x_1 - x_2 - x_3)\,,$$

a partir da qual se obtém o sistema do teorema 2,

$$\begin{cases} F'_{x_1} = x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ F'_{x_2} = x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ F'_{x_3} = 2x_3 - \lambda_2 = 0 \\ F'_{\lambda_1} = x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ F'_{\lambda_2} = x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ,$$

donde se obtém um único ponto de estacionaridade, de coordenadas ,

$$x_1 = 1/2 \;,\;\; x_2 = -1/2 \;,\;\; x_3 = 1 \;,$$

com multiplicadores $\lambda_1 = -3/2$ e $\lambda_2 = 2$. Calcule-se agora a segunda diferencial de $F(x_1 , x_2 , x_3 \; ; -3/2 , 2)$ no ponto de estacionaridade obtido:

$$F''_{x_1^2} = 0 \;,\; F''_{x_1 x_2} = 1 \;,\; F''_{x_1 x_3} = 0 \;,\; F''_{x_2 x_1} = 1 \;,\; F''_{x_2^2} = 0 \;,\; F''_{x_2 x_3} = 0 \;,$$
$$F''_{x_3 x_1} = 0 \;,\; F''_{x_3 x_2} = 0 \;,\; F''_{x_3^2} = 2 \;,$$

assim se obtendo $d^2 F = 2 h_1 h_2 + 2 h_3^2$, forma quadrática que deve ser classificada no espaço das soluções do sistema,

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = 0 \\ h_1 - h_2 - h_3 = 0 \end{cases} .$$

Ora a solução geral deste sistema é $h_2 = h_1$, $h_3 = 0$ e para os pontos $\bar{h} = (h_1 , h_1 , 0) \neq (0 , 0 , 0)$ tem-se $d^2 F = 2 h_1^2 > 0$; portanto, o ponto de estacionaridade em causa é um minimizante da restrição da função dada ao conjunto definido pelas condições $x_1 - x_2 - 1 = 0$ e $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, sendo $f\,(1/2 , -1/2 , 1) = 3/4$ o correspondente mínimo relativo.

Note-se que a classificação da forma quadrática $d^2 F = 2 h_1 h_2 + 2 h_3^2$ no espaço das soluções do sistema,

$$\begin{cases} h_1 - h_2 = 0 \\ h_1 - h_2 - h_3 = 0 \end{cases} ,$$

poderia ser feito pela técnica do determinante orlado. Tem-se,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} ,$$

e como $m = 2$ e,

$$|\, B_2 \,| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

temos de reordenar as colunas de B de modo a que as duas primeiras passem a corresponder a duas incógnitas principais (por exemplo, h_1 e h_3) e, em correspondência , fazer idêntica reordenação nas linhas e colunas da matriz A :

$$B_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(troca da segunda coluna de B com a terceira)

$$A_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(troca da segunda coluna de A com a terceira e da segunda linha de A com a terceira) .

O determinante orlado a considerar é então,

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} ,$$

e o único menor principal relevante para a classificação é o de ordem 5 (dado que $m = 2 \ \wedge \ n = 3 \ \Rightarrow \ 2\,m + 1 = m + n = 5$) . Ora, $H_5 = H = 2$ (deixa-se o cálculo do determinante ao cuidado do leitor), assumindo portanto H_5 o sinal de $(-1)^2 = 1$, assim se concluindo que a forma quadrática dada é definida positiva no espaço das soluções do sistema homogéneo em causa .

<u>**Exemplo 2**</u> **:** Determinar os extremantes de $f(x\,,y\,,z) = x\,y + y - z^2$ sob as condições $y = x^2 + z$ e $x + y = 0$. Como para qualquer $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ a matriz ,

$$G = \begin{bmatrix} 2\,x & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} ,$$

tem característica *2* , os eventuais pontos de estacionaridade são não singulares e podem, portanto, ser determinados resolvendo o sistema do teorema 2.

Para tal, considere-se a Lagrangeana,

$$F(x\,,y\,,z\ ;\lambda\,,\mu) = x\,y + y - z^2 + \lambda\,(x^2 + z - y) + \mu\,(x + y)\ ,$$

a partir da qual se obtém o sistema do teorema 2 :

$$\begin{cases} F_x' = y + 2x\lambda + \mu = 0 \\ F_y' = x + 1 - \lambda + \mu = 0 \\ F_z' = -2z + \lambda = 0 \\ F_\lambda' = x^2 + z - y = 0 \\ F_\mu' = x + y = 0 \end{cases} ,$$

do qual se obtém um único ponto de estacionaridade , de coordenadas ,

$$x = \text{-}1/2\ ,\quad y = 1/2\ ,\quad z = 1/4\ ,$$

com multiplicadores $\lambda = 1/2$ e $\mu = \text{-}1$.

Para averiguar se se trata de um extremante, vai estudar-se o sinal da segunda diferencial $d^2F = h_1^2 + 2h_1\,h_2 - 2h_3^2$ no espaço das soluções de,

$$\begin{cases} -h_1 - h_2 + h_3 = 0 \\ h_1 + h_2 = 0 \end{cases} .$$

A solução geral deste sistema é $h_3 = 0$, $h_2 = \text{-}\,h_1$, para a qual se verifica ser $d^2F = h_1^2 - 2h_1^2 = -h_1^2 < 0$ ($h_1 \neq 0$) , pelo que o ponto de estacionaridade encontrado é um maximizante. Fica ao cuidado do leitor a obtenção desta conclusão pela técnica do determinante orlado.

O exemplo que se segue mostra como a técnica estudada para determinação dos extremantes relativos condicionadas pode ser usada no caso em que o conjunto *B*, em vez de ser definido apenas por *m* equações , é definido por *m* equações $g_i\,(\,\bar{x}\,) = 0$ mais um certo número *k* de inequações $g_\alpha\,(\,\bar{x}\,) \leq 0$ e um certo número *s* de inequações $g_\beta(\,\bar{x}\,) \geq 0$, podendo eventualmente ser $m = 0$, $k = 0$ ou $s = 0$. Basta para tal introduzir *k* variáveis auxiliares u_α e *s* variáveis auxiliares v_β , o que permite transformar as inequações em equações, como se indica,

$$g_\alpha(\,\bar{x}\,) + u_\alpha^2 = 0 \quad \text{e} \quad g_\beta(\,\bar{x}\,) - v_\beta^2 = 0\ \ ;$$

é evidente que se $\bar{a}$ é extremante (maximizante ou minimizante) da restrição de $f(\bar{x})$ ao conjunto $B \subset \mathbf{R^n}$ definido por,

$$\begin{cases} g_i(\bar{x}) = 0 & , \; i = 1, 2, \dots, m \\ g_\alpha(\bar{x}) \le 0 & , \; \alpha = m+1, m+2, \dots, m+k \\ g_\beta(\bar{x}) \ge 0 & , \; \beta = m+k+1, m+k+2, \dots, m+k+s \end{cases} ,$$

então a restrição de $h(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{x})$ ao conjunto $B^* \subset \mathbf{R^{n+k+s}}$ definido pelas equações,

$$\begin{cases} g_i(\bar{x}) = 0 & , \; i = 1, 2, \dots, m \\ g_\alpha(\bar{x}) + u_\alpha^2 = 0 & , \; \alpha = m+1, m+2, \dots, m+k \\ g_\beta(\bar{x}) - v_\beta^2 = 0 & , \; \beta = m+k+1, m+k+2, \dots, m+k+s \end{cases} ,$$

tem um extremo em $\bar{x} = \bar{a}$, $u_\alpha = \pm\sqrt{-g_\alpha(\bar{a})}$, $v_\beta = \pm\sqrt{g_\beta(\bar{a})}$ e inversamente. Vejamos então um exemplo de aplicação:

Exemplo 3 : Determinar os extremantes de $f(x, y, z) = 2x + y + 3z$ sob as condições , $x + y + 2z = 2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Segundo a técnica indicada, vamos determinar os extremantes da função,

$$g(x, y, z, u, v, w) = 2x + y + 3z ,$$

sob as condições,

$$\begin{cases} x + y + 2z - 2 = 0 \\ x - u^2 = 0 \\ y - v^2 = 0 \\ z - w^2 = 0 \end{cases} .$$

Dado que a matriz,

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2w \end{bmatrix} ,$$

tem característica 4 excepto no caso $u = v = w = 0$ e como nenhuma solução do sistema condicionante pode corresponder a esse caso (porque tal implicaria que $x = y$

$= z = 0$ e então a primeira equação seria violada), conclui-se que os eventuais pontos de estacionaridade são necessariamente não singulares.

