Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2006/2007
Época Normal: 4 de Junho de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,0) 1. Seja a_n uma sucessão convergente de termos positivos tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{n^2 a_n}{2n^2+1}.$$

(a) Estude, quanto à convergência, a série $\sum a_n$.

(b) Prove que $\lim a_n = 0$ e indique, justificando, qual a natureza da série $\sum(e^{a_n} - 1)$.

(3,0) 2. Seja $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{4^n}{x^n + 4^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Estude a convergência uniforme de f_n nos seguintes intervalos:

a) $[3, 5]$;   b) $[6, 10]$;

(4,0) 3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função definida por:

$$f(x,y) = \frac{\log(1 - x^2 - y)}{\sqrt{y - x^2 + 1}}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos pertencentes a D_f que convirja para um ponto que não pertence a D_f.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte afirmação:

$$\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n \backslash D_f : \lim x_n \in D_f.$$

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(\cos(x) - \sin(y))}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

(c) Indique, justificando, se f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

(2,5) 5. Sendo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(0, e, 0)$ tal que $\nabla_f(0, e, 0) = (e, -1, e)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x,y) = f(\sin(xy^2), e^y, \log(1 + x^2))$ calcule $\nabla_g(0,1)$ e verifique que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = -\frac{\partial g}{\partial y}(0,1).$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yf(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xf(x,y)$ e $f(0,0) = 1$. Prove que $(0,0)$ é um ponto crítico de f mas não é um extremante da função.