Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
Época de Recurso: 1 de Fevereiro de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(2,5) 1. Considere a seguinte série de potências: $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$.

a) Estude a convergência da série indicando para que valores de x a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Calcule a soma da série dentro do intervalo de convergência.

(2,5) 2. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{2n+3n^2}{x^2n^2+2n^2}$. Indique, justificando, se f_n é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(4,0) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x(2-\sin(x))}{1-|y|}}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Indique, justificando, se f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,1)$.

(3,5) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+xy\cos(xy)\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(b) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$.

(2,5) 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = f\left(x^2-y^2, y^2-z^2\right)$. Prove que

$$yz\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + xz\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + xy\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0,$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x,y) = x + y\sin(x).$$

Determine os pontos críticos de f, indicando se são extremantes ou pontos de sela.

(2,5) 7. Seja a_n uma sucessão tal que a série $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Prove que a série $\sum a_n^2$ também é absolutamente convergente. Dê um exemplo que mostre que o recíproco não é verdadeiro.