Construa-se então a Lagrangeana,

$$F = 2x + y + 3z + \lambda_1 (x + y + 2z - 2) + \lambda_2 (x - u^2) + \lambda_3 (y - v^2) + \\ + \lambda_4 (z - w^2)\,,$$

e a partir dela o sistema,

$$\begin{cases} 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (Eq.\,1) \\ 1 + \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (Eq.\,2) \\ 3 + 2\lambda_1 + \lambda_4 = 0 & (Eq.\,3) \\ -2u\lambda_2 = 0 & (Eq.\,4) \\ -2v\lambda_3 = 0 & (Eq.\,5) \\ -2w\lambda_4 = 0 & (Eq.\,6) \\ x + y + 2z - 2 = 0 & (Eq.\,7) \\ x - u^2 = 0 & (Eq.\,8) \\ y - v^2 = 0 & (Eq.\,9) \\ z - w^2 = 0 & (Eq.10) \end{cases} ,$$

cujas equações (4) , (5) e (6) obrigam à verificação de uma das hipóteses do quadro seguinte, em que os espaços em branco significam valores a determinar :

	x	y	z	u	v	w	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Hipótese 1				0	0	0				
Hipótese 2				0	0	$\neq 0$				0
Hipótese 3				0	$\neq 0$	0			0	
Hipótese 4				0	$\neq 0$	$\neq 0$			0	0
Hipótese 5				$\neq 0$	0	0		0		
Hipótese 6				$\neq 0$	0	$\neq 0$		0		0
Hipótese 7				$\neq 0$	$\neq 0$	0		0	0	
Hipótese 8				$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$		0	0	0

A hipótese 1 é impossível porque não é compatível com as equações (7) , (8) , (9) e (10) . A hipótese 2 permite obter, com as equações (7) , (8) e (9) , $x = y = 0$ e $z = 1$ e, com a equação (3) , $\lambda_1 = -3/2$; a equação (2) permite depois tirar $\lambda_3 = 1/2$ e a equação (1) $\lambda_2 = -1/2$; finalmente a equação (10) permite obter $w = \pm 1$.

Analisando as restantes hipóteses uma por uma, preenche-se o quadro precedente para as hipóteses que não sejam incompatíveis com alguma ou algumas das equações do sistema :

	x	y	z	u	v	w	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Hipótese 1	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
Hipótese 2	0	0	1	0	0	± 1	-3/2	-1/2	1/2	0
Hipótese 3	0	2	0	0	$\pm\sqrt{2}$	0	-1	-1	0	-1
Hipótese 4	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
Hipótese 5	2	0	0	$\pm\sqrt{2}$	0	0	-2	0	1	1
Hipótese 6	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
Hipótese 7	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**
Hipótese 8	**	**	**	**	**	**	**	**	**	**

** *Hipóteses impossíveis por incompatibilidade com alguma ou algumas equações do sistema*

Obtêm-se assim seis pontos de estacionaridade: cada hipótese possível dá dois pontos de estacionaridade em virtude do duplo sinal do valor de uma das variáveis.

A sequência normal obrigaria agora ao estudo do sinal da segunda diferencial. Podemos no entanto evitar parcialmente este trabalho notando que, no problema inicialmente formulado, se trata de determinar os extremantes de uma função contínua num conjunto limitado e fechado. Daí decorre a existência de máximo e mínimo absolutos da função no conjunto definido pelas condições ; os correspondentes maximizante e minimizante deverão encontrar-se entre os pontos (x , y , z) das três hipóteses indicadas como possíveis no quadro precedente. Calculando então o valor $f(x , y , z)$ para esses três pontos, o maior dos três valores obtidos é o máximo absoluto e o menor é o mínimo absoluto :

$$f(0 , 0 , 1) = 3 \;\; ; \; f(0 , 2 , 0) = 2 \;\; ; \;\; f(2 , 0 , 0) = 4 \;\; .$$

Conclui-se então que (0 , 2 , 0) é minimizante absoluto e (2 , 0 , 0) é maximizante absoluto.

Fica então por estudar a possibilidade de o ponto (0 , 0 ,1) ser extremante relativo ou, em termos do problema modificado com a introdução das variáveis auxiliares u , v e w , a possibilidade de os dois pontos de estacionaridade de coordenadas,

$$x = y = 0 \;\; , \;\; z = 1 \;\; , \;\; u = v = 0 \;\; , \;\;\; w = \pm\, 1 \;\; ,$$

serem extremantes . Considerando como acréscimos das variáveis x , y , z , u , v , w , respectivamente, h_1 , h_2 , h_3 , h_4 , h_5 , h_6 , a segunda diferencial cujo sinal interessa estudar é $d^2 F \;=\; h_4^2 \;-\; h_5^2$, devendo esta forma quadrática ser classificada no espaço das soluções do seguinte sistema homogéneo :

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + 2h_3 = 0 \\ h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \\ h_3 \pm 2h_6 = 0 \end{cases} .$$

A solução geral deste sistema (no espaço $\mathbf{R}^6$ das varáveis h_1 , h_2 , h_3 , h_4 , h_5 , h_6) é ,

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_6 = 0 \ , \ h_4 \text{ e } h_5 \text{ quaisquer } .$$

Ora, é evidente que, com h_4 e h_5 quaisquer , $d^2 F = h_4^2 - h_5^2$ pode tomar sinais contrários, ou seja, trata-se de uma forma quadrática indefinida. Portanto, os pontos de estacionaridade de coordenadas,

$$x = y = 0 \ , \ z = 1 \ , \ u = v = 0 \ , \ w = \pm 1 \ ,$$

não são extremantes e daí decorre que relativamente ao problema original o ponto (0 , 0 , 1) também não é extremante [(1)].

Ainda a propósito deste exemplo refira-se que o problema original da determinação dos extremantes de $f(x , y , z) = 2x + y + 3z$ sob as condições, $x + y + 2z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, podia ter sido convertido no problema equivalente da determina-ção dos extremantes de $h(u, v, w) = 2u^2 + v^2 + 3w^2$ sob a condição $u^2 + v^2 + 2w^2 = 2$; resolvido este problema, dos extremantes (u , v , w) encontrados, passar-se-ia aos extremantes do problema original fazendo $x = u^2$, $y = v^2$ e $z = w^2$.

[(1)] Dado que a função $f(x , y , z) = 2x + y + 3z$ é convexa e também côncava (função linear) e o conjunto B definido pelas condições $x + y + 2z = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ é convexo, qualquer ponto (a , b, c) que seja minimizante (maximizante) relativo da restrição da função ao conjunto B é necessariamente minimizante (maximizante) absoluto da função $f(x , y , z)$ nesse conjunto: ver a este propósito o exercício 12 do capítulo VIII, página 259. Ora $f(0 , 0 , 1) = 3$, enquanto que o mínimo e máximo absolutos da função $f(x , y , z)$ em B são respectivamente 2 e 4 pelo que o ponto (0 , 0 , 1) não pode ser extremante relativo, sendo portanto dispensável a análise feita com a segunda diferencial.

8. Exercícios

8.1 - Verifique que o ponto de coordenadas $x = 3/2$, $y = -1/3$ é um ponto de estacionaridade não singular da restrição da função $f(x , y) = x^2 + 3xy$ ao conjunto B definido pela condição $x + xy = 1$.

8.2 - Considere a função $f(x , y) = 2x^2 - y^2$, o conjunto,

$$B = \{(x , y) : x^2 y - y^3 = 0\} ,$$

e o ponto $(0 , 0) \in B$.

a) Verifique que o ponto dado é um ponto de estacionaridade singular da restrição de $f(x , y)$ ao conjunto B ;

b) Mostre que o ponto em causa é minimizante absoluto da restrição da função $f(x , y)$ ao conjunto B ;

c) Mostre que, no entanto, a segunda diferencial da Lagrangeana nesse ponto e com os multiplicadores $\lambda_0 = 1$ e $\lambda_1 = 2$, é indefinida no conjunto dos pontos (h , k) que verificam a equação,

$$g'_x(0 , 0) . h + g'_y(0 , 0) . k = 0 ,$$

em que $g(x , y) = x^2 y - y^3$. Como justifica esta *"anomalia"* ?

8.3 - Determine os extremantes de $f(x , y , z) = 2x + y + 3z$ sob as condições,

$$x + y + 2z = 2 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ z \geq 0 .$$

Indique também o máximo e o mínimo absolutos da função dada no conjunto B definido por aquelas condições .

8.4 - Determine os extremantes de $f(x , y) = 3x + 2y$ sob as condições,

$$2x + 3y \leq 4 \ , \ x \geq 0 \ , \ y \geq 0 .$$

8.5 - Determine os extremantes das seguintes funções, sob as condições indicadas em cada caso :

a) $f(x , y , z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2zx - xy$, com $x + y + z = 1$;

b) $f(x , y , z) = 2x + y + 3z$, com $x + y + 2z = 2$, $2x + y + z = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

c) $f(x , y , z) = 2x^2 + y^2 - \alpha z^2$, com $x^2 + y^2 + z = \alpha$;

d) $f(x , y , z) = x^{\alpha} . y^{\beta} . z^{\gamma}$, com $x + y + z = k$ (supondo positivos os parâmetros α , β , γ e k) .

8.6 - Determine as seguintes distâncias :

a) Do ponto (1 , 0) à parábola de equação $y^2 = 4\,x$;

b) Do ponto (-1 , -1) à recta de equação $2\,x - y + 3 = 0$.

8.7 - Entre todos rectângulos de perímetro $2\,p$ achar o de área máxima. Entre todos os rectângulos de área S achar o de perímetro mínimo.

8.8 - Sendo $Q = 2 \,.\, (q_1)^{1/2} \,.\, (q_2)^{1/3} \,.\, (q_3)^{1/6}$ a função de produção de uma empresa que utiliza três factores de preços $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ e $p_3 = 1$, determine a função de custo da referida empresa.

