LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

MATEMÁTICA 2

Teste Intercalar

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 12 de Abril de 2018 **Duração:** 1H

Nome: ______________________________ **Número:** ____________

Questão	1a	1b	2	3a	3b	3c	4	5	Total
	15	10	20	15	10	10	10	10	100
Pontuação									

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas. Caso necessite de espaço adicional para responder a alguma pergunta, pode utilizar o espaço disponível na última página.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Sabendo que $\lambda = 2$ é valor próprio de A, determine a constante α e a multiplicidade geométrica desse valor próprio.

Solução: Sendo $\lambda = 2$ valor próprio da matriz A, sabemos que $|A - 2I| = 0$. Ora,

$$|A-2I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & (\alpha-1) & 1 \\ 0 & 1 & (\alpha-1) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(2(\alpha-1)-0) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1,$$

pelo que o valor da constante α deve ser 1. Relativamente à multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = 2$, ela corresponde ao grau de indeterminação do sistema $(A-2I)u = 0$. Reduzindo $A - 2I$ a uma matriz em escada obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftarrow l_3 - \frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que $r(A-2I) = 2$ e, consequentemente, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é 1 (o grau de indeterminação é a diferença entre o número de colunas da matriz e a sua característica).

(b) Classifique a forma quadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$. Caso não tenha resolvido a alínea anterior, utilize $\alpha = 1$.

Solução: Como a matriz A é simétrica, podemos tentar classificar a forma quadrática $Q(\boldsymbol{x})$ através dos menores principais de A. Concretamente, como obtemos

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = -2 \neq 0,$$

podemos concluir que a forma quadrática é indefinida. Alternativamente, como já conhecemos um dos valores próprios de A, poderíamos determinar os restantes e verificar que existem valores próprios de sinais contrários.

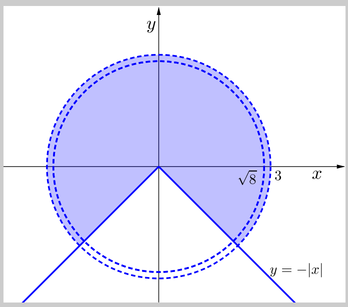
2. Seja $\boldsymbol{f} : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela expressão

$$\boldsymbol{f} = \left(\frac{x^2+y^2}{\ln(9-x^2-y^2)}, \sqrt{y+|x|} \right).$$

Determine analítica e geometricamente o domínio de $\boldsymbol{f}$, D_f, e indique o seu interior, fronteira e aderência. Mostre ainda que D_f é limitado mas não é compacto.

Solução: A função $\boldsymbol{f}$ está definida sempre que estiverem bem definidas as suas duas funções coordenadas, isto é,

$$\begin{aligned} D_f =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2 > 0 \wedge \ln(9-x^2-y^2) \neq 0 \wedge y+|x| \geq 0\} \\ =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 9 \wedge x^2+y^2 \neq 8 \wedge y \geq -|x|\} \end{aligned}$$



Observando a imagem à esquerda, notamos que nem todos os pontos do conjunto são interiores. Concretamente, os pontos que estão sobre as circunferências ou sobre a linha $y = -|x|$ não são interiores porque em qualquer vizinhança destes pontos existem pontos que não pertencem ao conjunto. Como nessas vizinhanças existem também sempre pontos do conjunto, eles são pontos fronteiros. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{int} D_f =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 9 \wedge x^2+y^2 \neq 8 \wedge y+|x| > 0\} \\ \mathrm{fr} D_f =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 9 \wedge y \geq -|x|\} \cup \\ & \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 = 8 \wedge y \geq -|x|\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -|x| \wedge x^2+y^2 \leq 9\} \\ \mathrm{ad} D_f =& \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9 \wedge y \geq -|x|\}. \end{aligned}$$

Como D_f não coincide com a sua aderência (por exemplo o ponto $(3,0)$ pertence à aderência mas não ao conjunto), este não é fechado e, não sendo fechado não é compacto. No entanto, como $D_f \subset B_r((0,0)), r \geq 3$, D_f é um conjunto limitado.

3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|x^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Verifique que a função g é contínua em $(0,0)$.

Solução: A função será contínua no ponto $(0,0)$ se e só se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0.$$

Como para $(x,y) \neq (0,0)$ se tem

$$\left| \frac{|y|x^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|y|x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|y|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |y| \underset{x,y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

podemos concluir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ e que a função é por isso contínua em $(0,0)$.

(b) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

Solução: Esta derivada parcial deve ser calculada pela definição:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,0+t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{|t|\cdot 0}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

(c) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$, para $y > 0$.

Solução: Começamos por notar que, para $y > 0$, se tem $|y| = y$ e, portanto

$$g(x,y) = \frac{yx^2}{x^2+y^2}.$$

Como o conjunto $\{(x,y) : y > 0\}$ é aberto, podemos aplicar as regras usuais de derivação para calcular $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ nesse conjunto. Concretamente,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{(yx^2)'_x(x^2+y^2) - (x^2+y^2)'_x(yx^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2xyx^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

4. Seja $g(u, v)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial g}{\partial u}(3, 0) = \frac{\partial g}{\partial v}(3, 0) = 1$ e seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $G(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2, x^2 - yz)$. Calcule $\frac{\partial G}{\partial y}(1, 1, 1)$.

Solução: As funções $x^2+y^2+z^2$ e x^2-yz são funções polinomiais e portanto diferenciáveis. Como a função g é também diferenciável, concluímos que $G(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2, x^2 - yz)$, sendo composição de funções diferenciáveis, é diferenciável. Além disso, designando $u = x^2 + y^2 + z^2$ e $v = x^2 - yz$, vemos que quando $x = y = z = 1$ se tem $u = 3$ e $v = 0$. Assim, podemos aplicar a regra da cadeia, obtendo

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y}(1,1,1) =& \frac{\partial g}{\partial u}(3,0)\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1) + \frac{\partial g}{\partial v}(3,0)\frac{\partial v}{\partial y}(1,1,1)\\ =& 1 \times (2y)_{|(x,y,z)=(1,1,1)} + 1 \times (-z)_{|(x,y,z)=(1,1,1)}\\ =& 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 1\end{aligned}$$

5. Em certas condições, o nível de produção de determinada empresa pode ser determinado pela expressão $P(k, \ell) = ck^\alpha \ell^\beta$, onde $c, \alpha, \beta > 0$ são constantes conhecidas e $k, \ell > 0$ designam os *inputs* de capital e trabalho, respetivamente. Sem calcular as derivadas parciais, verifique que

$$k\frac{\partial P}{\partial k} + \ell\frac{\partial P}{\partial \ell} = (\alpha + \beta)ck^\alpha \ell^\beta.$$

Solução: Comecemos por observar que

$$P(\lambda k, \lambda \ell) = c(\lambda k)^\alpha (\lambda \ell)^\beta = c\lambda^\alpha k^\alpha \lambda^\beta \ell^\beta = \lambda^{\alpha+\beta}(ck^\alpha \ell^\beta) = \lambda^{\alpha+\beta}P(k, \ell),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Das igualdades anteriores concluímos que $P(k, \ell)$ é uma função homogénea de grau $\alpha + \beta$. Como além disso é diferenciável no seu domínio $(x, y > 0)$, o teorema de Euler (igualdade de Euler) garante que

$$k\frac{\partial P}{\partial k} + \ell\frac{\partial P}{\partial \ell} = (\alpha + \beta)P = (\alpha + \beta)ck^\alpha \ell^\beta,$$

tal como queríamos demonstrar.