Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática II
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2006/2007
Época de Recurso: 25 de Junho de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,0) 1. Considere a seguinte série de potências: $\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$.

a) Estude a convergência da série indicando para que valores de x a série é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente.

b) Calcule a soma da série dentro do intervalo de convergência.

(2,5) 2. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sucessão de funções definida por $f_n(x) = \dfrac{nx}{e^{nx}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, se a sucessão f_n converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(4,5) 3. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x-y^2}{\sin(x)-3}} \times \log(1-x^2-y^2).$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Defina, analiticamente, a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto aberto ou fechado.

(c) Indique, se possível uma sucessão de pontos de D_f que convirja para um ponto que não pertence a D_f e uma sucessão de pontos que não pertencem a D_f que convirja para um ponto de D_f.

(5,0) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-1)^2 \sin\left(\dfrac{1}{x-1}\right) + y^2 & \text{se } x \neq 1 \\ y^2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ indicando o seu domínio.

(c) Indique, justificando, se f é diferenciável no ponto $(1,0)$.

(2,5) 5. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 em $\mathbb{R}$. Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x,y) = f\left(x + g(y)\right)$. Prove que

$$\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

(2,5) 6. Para cada par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ com $a, b \neq 0$, considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + xy.$$

(a) Determine os pontos críticos de f.

(b) Indique, justificando, se são maximizantes, minimizantes ou pontos de sela no caso em que $ab > 0$ e no caso em que $ab < 0$.