8.9 - Determine os extremos absolutos de $f(x\,,y) = 4\,x\,y - 2\,x^2 - y^4$, no quadrado,

$$B = \{(x\,,y) \;:\; |\,x\,| \leq 2 \;\wedge\; |\,y\,| \leq 2\,\} \;.$$

8.10 - Sabendo que a área de um triângulo de lados x , y e z é dada por,

$$A = \sqrt{p\,.\,(p - x)\,.\,(p - y)\,.\,(p - z)} \quad ,$$

onde p é o semi-perímetro, mostre que, de todos os triângulos com um dado perímetro, o equilátero é o de área máxima.

8.11 – Sendo $f(\bar{x})$ uma função de $A \subseteq \mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ em $\mathbf{R}$, diferenciável no ponto $\bar{a} \in INT.\,A$, admita que $\nabla f(\bar{a})$ - gradiente da função no ponto $\bar{a}$ - é um vector não nulo. Assumindo definida em $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ a norma euclideana prove que :

a) O máximo absoluto da derivada dirigida de $f(\bar{x})$ em $\bar{a}$ é $\|\nabla f(\bar{a})\|$, sendo tal valor assumido pela derivada dirigida segundo a direcção do gradiente.

b) O mínimo absoluto da derivada dirigida de $f(\bar{x})$ em $\bar{a}$ é $-\|\nabla f(\bar{a})\|$, sendo tal valor assumido pela derivada dirigida segundo a direcção do simétrico do gradiente.

RESPOSTAS :

8.2 - **c)** Trata-se de uma anomalia meramente aparente, dado que, por ser (0 , 0) ponto de estacionaridade singular, a condição do teorema 4 não se verifica necessariamente.

8.3 - Minimizante absoluto : ponto de coordenadas $x = 0$, $y = 2$, $z = 0$ (o mínimo absoluto é igual a 2) ;
Maximizante absoluto : ponto de coordenadas $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$ (o máximo absoluto é igual a 4) .

8.4 - Minimizante : ponto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$;
Maximizante : ponto de coordenadas $x = 2$, $y = 0$.

8.5 - a) Minimizante : ponto de coordenadas $x = 7/10$, $y = 6/10$, $z = -3/10$;
b) Minimizante : ponto de coordenadas $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$
Maximizante : ponto de coordenadas $x = 4/3$, $y = 0$, $z = 1/3$;
c) Com $\alpha = 0$, minimizante : ponto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;
Com $\alpha > 0$, minimizante : ponto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = \alpha$,
maximizante : ponto de coordenadas,

$$x = \pm\sqrt{\frac{1 + \alpha^2}{\alpha}} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = -1/\alpha \ ;$$

Com $\alpha < 0$, minimizante : ponto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = \alpha$;
d) Maximizante : ponto de coordenadas,

$$x = \frac{\alpha k}{\alpha + \beta + \gamma} \quad , \quad y = \frac{\beta k}{\alpha + \beta + \gamma} \quad , \quad z = \frac{\gamma k}{\alpha + \beta + \gamma} \quad .$$

8.6 - a) 1 ; **b)** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

8.7 - O rectângulo de área máxima é o quadrado de lado $p/2$. O rectângulo de perímetro mínimo é o quadrado de lado $\sqrt{S}$.

8.8 - $C = \sqrt{30}\ .\ Q$.

8.9 - Mínimo absoluto : - 40 ; Máximo absoluto : 1 .

CAPÍTULO XI

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA FUNCIONAIS

1. Conceitos básicos

Considerem-se m funções reais, $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_m(\bar{x})$, todas com domínio em certo aberto $A \subseteq \mathbf{R}^n$, onde se supõem de classe $\mathbf{C}^1$, isto é, admite-se que as primeiras derivadas parciais das $f_i(\bar{x})$ são funções contínuas no aberto A .

As funções em causa dizem-se *funcionalmente dependentes* em A se e só se existe uma função $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ de classe $\mathbf{C}^1$ num aberto de $\mathbf{R}^m$ que contenha o conjunto,

$$f_1(A) \times f_2(A) \times \dots \times f_m(A) =$$

$$= \{(y_1, y_2, \dots, y_m) : y_1 \in f_1(A) , y_2 \in f_1(A) , \dots , y_m \in f_m(A)\} ,$$

e tal que :

a) A função g tem primeiras derivadas parciais não conjuntamente nulas em qualquer dos pontos do conjunto $f_1(A) \times f_2(A) \times \dots \times f_m(A)$;

b) Qualquer que seja $\bar{x} \in A$, tem-se,

$$g[f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})] = 0 .$$

Em particular, se se exigir adicionalmente que a função g seja linear, isto é,

$$g(y_1, y_2, \dots, y_m) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_m y_m ,$$

com os coeficientes c_i constantes, diz-se que as funções $f_i(\bar{x})$ são *linearmente dependentes* .

Observe-se que no caso da dependência linear, a condição a) da definição equivale a ser não nula pelo menos uma das constantes c_i .

Quando não existir a função g nas condições indicadas, diz-se que as funções $f_i(\bar{x})$ são *funcionalmente independentes* (*linearmente independentes*, no caso de não existir nenhuma função linear nas condições desejadas).

Evidentemente que a dependência linear de m funções implica a respecti-va dependência funcional , mas a recíproca não é verdadeira como mostra o exemplo seguinte. As funções,

$$f_1(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ,$$

são funcionalmente dependentes no aberto $A = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ pois vê-se com facilidade que, com a função $g(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 - 1$, é satisfeita a respectiva definição. Contudo, as mesmas funções não são linearmente dependentes, dado não existirem constantes c_1 e c_2 não ambas nulas e tais que,

$$c_1 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + c_2 \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \, ,$$

qualquer que seja $(x, y) \in A$: com efeito, para $x = 0$ e $y = 1$, a igualdade anterior exige que $c_2 = 0$; para $x = 1$ e $y = 0$, a mesma igualdade exige que $c_1 = 0$.

2. Teoremas fundamentais sobre dependência e independência funcionais

Os teoremas seguintes facilitam o estudo da dependência e independência funcionais de um sistema de funções.

Teorema 1 : *Dadas as funções reais $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_m(\bar{x})$, todas de classe $\mathbf{C}^1$ no aberto $A \subseteq \mathbf{R}^n$, se alguma delas pode exprimir-se nas restantes, por exemplo,*

$$f_1(\bar{x}) = F[f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})] \quad , \quad \forall \; \bar{x} \in A \; ,$$

com $F(y_2, \ldots, y_m)$ de classe $\mathbf{C}^1$ em certo aberto que contenha o conjunto,

$$f_2(A) \times \ldots \times f_m(A) \; ,$$

então as funções dadas são funcionalmente dependentes no aberto A

Demonstração : Sendo por exemplo $f_1(\bar{x}) = F[f_2(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})]$, qualquer que seja $\bar{x} \in A$, basta considerar,

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_m) = y_1 - F(y_2, \ldots, y_m) \, ,$$

e atender às hipóteses quanto à função F , para se ter pela definição a dependência funcional das funções $f_i(\bar{x})$.

Teorema 2 : *Dadas as funções reais $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_m(\bar{x})$, todas de classe $\mathbf{C}^1$ no aberto $A \subseteq \mathbf{R}^n$, se forem funcionalmente dependentes em A , então, para qualquer $\bar{a} \in A$, existe uma $V_\varepsilon(\bar{a})$ na qual alguma das $f_i(\bar{x})$, seja $f_\alpha(\bar{x})$, se pode exprimir nas restantes, isto é,*

$$f_\alpha(\bar{x}) = F[f_1(\bar{x}), \ldots, f_{\alpha-1}(\bar{x}), f_{\alpha+1}(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})] \; , \; \forall \; \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}) \, ,$$

em que F é de classe $\mathbf{C}^1$ em certo aberto que contém o conjunto,

$$f_1[V_\varepsilon(\bar{a})] \times \ldots \times f_{\alpha-1}[V_\varepsilon(\bar{a})] \times f_{\alpha+1}[V_\varepsilon(\bar{a})] \times \ldots \times f_m[V_\varepsilon(\bar{a})]$$

Demonstração : Verificadas as hipóteses, existe uma função $g\,(y_1\,, y_2\,, \dots , y_m\,)$ de classe $\mathbf{C^1}$ num aberto de $\mathbf{R^m}$ que contém o conjunto $f_1\,(A) \times f_2\,(A) \times \dots \times f_m\,(A)$ nas seguintes condições : g tem derivadas parciais não conjuntamente nulas em nenhum ponto do mencionado conjunto $f_1\,(A) \times f_2\,(A) \times \dots \times f_m\,(A)$; e, por outro lado,

$$g\,[f_1(\bar{x})\,, f_2(\bar{x})\,, \dots , f_m(\bar{x})] = 0 \quad , \forall\ \bar{x} \in A\,.$$

