LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Matemática 2

Teste Final

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 12 de Junho de 2018 **Duração:** 1H

Nome: ______________________________ **Número:** ______________

Questão	1a	1b	2	3a	3b	4	Total
	25	10	25	10	20	10	100
Pontuação							

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas. Caso necessite de espaço adicional para responder a alguma pergunta, pode utilizar o espaço disponível no final.

1. Considere a função $f(x,y) = x^2y + \frac{1}{4}y^3 - y$.

(a) Determine e classifique todos os pontos críticos de f.

Solução: Os pontos críticos da função f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + \frac{3}{4}y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases},$$

isto é, são os pontos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$ e $(0,-\frac{2\sqrt{3}}{3})$. A matriz Hessiana de f é dada por

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \frac{3}{2}y \end{bmatrix},$$

pelo que se tem

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f(0, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\pm 4\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Relativamente à classificação dos pontos $(0, \pm\frac{2\sqrt{3}}{3})$, como as respetivas matrizes Hessianas são diagonais, os seus elementos são justamente os valores próprios. Assim, **i.** como $H_f(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ tem todos os valores próprios positivos, é uma forma quadrática definida positiva e o ponto $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ é um minimizante local; **ii.** como $H_f(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ tem todos os valores próprios negativos, é uma forma quadrática definida negativa e o ponto $(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3})$ é um maximizante local.

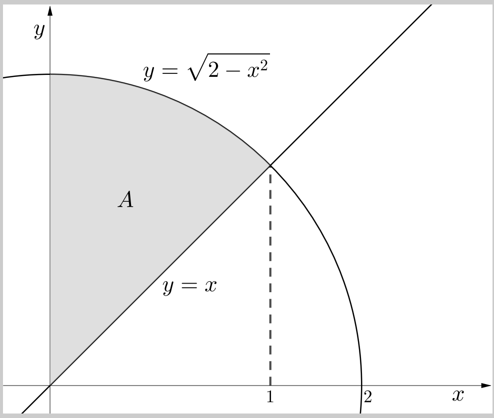
Relativamente aos pontos $(\pm 1, 0)$, os valores próprios de $H_f(\pm 1, 0)$ são $\lambda = 2$ e $\lambda = -2$, pelo que a matriz é indefinida e os pontos $(\pm 1, 0)$ são pontos sela.

(b) Mostre que a função f não tem extremantes globais.

Solução: Podemos observar que $f(1, y) = \frac{1}{4}y^3$, função que pode tomar qualquer valor real, tendo-se em particular que $\lim\limits_{y \to \pm\infty} f(1, y) = \pm\infty$. Ora, se mesmo apenas para $x = 1$ a função pode tomar valores tão grandes ou tão pequenos quanto quisermos, esta não pode ter minimizantes nem maximizantes globais.

2. Calcule $\displaystyle\iint_A xy\, e^{x^2+y^2}\, dxdy$, onde $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq x \wedge x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Solução:



A região de integração, ilustrada na figura à esquerda, pode ser reescrita como uma região de tipo I:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}\}.$$

O integral duplo pode então ser calculado como:

$$\begin{aligned}
\iint_A f(x, y) dxdy &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} xye^{x^2+y^2} dy \right) = \int_0^1 xe^{x^2} \left(\int_x^{\sqrt{2-x^2}} ye^{y^2} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 xe^{x^2} \left[\frac{1}{2} e^{y^2} \right]_{y=x}^{y=\sqrt{2-x^2}} = \int_0^1 \frac{1}{2} xe^{x^2} \left(e^{2-x^2} - e^{x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 (\frac{e^2}{2}x - \frac{1}{2}xe^{2x^2}) dx = \left[\frac{e^2 x^2}{4} - \frac{1}{8}e^{2x^2} \right]_0^1 = \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{8} - 0 + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1 + e^2}{8}
\end{aligned}$$

3. Considere a equação diferencial $y'' - y' - 6y = -18x^2 - 6x$.

(a) Mostre que $\varphi(x) = 3x^2 + 1$ é solução da equação diferencial.

Solução: A função $\varphi(x)$ é solução da equação diferencial se tivermos

$$\varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x) = -18x^2 - 6x.$$

Ora,

$$\begin{aligned}\varphi''(x) - \varphi'(x) - 6\varphi(x) =& (3x^2+1)'' - (3x^2+1)' - 6(3x^2+1)\\ =& 6 - 6x - 18x^2 - 6\\ =& -18x^2 - 6x,\end{aligned}$$

o que demonstra o pretendido.

(b) Determine a solução da equação diferencial que verifica as condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 5$.

Solução: Trata-se de uma equação diferencial linear de 2ª ordem com coeficientes constantes. Pelo princípio de sobreposição, sabemos que a solução geral desta equação se pode escrever como $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, em que $y_h(x)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $y_p(x)$ é uma solução particular da equação completa.

O polinómio característico associado a esta equação é $P(D) = D^2 - D - 6$, cujas raízes são $R_1 = -2$ e $R_2 = 3$. Deste modo, sabemos que a solução geral da equação homogénea é dada por

$$y_h(x) = c_1 e^{R_1 x} + c_2 e^{R_2 x} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}.$$

Como na alínea anterior já obtivémos uma soluçao particular da equação, podemos tomar $y_h(x) = 3x^2 + 1$, pelo que

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} + 3x^2 + 1.$$

Finalmente, como $y(0) = c_1 + c_2 + 1$ e $y'(0) = -2c_1 + 3c_2$, podemos determinar c_1, c_2:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 1 \\ -2c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ 2c_2 + 3c_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \end{cases}.$$

A solução pretendida é então dada por

$$y(x) = -e^{-2x} + e^{3x} + 3x^2 + 1.$$

4. Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^2 tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que se tem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Solução: Uma vez que a igualdade $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = x + y$ é válida para quaisquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, podemos deriva-la em ordem a x e a y obtendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$$

Subtraindo estas duas últimas igualdades obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{=0^{(*)}} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

(*) Igualdade justificada pelo teorema de Schwarz: como f é de classe C^2 temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.