Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2007/2008
Época Normal: 16 de Janeiro de 2008
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,0) 1. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sucessões de termos positivos tais que a série de termo geral a_n é convergente e a sucessão $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

a) $\sum \dfrac{a_n}{1+b_n}$; b) $\sum \dfrac{b_n}{1+a_n}$;

(3,0) 2. Seja $f_n : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^n+6^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Estude a convergência uniforme de f_n nos seguintes intervalos:

a) $[7,10]$; b) $[3,10]$;

(4,0) 3. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por:

$$f(x,y) = \left(\frac{e^{\sin(x)}}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \frac{\ln(y^2-x)}{x+2y}\right).$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Dê um exemplo, ou prove que não existe, uma sucessão de pontos pertencentes a D_f que convirja para um ponto que não pertence a D_f.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + (y+3)^3 & \text{se } x \neq 1 \\ (y+3)^3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando o seu domínio.

(c) Indique, justificando, se f é diferenciável no ponto $(1,-3)$.

(3,0) 5. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(-1,1) = -1$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função tal que $g(x,y) = f(f(x,y), f^2(x,y))$.

(a) Calcule, em função das derivadas parciais de f o gradiente de g.

(b) Prove que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(-1,1) + 2\frac{\partial g}{\partial y}(-1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)\right)^2 - 4\left(\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)\right)^2.$$

(2,0) 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = xy(1-x-y).$$

Determine os pontos de estacionaridade de f e escolha dois dos pontos encontrados para determinar se se tratam de extremantes ou pontos de sela.