Fixando um qualquer $\bar{a} \in A$, no ponto correspondente ,

$$\bar{b} = (\,b_1\,, b_2\,, \dots , b_m) \quad , \text{ com } \ b_i = f_i(\bar{a}) \ \text{ para } \ i = 1\,, 2\,, \dots , m \ ,$$

a função $g\,(y_1\,, y_2\,, \dots , y_m\,)$ tem uma das suas derivadas parciais não nula. Admita-se, sem perda de generalidade e por conveniência de notação, que $g'_{y_1}(\,\bar{b}\,) \neq 0$ [(1)]. Por ser $g(\,\bar{b}\,) = 0$ e $g'_{y_1}(\,\bar{b}\,) \neq 0$, os teoremas estudados no Capítulo I sobre funções definidas implicitamente ensinam que a equação $g\,(y_1\,, y_2\,, \dots , y_m\,) = 0$ define implicitamente em certa $V_\delta\,(b_2\,, \dots , b_m\,)$ uma única função contínua $y_1 = F\,(y_2\,, \dots , y_m\,)$ tal que $b_1 = F\,(b_2\,, \dots , b_m\,)$ e, por outro lado, essa função é de classe $\mathbf{C^1}$ naquela $V_\delta\,(b_2\,, \dots , b_m\,)$; tem-se então, para cada $(y_2\,, \dots , y_m\,) \in V_\delta\,(b_2\,, \dots , b_m\,)$,

$$g[\,F\,(y_2\,, \dots , y_m\,)\,, y_2\,, \dots , y_m\,] = 0\,.$$

Como as $f_i(\bar{x})$ são por hipótese contínuas, existe uma $V_\theta\,(\bar{a}\,) \subseteq A$ tal que,

$$\bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \;\Rightarrow\; [f_2(\bar{x})\,, \dots , f_m(\bar{x})] \in V_\delta(b_2\,, \dots , b_m) \ ,$$

e então, para qualquer $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a})$ ter-se-á ,

$$g\,\{\,F[f_2(\bar{x})\,, \dots , f_m(\bar{x})]\ , f_2(\bar{x})\,, \dots , f_m(\bar{x})\} = 0 \ ,$$

o que mostra ser $y_1 = F[\,f_2\,(\bar{x}\,)\,, \dots , f_m\,(\bar{x}\,)]$ definida implicitamente em $V_\theta\,(\bar{a}\,)$ pela equação $g\,[\,y_1\,, f_2\,(\bar{x}\,)\,, \dots , f_m\,(\bar{x}\,)] = 0$. Mas esta última equação admite como solução $y_1 = b_1 = f_1\,(\bar{a}\,)$, $\bar{x} = \bar{a}$ e, por outro lado, neste ponto tem-se $g'_{y_1}(\,\bar{b}\,) \neq 0$; a equação em causa define então implicitamente em certa vizinhança $V_\eta\,(\bar{a}\,) \subseteq A$ uma única função contínua $y_1 = h\,(\bar{x}\,)$ tal que $b_1 = h\,(\bar{a}\,)$. Ora, como vimos anteriormente, a função $y_1 = F[\,f_2\,(\bar{x}\,)\,, \dots , f_m\,(\bar{x}\,)]$ é também definida implicitamente pela mesma equação em $V_\theta\,(\bar{a}\,)$, é contínua (composição de funções contínuas) e é tal que $b_1 = F[\,f_2(\bar{a}\,)\,, \dots , f_m(\bar{a}\,)]$; tem-se então,

(1) *O argumento a desenvolver vale, com adaptações óbvias, se o não anulamento se verificar para qualquer das derivadas parciais da função* $g\,(y_1\,, y_2\,, \dots , y_m\,)$

$$h\,(\bar{x}\,) = F[f_2(\bar{x})\,, \dots , f_m(\bar{x})] \quad , \quad \forall\ \bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \cap V_\eta(\bar{a}) \ .$$

Repare-se agora $y_1 = f_1(\bar{x})$ é igualmente definida implicitamente pela equação $g[y_1, f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})] = 0$ em A e, portanto, por maioria de razão, em $V_\varepsilon(\bar{a})$ com $\varepsilon \le Mín\,\{\theta, \eta\}$; é também contínua e tal que $b_1 = f_1(\bar{a})$. Deverá, portanto, ser,

$$h(\bar{x}) = F[f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})] = f_1(\bar{x}), \quad \forall\ \bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a}),$$

faltando apenas provar, para concluir a demonstração, que $F(y_2, \dots, y_m)$ é de classe $\mathbf{C^1}$ em certo aberto que contém o conjunto,

$$f_2[V_\varepsilon(\bar{a})] \times \dots \times f_m[V_\varepsilon(\bar{a})] .$$

Viu-se antes que $F(y_2, \dots, y_m)$ é de classe $\mathbf{C^1}$ no conjunto aberto $V_\delta(b_2, \dots, b_m)$; ora,

$$f_2[V_\varepsilon(\bar{a})] \times \dots \times f_m[V_\varepsilon(\bar{a})] \subseteq V_\delta(b_2, \dots, b_m),$$

desde que o $\varepsilon \le Mín\,\{\theta, \eta\}$ seja tomado suficientemente pequeno (devido à continuidade das funções f_i em $\bar{x} = \bar{a}$).

Relativamente à demonstração que acaba de ser feita, observe-se ainda que : 1) Sendo $g'_{y_\alpha}(\bar{b}) \neq 0$, é $f_\alpha(\bar{x})$ que se consegue exprimir nas restantes $f_i(\bar{x})$; 2) Para diferentes $\bar{a} \in A$, poderá ser diferente a $f_\alpha(\bar{x})$ que se exprime nas restantes $f_i(\bar{x})$.

<u>**Teorema 3**</u> **:** *Dadas as funções reais* $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, $\dots$, $f_m(\bar{x})$ *, todas de classe* $\mathbf{C^1}$ *no aberto* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *, se forem funcionalmente dependentes em A , então, para qualquer* $\bar{x} \in A$ *, a característica da matriz Jacobiana* $G = [\,\partial f_i/\partial x_j\,]$ *(* $i = 1, 2, \dots, m$ *;* $j = 1, 2, \dots, n$ *) é inferior a* <u>*m*</u>

<u>**Demonstração**</u> **:** Verificadas as hipóteses, existe uma função $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ de classe $\mathbf{C^1}$ num aberto de $\mathbf{R^m}$ que contém o conjunto $f_1(A) \times f_2(A) \times \dots \times f_m(A)$ nas seguintes condições : g tem derivadas parciais não conjuntamente nulas em nenhum ponto do mencionado conjunto $f_1(A) \times f_2(A) \times \dots \times f_m(A)$; e, por outro lado,

$$g[f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})] = 0 \quad , \forall\ \bar{x} \in A .$$

Tem-se então, para $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial\ g\big[f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \cdots, f_m(\bar{x})\big]}{\partial\ x_j} = 0 ,$$

para todos os pontos $\bar{x} \in A$. Utilizando a regra de derivação de uma função composta, obtém-se então,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} + \dfrac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j} + \cdots + \dfrac{\partial g}{\partial y_m} \cdot \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j} = 0 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

em que as derivadas parciais $\partial g / \partial y_i$ devem ser tomadas , para cada $\bar{x} \in A$, no ponto $[f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})] \in f_1(A) \times \dots \times f_m(A)$. Como para cada $\bar{x} \in A$, pelo menos uma das $\partial g / \partial y_i$ tomadas no ponto indicado é não nula , tal significa que o sistema homogéneo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} \cdot \xi_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j} \cdot \xi_2 + \cdots + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j} \cdot \xi_m = 0 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases} ,$$

de n equações nas m incógnitas $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ admite (para cada ponto $\bar{x} \in A$) soluções não nulas e tal obriga a que a característica da matriz do sistema, ou seja da matriz $G = [\,\partial f_i / \partial x_j\,]$, tenha de ser inferior a m como se pretendia provar.

Do teorema precedente decorrem imediatamente os seguintes corolários:

<u>Corolário 1</u> : *Dadas as funções reais* $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_m(\bar{x})$ *, todas de classe* $\mathbf{C^1}$ *no aberto* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *, se para certo* $\bar{x} \in A$ *, a característica da matriz Jacobiana* $G = [\,\partial f_i / \partial x_j\,]$ $(i = 1, 2, \dots, m\,;\; j = 1, 2, \dots, n)$ *for igual a* <u>m</u> *, então as funções em causa são funcionalmente independentes em A*

<u>Demonstração</u> : É evidente face ao disposto no teorema 3.

<u>Corolário 2</u> : Dadas as funções reais $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_n(\bar{x})$ *, todas de classe* $\mathbf{C^1}$ *no aberto* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *, elas são funcionalmente independentes se o determinante Jacobiano ,*

$$\Delta = |\,\partial f_i / \partial x_j\,| \;\; (i = 1, 2, \dots, n\,;\; j = 1, 2, \dots, n),$$

não se anula identicamente em A

<u>Demonstração</u> : Resulta imediatamente do corolário anterior, notando que se $\Delta \neq 0$ para certo $\bar{x} \in A$, então , para esse $\bar{x}$, a característica da matriz $G = [\,\partial f_i / \partial x_j\,]$ $(i = 1, 2, \dots, n\,;\; j = 1, 2, \dots, n)$ é igual a n .

Demonstra-se seguidamente aquele que pode ser considerado o teorema fundamental em matéria de dependência e independência funcional.

