Matemática I – 2º Semestre 2009/10
Ficha de exercícios

Semana 10: Cap. 7 – Aproximações Polinomiais, Teorema do Valor Intermédio e Teorema do Valor Médio

1 Exercícios de aplicação directa

1.1. Seja a função $f(x) = \ln x$.
a) Obtenha a aproximação linear de f em torno do ponto $x = 1$.
b) Obtenha a aproximação quadrática de f em torno do ponto $x = 1$.
c) Esboce o gráfico de f e compare com os gráficos das funções obtidas nas alíneas anteriores.
d) Estime o valor de ln(1,1).

1.2. A aproximação quadrática da função $f(x) = (x+1)^5$ em torno de $x = 1$ é dada por:

a) $f(x) \simeq 80x^2 - 80x + 32$ b) $f(x) \simeq -80x^2 + 80x + 32$

c) $f(x) \simeq -80x^2 - 80x - 32$ d) $f(x) \simeq 80x^2 + 80x + 32$

1.3. Seja a função $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2$. A aproximação de Taylor de segunda ordem de f em torno de $x = 1$ é:

a) $x - 1 + (x-1)^2$ b) $x - 1 - (x-1)^2$

c) $-(x-1)^2$ d) $(x-1)^2$

1.4. Escreva a fórmula de Taylor de ordem n para $f(x) = e^x$, em torno de $x = 1$, apresentando o resto na forma de Lagrange. Calcule o limite do resto quando n tende para $+\infty$.

1.5. Mostre que a equação $xe^x = \dfrac{1}{2}$ tem uma única solução no intervalo aberto $(-1, 1)$.

2 Definições e Demonstrações

2.1. Utilize a aproximação linear para mostrar que, perto da origem, temos: $\sin x \simeq x$.

2.2. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).
a) Defina função crescente.
b) Mostre que se $f'(x) \geq 0$ para $x \in (a, b)$, então f é crescente.

2.3. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável duas vezes em $\mathbb{R}$ e seja o polinómio de segundo grau $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Determine os coeficientes α, β, γ que satisfazem as seguinte condições, para $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(a) = p(a) \\ f'(a) = p'(a) \\ f''(a) = p''(a) \end{cases} .$$

3 Problemas e Modelização

3.1. Estime o valor aproximado de sin(0,1), justificando a sua resposta. Estime o erro da aproximação que efectuou.

3.2. Seja f uma função definida implicitamente pela equação $[f(x)]^3 = x^3 f(x) + x + 1$. Sabendo que $f(0) = 1$, indique a aproximação linear a $f(x)$ em torno de $x = 0$.

3.3. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = e^{x-1}$.
a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem n da função f em torno de 1.
b) Obtenha a majoração do resto fazendo $x = \frac{1}{2}$ e $n = 3$.

3.4. Utilize a fórmula de Taylor para calcular: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$.

3.5. Seja a função $f(x) = \sqrt{x}$. Determine a aproximação linear de f em torno do ponto $x = 1$ e utilize-a para obter um valor aproximado de $\sqrt{1{,}1}$.

4 Exercícios adicionais

4.1. Utilize a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ como soma de potências de $(x + 2)$.

4.2. Seja $y = f(x)$ uma função definida implicitamente pela equação $xy - x^2 = 2y + x$. A aproximação linear de $f(x)$ em torno do ponto $(4, 10)$ é dada por:

a) $-5x + 3$ b) $-\frac{1}{2}(x - 24)$ c) $\frac{1}{3}(x + 25)$ d) $x + 3$

4.3. Seja $f(x) = (2x - a)^m$, com $m \in \mathbb{N}$. Mostre que a aproximação de Taylor de segunda ordem da função f em torno de 0 é:

$$(-a)^m + 2m(-a)^{m-1}x + 2m(m-1)(-a)^{m-2}x^2.$$

4.4. Exercícios do livro (K. Sydsaeter & P.J. Hammond, *Essential Mathematics for Economic Analysis*, Prentice Hall, 2008):
Secção 7.4: Exercícios 1 a 4, 7, 9 e 10
Secção 7.5: Exercícios 1, 2, 4 e 5
Secção 7.6: Exercícios 1, 2 e 4;
Secção 7.10: Exercícios 1 e 2;
Secção 8.4: Exercícios 6 e 7.