<u>Teorema 4</u> : *Dadas as funções reais* $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_n(\bar{x})$ *, todas de classe* $\mathbf{C^1}$ *no aberto* $A \subseteq \mathbf{R^n}$ *, para cada* $\bar{x} \in A$ *represente-se por* $r(\bar{x})$ *a característica da matriz Jacobiana,*

$$G = [\ \partial f_i / \partial x_j\ ]\ \ (\ i = 1, 2\ , \dots , m\ ;\ j = 1\ , 2\ , \dots , n) \,,$$

e seja $r = Máx\ \{\ r(\bar{x}) : \bar{x} \in A\ \}$. *Então :*

a) Existem entre as m funções $f_i(\bar{x})$ *, r que são funcionalmente independentes em* A *;*

b) Cada uma das restantes $m - r$ *funções* $f_i(\bar{x})$ *exprime-se nas r referidas em a) em certa vizinhança* $V_\varepsilon(\bar{a})$ *de cada ponto* $\bar{a} \in A$ *onde seja igual a r a característica da matriz Jacobiana dessas r funções.*

Demonstração : a) Nas condições do enunciado, existe um ponto $\bar{x}_0$ tal que a matriz $G = [\partial f_i / \partial x_j\ ]_{\bar{x} = \bar{x}_0}$ tem característica r . Esta matriz possui então r linhas indepen-dentes e, para as r funções correspondentes a essas linhas, a respectiva matriz Jacobiana tem característica r para $\bar{x} = \bar{x}_0$. Logo, segundo o corolário 1 do teorema 3 (tomado agora com r no lugar de m) , essas r funções $f_i(\bar{x})$ são funcionalmente independentes no aberto A .

b) Vejamos então que cada uma das restantes $m - r$ funções $f_i(\bar{x})$ se pode exprimir nas r referidas em a) em certa $V_\varepsilon(\bar{a})$ de cada ponto $\bar{a} \in A$ onde seja igual a r a característica da matriz Jacobiana dessas r funções.

Sem perda de generalidade e por conveniência de notação, vamos admitir que as r funções funcionalmente independentes referidas em a) são precisamente $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_r(\bar{x})$.

Para melhor sistematização vamos dividir em alíneas a demonstração a efectuar, começando por obter dois resultados auxiliares a utilizar posteriormente.

i) Considere-se um ponto $\bar{a} \in A$ onde seja r a característica da matriz Jacobiana $G_{r\,n} = [\ \partial f_i / \partial x_j\ ]\ \ (\ i = 1\ , 2\ , \dots , r\ ;\ j = 1\ , 2\ , \dots , n\ )$ dessas r funções. Novamente sem perda de generalidade e por conveniência de notação, admitiremos que a submatriz quadrada de ordem r contida em $G_{r\,n}$ cujo determinante não se anula em $\bar{x} = \bar{a}$ é ,

$$G_r = [\ \partial f_i / \partial x_j\ ]\ \ (\ i = 1\ , 2\ , \dots , r\ ;\ j = 1\ , 2\ , \dots , r\ ) \,.$$

Ter-se-á então $|\ G_r\ | \neq 0$ em $\bar{x} = \bar{a}$ e, devido à continuidade das $\partial f_i / \partial x_j$, conclui-se que também $|\ G_r\ | \neq 0$ para $\bar{x} \in V_\theta(\bar{a}) \subseteq A$. Mais : pode e vai escolher-se θ suficientemente pequeno por forma que tomando as derivadas da primeira linha de $|\ G_r\ |$ em $\bar{x}_1 \in V_\theta(\bar{a})$, as da segunda linha em $\bar{x}_2 \in V_\theta(\bar{a})$, etc. , seja também $|\ G_r\ | \neq 0$.

Construindo a partir de $|\ G_r\ |$ o determinante,

$$| G_r\,(\alpha\,;\,s) | = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s} \\ & & & \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_s} \end{vmatrix} \,,$$

com $\alpha > r$ e $s > r$, este determinante terá de ser identicamente nulo no aberto A . Com efeito, se para certo $\bar{x}_0 \in A$ fosse $| G_r\,(\alpha\,;\,s) | \neq 0$, a matriz Jacobiana das m funções $f_1(\bar{x})$, $f_2(\bar{x})$, … , $f_m(\bar{x})$ teria característica superior a r em certo $\bar{x}_0 \in A$, o que seria contrário à hipótese de ser $r = Máx\ \{ r(\bar{x}) : \bar{x} \in A \}$.

ii) Considere-se agora o sistema,

$$\begin{cases} f_1\,(x_1\,,\,\dots\,,\,x_r\,,x_{r+1}\,,\,\dots\,,\,x_n\,) - y_1 = 0 \\ \cdots \\ f_r\,(x_1\,,\,\dots\,,\,x_r\,,x_{r+1}\,,\,\dots\,,\,x_n\,) - y_r = 0 \end{cases} ,$$

que admite como solução $(a_1\,,\dots,a_n\,,b_1\,,\dots,b_r)$, com $b_i = f_i(\bar{a})$ para $i = 1\,,2\,,\dots,r$. Como o determinante Jacobiano das funções dos primeiros membros das equações do sistema, em relação a $x_1, x_2\,,\dots,x_r$ e tomado em $(a_1\,,\dots,a_n\,,b_1\,,\dots,b_r)$, coincide com $| G_r |$ tomado em $\bar{x} = \bar{a}$, tal determinante é não nulo e, portanto, o sistema define implicitamente em certa vizinhança $V_\delta(\,a_{r+1}\,,\,\dots\,,\,a_n\,,\,b_1\,,\,\dots\,,\,b_r)$ um único sistema de funções de classe $\mathbf{C^1}$,

$$\begin{cases} \varphi_1(\,x_{r+1}\,,\,\dots\,,\,x_n\,,\,y_1\,,\,\dots\,,\,y_r\,) \\ \cdots \\ \varphi_r(\,x_{r+1}\,,\,\dots\,,\,x_n\,,\,y_1\,,\,\dots\,,\,y_r\,) \end{cases} ,$$

tais que $a_i = \varphi_i\,(a_{r+1}\,,\dots,a_n\,,b_1\,,\dots,b_r)$ para $i = 1\,,2\,,\dots,r$; o valor δ supõe-se escolhido suficientemente pequeno de forma que para todo o,

$$(x_{r+1}\,,\dots,x_n\,,y_1\,,\dots,y_r) \in V_\delta(\,a_{r+1}\,,\dots,a_n\,,b_1\,,\dots,b_r) \,,$$

se tenha,

$$[\,\varphi_1(\dots)\,,\dots,\varphi_r(\dots)\,,\,x_{r+1}\,,\dots,x_n\,] \in V_\theta(\bar{a}) \subseteq A \,,$$

em que por simplificação $(\dots) = (x_{r+1}\,,\dots,x_n\,,y_1\,,\,\dots\,,\,y_r)$, sendo tal sempre possível devido à continuidade das funções φ_i .

iii) Tomando $\varepsilon \leq \theta$ suficientemente pequeno de forma que para todo o ponto $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ se tenha,

$$[\, x_{r+1}\,, \dots , x_n\,,\, f_1(\bar{x})\,,\ \dots\ ,\, f_r(\bar{x})] \in V_\delta(\, a_{r+1}\,, \dots , a_n\,, b_1\,, \dots , b_r)\,,$$

o que é sempre possível devido à continuidade das $f_i(\bar{x})$, façamos em seguida,

$$x^*_i = \varphi_i\,[\, x_{r+1}\,, \dots , x_n\,,\ f_1(\bar{x})\,,\ \dots\ ,\, f_r(\bar{x})]\ \ ,\ i = 1\,, 2\,, \dots , r\ ;$$

o que se disse na parte final de ii) sobre a escolha do valor δ permite concluir que $(\, x^*_1\,, \dots , x^*_r\,, x_{r+1}\,, \dots , x_n\,) \in V_\theta(\bar{a})$. Vamos provar em seguida que para todo o $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ deverá ser $x^*_i = x_i$. Com efeito, por substituição dos x^*_i no sistema que define implicitamente as funções φ_i, pode obter-se :

$$\begin{cases} f_1\,(x_1^*\,,\ \dots\ ,\ x_r^*\ ,\ x_{r+1}\ ,\ \dots\ ,\ x_n\,)\ -\ f_1(\bar{x})\ =\ 0 \\ \dots \\ f_r\,(x_1^*\,,\ \dots\ ,\ x_r^*\ ,\ x_{r+1}\ ,\ \dots\ ,\ x_n\,)\ -\ f_r\,(\bar{x})\ =\ 0 \end{cases}\quad ;$$

aplicando o teorema dos acréscimos finitos a cada um primeiros membros das igualdades precedentes, obtém-se:

$$\begin{cases} (x_1^* - x_1)\ .\ f'_{1x_1}(\bar{x}_1)\ +\ \cdots\ +\ (x_r^* - x_r)\ .\ f'_{1x_r}(\bar{x}_1)\ =\ 0 \\ \dots \\ (x_1^* - x_1)\ .\ f'_{rx_1}(\bar{x}_r)\ +\ \cdots\ +\ (x_r^* - x_r)\ .\ f'_{rx_r}(\bar{x}_r)\ =\ 0 \end{cases}\quad ,$$

com certos $\bar{x}_1\,,\ \bar{x}_2\,,\ \dots\ ,\ \bar{x}_r \in V_\theta(\bar{a})$. A condição que presidiu à escolha de θ garante que,

$$\begin{vmatrix} f'_{1x_1}(\bar{x}_1) & \cdots & f'_{1x_r}(\bar{x}_1) \\ & \cdots & \\ f'_{rx_1}(\bar{x}_r) & \cdots & f'_{rx_r}(\bar{x}_r) \end{vmatrix} \neq 0\ ,$$

pelo que as igualdades obtidas ao aplicarmos o teorema dos acréscimos finitos implicam que $x^*_1 = x_1$, $x^*_2 = x_2$, … , $x^*_r = x_r$, como se queria provar. Ou seja, para todo o $\bar{x} \in V_\varepsilon(\bar{a})$ tem-se :

$$x_i = \varphi_i\,[\, x_{r+1}\,, \dots , x_n\,,\, f_1(\bar{x})\,,\ \dots\ ,\, f_r(\bar{x})]\ \ ,\ i = 1\,, 2\,, \dots , r\ .$$

iv) Considere-se agora uma função $f_\alpha(\bar{x})$, com $\alpha > r$, e para

$$(x_{r+1}\,, \dots , x_n\,, y_1\,, \dots , y_r) \in V_\delta(\, a_{r+1}\,, \dots , a_n\,, b_1\,, \dots , b_r)\,,$$

faça-se a composição,

$$f_\alpha[\ \varphi_1(\dots)\,, \dots , \varphi_r(\dots)\,,\ x_{r+1}\,, \dots , x_n\,]\ ,$$

em que $(\ldots) = (x_{r+1}\,, \ldots , x_n\,, y_1\,, \ldots , y_r)$. Substituindo nesta função composta y_i por $f_i(\overline{x})$, $i = 1\,, 2\,, \ldots , r$, para $\overline{x} \in V_\varepsilon(\overline{a})$, obtém-se, face ao resultado de iii) ,

$$f_\alpha(\,x_1\,, \ldots ,\ x_r\ ,\ x_{r+1}\,, \ldots , x_n\,) = f_\alpha(\,\overline{x}\,)\ ,$$

e portanto se provarmos que ,

$$f_\alpha[\ \varphi_1(\ldots)\,, \ldots ,\ \varphi_r(\ldots)\ ,\ x_{r+1}\,, \ldots , x_n\ ]\ \ ,$$

é uma função $\Phi_\alpha(\,y_1\,, \ldots , y_r)$ só dos y_i (constante em relação às variáveis $x_{r+1}\,, \ldots ,$ x_n), conclui-se que,

$$f_\alpha(\,\overline{x}\,) = \Phi_\alpha\,[\,f_1(\,\overline{x}\,)\ ,\ \ldots\ ,\ f_r(\,\overline{x}\,)]\ \ ,$$

ou seja, $f_\alpha(\,\overline{x}\,)$, com $\alpha > r$, pode exprimir-se em termos das funções $f_1(\,\overline{x}\,)\,, \ldots ,$ $f_r(\,\overline{x}\,)$ em $V_\varepsilon(\,\overline{a}\,)$.

v) Vejamos então que a função,

$$\Phi_\alpha\,(x_{r+1}\,, \ldots , x_n\,, y_1\,, \ldots , y_r) = f_\alpha[\ \varphi_1(\ldots)\,, \ldots ,\ \varphi_r(\ldots)\ ,\ x_{r+1}\,, \ldots , x_n\ ]\ \ ,$$

em que $(\ldots) = (x_{r+1}\,, \ldots , x_n\,, y_1\,, \ldots , y_r)$, é constante em relação às variáveis $x_{r+1}\,, \ldots\,, x_n$ em $V_\delta(\,a_{r+1}\,, \ldots , a_n\,, b_1\,, \ldots , b_r)$ o que, como se disse no final de iv) , concluirá a demonstração do teorema. O teorema dos acréscimos finitos garante este desiderato desde que seja,

$$\frac{\partial\ \Phi_\alpha}{\partial\ x_{r+1}} = \frac{\partial\ \Phi_\alpha}{\partial\ x_{r+2}} = \ \ldots\ = \frac{\partial\ \Phi_\alpha}{\partial\ x_n} = 0\,,$$

naquela vizinhança.

Ora as derivadas $\partial\,\varphi_i\,/\partial\,x_s$, $s > r$, das funções φ_i definidas implicitamente pelo sistema de ii), verificam as relações,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, f_1}{\partial\, x_1}\cdot\dfrac{\partial\,\varphi_1}{\partial\, x_s} + \cdots + \dfrac{\partial\, f_1}{\partial\, x_r}\cdot\dfrac{\partial\,\varphi_r}{\partial\, x_s} + \dfrac{\partial\, f_1}{\partial\, x_s} = 0 \\ \ldots \\ \dfrac{\partial\, f_r}{\partial\, x_1}\cdot\dfrac{\partial\,\varphi_1}{\partial\, x_s} + \cdots + \dfrac{\partial\, f_r}{\partial\, x_r}\cdot\dfrac{\partial\,\varphi_r}{\partial\, x_s} + \dfrac{\partial\, f_r}{\partial\, x_s} = 0 \end{cases} ,$$

e, por outro lado,

$$\frac{\partial\ \Phi_\alpha}{\partial\ x_s} = \frac{\partial\, f_\alpha}{\partial\, x_1}\cdot\frac{\partial\,\varphi_1}{\partial\, x_s} + \cdots + \frac{\partial\, f_\alpha}{\partial\, x_r}\cdot\frac{\partial\,\varphi_r}{\partial\, x_s} + \frac{\partial\, f_\alpha}{\partial\, x_s}\ \ ,$$

devendo , em todas as igualdades precedentes, as derivadas $\partial \varphi_i / \partial x_s$ serem tomadas nos pontos,

$$(x_{r+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r) \in V_\delta(a_{r+1}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_r),$$

e as $\partial f_i / \partial x_j$ nos pontos correspondentes,

$$[\varphi_1(\dots), \dots, \varphi_r(\dots), x_{r+1}, \dots, x_n] \in V_\theta(\overline{a}) \subseteq A .$$

Retome-se agora o determinante,

$$| G_r(\alpha; s) | = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s} \\ & & & \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_r} & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_s} \end{vmatrix} ,$$

considerado da alínea i) e adicione-se à última coluna o produto da primeira por $\partial \varphi_1 / \partial x_s$, o produto da segunda por $\partial \varphi_2 / \partial x_s$, etc. , assim se obtendo,

$$| G_r(\alpha; s) | = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & \left(\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} \cdot \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_s}\right) \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} & \left(\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\partial f_r}{\partial x_k} \cdot \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} + \dfrac{\partial f_r}{\partial x_s}\right) \\ & & & \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_r} & \left(\sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} \cdot \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_s} + \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_s}\right) \end{vmatrix} .$$

Considerando no determinante anterior as derivadas $\partial \varphi_i / \partial x_s$ e $\partial f_i / \partial x_j$ tomadas nos pontos anteriormente referidos, obtém-se :

$$| G_r(\alpha; s) | = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} & 0 \\ \cdots & & & \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} & 0 \\ & & & \\ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_r} & \dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_s} \end{vmatrix} = \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_s} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdots & & \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} .$$

Ora, como vimos em i), este determinante deve ser nulo para qualquer $\bar{x} \in A$; e com qualquer,

$$(x_{r+1}\,,\,\dots\,,x_n\,,y_1\,,\,\dots\,,y_r) \in V_\delta(\,a_{r+1}\,,\,\dots\,,a_n\,,b_1\,,\,\dots\,,b_r)\,,$$

tem-se,

$$[\,\varphi_1(\dots)\,,\,\dots\,,\varphi_r(\dots)\,,\,x_{r+1}\,,\,\dots\,,x_n\,]\ \in V_\theta(\,\bar{a}\,) \subseteq A\,,$$

o que implica,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdots & & \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Resulta então , $\dfrac{\partial\ \Phi_\alpha}{\partial\ x_s} = 0$, assim se concluindo que em,

$$(x_{r+1}\,,\,\dots\,,x_n\,,y_1\,,\,\dots\,,y_r) \in V_\delta(\,a_{r+1}\,,\,\dots\,,a_n\,,b_1\,,\,\dots\,,b_r)\,,$$

se tem , $\dfrac{\partial\ \Phi_\alpha}{\partial\ x_s} = 0 \ \ (\,s = r+1\,,\,\dots\,,n)$, como se queria provar. O teorema está assim completamente demonstrado.

Vejamos dois exemplos de aplicação do teorema anterior:

1) Para as funções definidas em $\mathbf{R}^2$,

$$y_1 = cos\,x + sen\,y \quad e \quad y_2 = sen\,x + cos\,y\ ,$$

tem-se,

$$\begin{vmatrix} -sen\ x & cos\ y \\ cos\ x & -sen\ y \end{vmatrix} = sen\,x\ sen\,y\ -\ cos\,x\ cos\,y\ ,$$

não identicamente nulo em $\mathbf{R}^2$ e, portanto, as funções dadas são funcionalmente independentes em $\mathbf{R}^2$.

2) Para as funções definidas em $\mathbf{R}^2$,

$$y_1 = x^2 + y^2 - 1\ \ ,\ y_2 = x^2 - y^2 + 1\ \ e\ \ y_3 = 2x^2\,,$$

a respectiva matriz Jacobiana,

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ 4x & 0 \end{bmatrix} ,$$

tem característica máxima , $r = Máx \{ r(x , y) : (x , y) \in \mathbf{R^2} \} = 2$. Então, duas das funções dadas são funcionalmente independentes em $\mathbf{R^2}$, por exemplo como acontece com y_1 e y_2 , e a terceira (y_3) pode exprimir-se naquelas em alguma vizinhança de cada $(a , b) \in \mathbf{R^2}$ onde seja igual a dois a característica da matriz Jacobiana de y_1 e y_2 . No caso presente, consegue mesmo exprimir-se a função y_3 em termos de y_1 e y_2 através de uma relação globalmente válida em $\mathbf{R^2}$ e não apenas na vizinhança de cada ponto nas condições indicadas : $y_3 = y_1 + y_2$, $\forall\ (x , y) \in \mathbf{R^2}$.

3. Derivação de um determinante funcional

Considere-se o determinante funcional,

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} ,$$

em que cada f_{ij}(x) é uma função real de variável real com derivada finita no intervalo I . Vamos deduzir uma regra que permite obter a derivada de $D(x)$ como uma soma de determinantes.

Como se sabe, por definição de determinante,

$$D(x) = \sum (-1)^{\theta} .\ f_{1\alpha_1}(x)\ .\ f_{2\alpha_2}(x)\ .\ \dots\ .\ f_{n\alpha_n}(x) \ ,$$

em que θ designa o número de inversões da permutação $\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n$ relativamente à permutação principal $1\ 2\ \dots\ n$.

Usando as regras de derivação de uma soma e de um produto de funções, tem-se,

$$\begin{aligned} D'(x) = & \sum (-1)^{\theta} .\ f'_{1\alpha_1}(x)\ .\ f_{2\alpha_2}(x)\ .\ \dots\ .\ f_{n\alpha_n}(x) + \\ & + \sum (-1)^{\theta} .\ f_{1\alpha_1}(x)\ .\ f'_{2\alpha_2}(x)\ .\ \dots\ .\ f_{n\alpha_n}(x) + \dots + \\ & + \sum (-1)^{\theta} .\ f_{1\alpha_1}(x)\ .\ f_{2\alpha_2}(x)\ .\ \dots\ .\ f'_{n\alpha_n}(x) \ , \end{aligned}$$

e conclui-se imediatamente que cada um dos somatórios da expressão precedente corresponde ao valor de um determinante obtido a partir de *D(x)* derivando cada uma das suas linhas, ou seja,

$$D'(x) = \begin{vmatrix} f_{11}'(x) & f_{12}'(x) & \cdots & f_{1n}'(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}'(x) & f_{22}'(x) & \cdots & f_{2n}'(x) \\ \cdots & & & \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & & & \\ f_{n1}'(x) & f_{n2}'(x) & \cdots & f_{nn}'(x) \end{vmatrix} .$$

Dado que a transposição de uma matriz não altera o valor do respectivo determinante, a regra de derivação precedente é também válida quando aplicada por colunas.

Por exemplo, sendo,

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ x^2 & 1 & 2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} ,$$

tem-se,

$$D'(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ x^2 & 1 & 2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ 2x & 0 & 0 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & 1-x \\ x^2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4x^3 + 6x - 3 .$$

Em alternativa, derivando por colunas, tem-se ;

$$D'(x) = \begin{vmatrix} 0 & x & 1-x \\ 2x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-x \\ x^2 & 0 & 2 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ x^2 & 1 & 0 \\ x & x & 0 \end{vmatrix} = -4x^3 + 6x - 3 .$$

Se calcularmos primeiro $D(x)$, obtém-se $D(x) = -x^4 + 3x^2 - 3x + 1$, o que permite confirmar ser $D'(x) = -4x^3 + 6x - 3$.

4. Estudo especial da dependência linear para as funções reais de variável real

Na linha do que se viu anteriormente, dadas m funções reais de variável real definidas num intervalo $[a, b]$,

$$y_1 = f_1(x) ,\ y_2 = f_2(x) ,\ \ldots ,\ y_m = f_m(x) ,$$

dizem-se *linearmente dependentes* no intervalo quando existem constantes c_1 , c_2 , … c_m , não todas nulas e tais que,

$$c_1 \,.\, f_1(x) + c_2 \,.\, f_2(x) + \;\ldots\; + c_m \,.\, f_m(x) = 0 \;,$$

qualquer que seja $x \in [\,a\,,\,b\,]$.

Dizem-se *linearmente independentes* no caso contrário.

Note-se que para $m = 1$, a definição de dependência linear equivale a dizer que $f_1(x)$ é identicamente nula no intervalo $[\,a\,,\,b\,]$.

Tendo em vista apresentar alguns teoremas sobre dependência linear, define-se seguidamente o chamado *determinante Wronskiano* . Dadas m funções reais de variável real definidas no intervalo $[\,a\,,\,b\,]$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_m(x)$, supostas deriváveis no intervalo até à ordem m - 1 , o seu determinante Wronskiano é o determinante:

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \ldots & & & \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} \;.$$

Podemos agora demonstrar o teorema seguinte :

<u>Teorema 5</u> : *Sendo* Δ_i *o complemento algébrico de* $f_i^{(m-1)}(x)$ *no Wronskiano* <u>*W*</u> *e supondo as* $f_i(x)$ *deriváveis até à ordem* <u>*m*</u> *, então tem-se :*

$$\sum_{i=1}^{m} f_i^{(j)}(x) \,.\, \Delta_i = \begin{cases} 0 & , \quad j = 0 \,,\, 1 \,,\, \ldots \,,\, m-2 \\ W & , \quad j = m-1 \\ W' & , \quad j = m \end{cases}$$

<u>Demonstração</u> : Para $j = 0$, 1 , … , m - 2 , está em causa a soma dos produtos dos elementos de uma linha de W pelos complementos algébricos de outra linha, que, como se sabe, é igual a zero.

Para $j = m - 1$, está em causa a soma dos produtos dos elementos da última linha de W pelos respectivos complementos algébricos que, como se sabe, é igual ao valor do determinante (teorema de Laplace).

Vejamos o caso $j = m$. Pela regra de derivação de um determinante fun-cional tem-se:

$$W' = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \cdots & & & \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_m''(x) \\ \cdots & & & \\ f_1^{(m-1)}(x) & f_2^{(m-1)}(x) & \cdots & f_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_m(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_m'(x) \\ \cdots & & & \\ f_1^{(m)}(x) & f_2^{(m)}(x) & \cdots & f_m^{(m)}(x) \end{vmatrix}$$

e, com excepção do último, todos os determinantes envolvidos na derivada de W são nulos (têm duas linhas iguais). Desenvolvendo o último determinante pelo teorema de Laplace, segundo os elementos da última linha, obtém-se então,

$$W' = \sum_{i=1}^{m} f_i^{(m)}(x) \, . \, \Delta_i \quad ,$$

que é a relação que se pretendia estabelecer.

Relativamente ao teorema que acaba de ser demonstrado convém ainda notar que a hipótese de as m funções $f_i(x)$ serem deriváveis até à ordem m apenas é necessária para estabelecer a relação correspondente ao caso $j = m$. Para os casos $j = 0 , 1 , \ldots , m -1$ basta admitir a derivabilidade das funções até à ordem $m - 1$.

Estamos agora em condições de demonstrar dois teoremas fundamentais sobre dependência linear de funções reais de variável real.

<u>**Teorema 6**</u> **:** *Se as* m *funções* $f_1(x)$ *, ... ,* $f_m(x)$ *, supostas deriváveis até à ordem* $m - 1$ *no intervalo* $[a, b]$ *são linearmente dependentes neste intervalo, então o determinante Wronskiano é identicamente nulo no mesmo intervalo*

Demonstração : Da definição,

$$c_1 . f_1(x) + c_2 . f_2(x) + \ldots + c_m . f_m(x) = 0 \text{ , em } [\, a, b]$$

obtém-se por derivação sucessiva, também para todo o $x \in [\, a, b]$,

$$\begin{cases} c_1 . f_1^{'}(x) + c_2 . f_2^{'}(x) + \cdots + c_m . f_m^{'}(x) = 0 \\ c_1 . f_1^{''}(x) + c_2 . f_2^{''}(x) + \cdots + c_m . f_m^{''}(x) = 0 \\ \ldots \\ c_1 . f_1^{(m-1)}(x) + c_2 . f_2^{(m-1)}(x) + \cdots + c_m . f_m^{(m-1)}(x) = 0 \end{cases} .$$

Formando um sistema linear com estas m - 1 igualdades mais a que lhes deu origem, temos para cada $x \in [\, a, b]$ um sistema homogéneo nas incógnitas c_i cujo determinante é precisamente o Wronskiano W . Para que o sistema possa ser verificado com c_i não todos nulos (como impõe o conceito de dependência linear), deve ter-se necessariamente $W = 0$ para todo o $x \in [\, a, b]$, como se queria demonstrar.

Teorema 7 : *Se o Wronskiano W for identicamente nulo em $[\, a, b]$ e em nenhum ponto de $]\, a , b[$ se anulam simultaneamente os complementos algébricos Δ_i ($i = 1$, 2 , … , m) dos elementos da sua última linha, então as funções $f_1(x)$, … , $f_m(x)$ são linearmente dependentes no intervalo $[\, a, b]$*

Demonstração : Sendo E_i os complementos algébricos dos elementos da penúltima linha de W , por um argumento semelhante ao usado na demonstração do teorema 5, conclui-se que $\Delta'_i = - E_i$, em que, como anteriormente, os Δ_i são os complementos algébricos dos elementos da última linha de W .

Por outro lado, dado não serem simultaneamente nulos em nenhum ponto $x \in]\, a , b[$ todos os Δ_i e ao mesmo tempo dado que $W = 0$ no intervalo $[\, a, b]$, conclui-se que, para qualquer $x \in]\, a , b[$, W tem característica igual a m -1 .

Note-se em seguida que o teorema 5 e um resultado análogo para os complementos algébricos E_i permitem escrever,

$$\begin{cases} f_1(x) . \Delta_1 + \cdots + f_m(x) . \Delta_m = 0 \\ f_1^{'}(x) . \Delta_1 + \cdots + f_m^{'}(x) . \Delta_m = 0 \\ \ldots \\ f_1^{(m-2)}(x) . \Delta_1 + \cdots + f_m^{(m-2)}(x) . \Delta_m = 0 \\ f_1^{(m-1)}(x) . \Delta_1 + \cdots + f_m^{(m-1)}(x) . \Delta_m = W = 0 \end{cases} ,$$

e também,

$$\begin{cases} f_1(x) \,.\, E_1 + \cdots + f_m(x) \,.\, E_m = 0 \\ f_1'(x) \,.\, E_1 + \cdots + f_m'(x) \,.\, E_m = 0 \\ \cdots \\ f_1^{(m-2)}(x) \,.\, E_1 + \cdots + f_m^{(m-2)}(x) \,.\, E_m = W = 0 \\ f_1^{(m-1)}(x) \,.\, E_1 + \cdots + f_m^{(m-1)}(x) \,.\, E_m = 0 \end{cases} .$$

As igualdades anteriores mostram que,

$$(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m) \quad \text{e} \quad (E_1, E_2, \dots, E_m) ,$$

são duas soluções do mesmo sistema homogéneo cujo determinante é precisamente W.

Como para qualquer $x \in]a, b[$, W tem característica igual a m -1 , para esses valores de x o sistema homogéneo em causa é indeterminado de grau um ; dado que $(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m)$ é uma solução não nula desse sistema, qualquer outra solução, em particular $(E_1, E_2, \dots, E_m)$, pode obter-se pelas relações,

$$E_i = \beta(x).\, \Delta_i \ , \ i = 1, 2, \dots, m ,$$

para qualquer $x \in]a, b[$.

Atendendo agora a que, como vimos, $\Delta'_i = - E_i$, resulta,

$$-\Delta'_i = \beta(x).\, \Delta_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m ,$$

para qualquer $x \in]a, b[$. Fazendo em seguida,

$$M^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_m^2$$

tem-se $M^2 \neq 0$ no intervalo $]a, b[$ e então,

$$M^2 .\, \beta(x) = \beta(x) \,.\, \Delta_1^2 + \beta(x) \,.\Delta_2^2 + \cdots + \beta(x) \,.\Delta_m^2 =$$

$$= -\Delta_1 \,.\, \Delta_1' - \Delta_2 \,.\, \Delta_2' - \cdots - \Delta_m \,.\, \Delta_m' ,$$

donde se tira,

$$\beta(x) = \frac{-(\Delta_1 \,.\, \Delta_1' + \Delta_2 \,.\, \Delta_2' + \cdots + \Delta_m \,.\, \Delta_m')}{M^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_m^2)'}{M^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(M^2)'}{M^2} = -\frac{M'}{M} .$$

Ora,

$$\left[\frac{\Delta_i}{M}\right]' = \frac{\Delta_i' \,.\, M \;-\; \Delta_i \,.\, M'}{M^2} = \frac{\Delta_i' \;-\; \Delta_i \,\cdot\, \dfrac{M'}{M}}{M} =$$

$$= \frac{\Delta_i' \;+\; \beta\,(x)\,.\,\Delta_i}{M} = \frac{\Delta_i' \;-\; \Delta_i'}{M} = 0\,,$$

em $]\,a\,,b[$; então,

$$\frac{\Delta_i}{M} = c_i \text{ (constante no intervalo }]\,a\,,b[\ )\,,$$

e claro que as constantes c_i não são todas nulas (porque o mesmo acontece com os Δ_i) .

Mas, pelo teorema 5,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\,(x)\ .\ \Delta_i = 0\,,$$

e a partir daqui sai sucessivamente,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\,(x)\ .\ M\ .\ c_i = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} f_i\,(x)\ .\ c_i = 0 \quad (\text{ por ser } M \neq 0\,)\,,$$

para $x \in]\,a\,,b[$, com as constantes c_i não todas nulas. Pela continuidade das $f_i\,(x)$ em $[a, b]$, então também a última igualdade se verifica nas extremidades do intervalo , ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} f_i\,(x)\ .\ c_i = 0\ ,$$

para qualquer $x \in [a, b]$, com as constantes c_i não todas nulas. Por outras palavras, as funções $f_i\,(x)$ são linearmente dependentes em $[a, b]$, como se pretendia demonstrar.

5. Exercícios

5.1 - Mostre que as funções $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = cos\ x$ são funcionalmente dependentes no intervalo $]0\ ,\ \pi/2[$. Mostre que, no entanto, são linearmente independentes.

5.2 - Estude a dependência funcional em $\mathbf{R}^3$ das seguintes funções :

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_3 \quad , \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 + x_3 \quad \text{e} \quad y_2 = 4x_1 x_2 \ .$$

5.3 - Demonstre que não são independentes as funções,

$$u = \frac{x}{y} \quad \text{e} \quad v = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ ,$$

e indique uma relação que as liga.

5.4 - Determine a característica da matriz Jacobiana das seguintes funções definidas em $\mathbf{R}^3$:

$$u = x + y \quad , \quad v = x + z \quad \text{e} \quad w = y^2 + z^2 - 2yz \ .$$

Obtenha uma relação entre as funções.

5.5 - Demonstre a dependência linear as funções,

$$u = x^2 + 1 \quad , \quad v = 1 - 2x^2 \quad \text{e} \quad w = x^2 - 2 \ .$$

5.6 - Considere as funções, $u = x^2$ e $v = x\,.\,|\,x\,|$.

a) Mostre que o respectivo determinante Wronskiano é identicamente nulo em $\mathbf{R}$ e que, no entanto, as funções dadas não são linearmente dependentes em qualquer intervalo que inclua a origem no seu interior;

b) A que se deve esta "*anomalia*" relativamente ao teorema que dá a condição suficiente de dependência linear.

5.7 - a) Sendo $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_m(x)$ linearmente dependentes e deriváveis no intervalo $[a, b]$, mostre que então são também linearmente dependentes as funções,

$$f'_1(x)\ ,\ f'_2(x)\ ,\ \dots\ ,\ f'_m(x)\ ;$$

b) Baseando-se no resultado da alínea anterior, mostre que sendo as funções $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_m(x)$ linearmente dependentes e deriváveis até à ordem m no intervalo $[a, b]$, então é nulo o determinante funcional $\left| f_j^{(i)}(x) \right|$ $(i = 1, 2, \dots, m\ ;\ j = 1, 2, \dots, m)$;

c) Utilizando como exemplo as funções,

$$f_1(x) = \frac{x^3}{3} + 1 \quad , \quad f_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + 1 \quad \text{e} \quad f_3(x) = x + 1 \; ,$$

mostre que a proposição recíproca de a) não é verdadeira ;

d) Mostre que, não obstante c), sendo $f_1(x)$, $f_2(x)$, … , $f_m(x)$ linearmente dependentes em $[a, b]$ e existindo primitivas $F_i(x)$ das funções $f_i(x)$ nesse intervalo, então tomando para todas as $f_i(x)$ primitivas que se anulem num mesmo $c \in [a, b]$, estas particulares primitivas são também linearmente dependentes no intervalo em causa .

5.8* - Se as funções $u_1(x)$, $u_2(x)$, … , $u_n(x)$ são contínuas no interva-lo $[a , b]$, fazendo,

$$I_{ij} = \int_a^b u_i(x)\, u_j(x)\; dx \; ,$$

mostre que a condição necessária e suficiente para que as funções dadas sejam linearmente dependentes é que se anule o determinante de *Gram* :

$$G = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & I_{2n} \\ \cdots & & & \\ I_{n1} & I_{n2} & \cdots & I_{nn} \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Aplique este resultado para mostrar que são linearmente independentes as funções do exercício 5.1 .

<u>RESPOSTAS</u> :

5.2 - São funcionalmente dependentes : $y_3 = y_1 - y_2$.

5.3 - $(u^2 + 1)\, v - u^2 + 1 = 0$.

5.4 - A característica é igual a 2 . Exemplo de relação entre as funções : $w = (u - v)^2$.

5.6 - b) Deve-se ao facto de os complementos algébricos dos elementos da última linha do determinante Wronskiano serem todos nulos para $x = 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] **FERREIRA**, J. Campos
Introdução à Análise Matemática
Fundação Calouste Gulbenkian

[2] **AGUDO**, F. R. Dias
Análise Real – Vol I
Escolar Editora

[3] **APOSTOL**, Tom M.
Calculus – Vols. I e II (2nd *Edition*)
John Wiley & Sons

[4] **SARRICO**, Carlos
Análise Matemática (3^{a} *Edição*)
Gradiva

[5] **STEIN**, Sherman K.
Calculus and Analytic Geometry (2nd *Edition*)
McGraw – Hill

[6] **SWOKOWSKI**, Earl W.
Cálculo com Geometria Analítica
McGraw – Hill

[7] **RUDIN**, W.
Principles of Mathematical Analysis
McGraw – Hill

[8] **JESUS**, Fernando de
Matemáticas Gerais (1964/1965)
Associação Académica do ISCEF

[9] **ANTON**, Howard
Calculus – A New Horizon (2nd *Edition*)
John Wiley & Sons, Inc.

[10] **REINHARDT**, Fritz e **SOEDER** , Heinrich
Atlas de Matemáticas (*Edição Espanhola*)
Alianza Editorial