LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Matemática 2

Repetição do Teste Intercalar

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 12 de Junho de 2018 **Duração:** 1H

Nome: ______________________________ **Número:** ____________

Questão	1	2	3a	3b	4	5	Total
	15	15	25	15	15	15	100
Pontuação							

Atenção: Esta prova deve ser entregue ao fim de 1 Hora. Deve justificar detalhadamente todas as suas respostas. Caso necessite de espaço adicional para responder a alguma pergunta, pode utilizar o espaço disponível no final.

1. Classifique a forma quadrática $Q(x, y, z) = 2x^2 + 2\alpha xy + y^2 + 4yz + 4z^2$ em termos do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solução: A matriz simétrica associada à forma quadrática Q é $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, cujos determinantes dos menores principais primários são $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 2 - \alpha^2$ e $\Delta_3 = |A| = -4a^2 \leq 0$. Se $\Delta_3 < 0$, isto é, se $\alpha \neq 0$, a matriz será indefinida (os sinais de Δ_1 e Δ_3 não correspondem a uma matriz definida, independentemente do que suceder com Δ_2). Se $\alpha = 0$, vemos facilmente que os valores próprios de A são $\lambda = 0, 2, 5$, pelo que a matriz será semidefinida positiva.

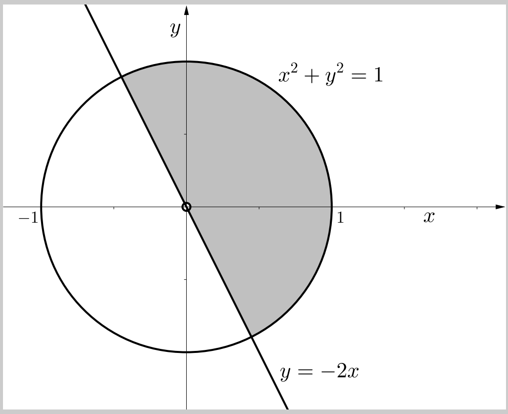
Em suma, a forma quadrática é indefinida se $\alpha \neq 0$ e é semidefinida positiva se $\alpha = 0$.

2. Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada pela expressão $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{2x + y}}{1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$. Determine analítica e geometricamente o domínio de f, D_f, e indique o seu interior, exterior e fronteira. Indique também o menor conjunto fechado que contém D_f.

Solução: O domínio de f é definido analiticamente por

$$\begin{aligned} D_f =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 0 \wedge 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2} \neq 0\} \\ =& \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -2x \wedge x^2 + y^2 \leq 1 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\}, \end{aligned}$$

sendo a sua representação gráfica dada por (note que o ponto $(0, 0)$ não pertence ao domínio):



Os pontos do conjunto que se encontram sobre as curvas que o delimitam não são pontos interiores, já que em qualquer vizinhança destes pontos existem elementos do conjunto e do seu complementar (são então pontos fronteiros), pelo que o conjunto dos pontos interiores é dado por

$$int(D_f) =\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1 \wedge y > -2x\},$$

enquanto que a fronteira é dada por

$$fr(D_f) =\{(x,y) \in R^2 : (x^2+y^2 = 1 \wedge y \geq -2x) \vee (x^2+y^2 \leq 1 \wedge y = -2x)\}$$

e o exterior, complementar de $int(D_f) \cup fr(D_f)$, é dado por

$$ext(D_f) = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 > 1 \vee y < -2x\}.$$

Finalmente, um conjunto é fechado se coincidir com a sua aderência, pelo que para, a partir de D_f, obter um conjunto fechado, temos que adicionar a D_f pelo menos todos os seus pontos de fronteira (na verdade a aderência de um conjunto é sempre o menor conjunto fechado que o contém). O menor conjunto fechado que contém D_f é então

$$ad(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \wedge y \geq -2x\}.$$

3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 \sin(x/y)}{x^2+y^2} & , y \neq 0 \\ 0 & , y = 0 \end{cases}$.

(a) Mostre que a função é contínua no ponto $(0,0)$ e calcule $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

Solução: Para mostrar que a função é contínua em $(0,0)$ devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)(= 0).$$

De facto, se $y \neq 0$, tem-se que

$$|g(x,y) - 0| \leq \left|\frac{y^4 \sin(x/y)}{x^2+y^2}\right| = \frac{y^2 \cdot y^2 \overbrace{|\sin(x/y)|}^{\leq 1}}{x^2+y^2} \leq \frac{y^2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = y^2 \xrightarrow{x,y\to 0} 0,$$

o que demonstra que o limite em causa é zero, pelo que a função é contínua no ponto $(0,0)$ (é importante notar que a desigualdade anterior é verificada trivialmente também no caso $y = 0$).

Relativamente à derivada parcial pedida, tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^4 \sin(0/t)}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(b) Verifique se $g(x,y)$ é homogénea e, em caso afirmativo, determine o seu grau de homogeneidade.

Solução: Se $y \neq 0$, temos que

$$g(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda y)^4 \sin((\lambda x)/(\lambda y))}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^4}{\lambda^2} \cdot \frac{y^3 \sin(x/y)}{x^2+y^2} = \lambda^2 g(x,y).$$

Se $y = 0$ temos que $g(\lambda x, \lambda \cdot 0) = g(\lambda x, 0) = 0 = g(x,0)$, o que em particular significa que também neste pontos se verifica $\underbrace{g(\lambda x, \lambda\cdot 0)}_{=0} = \underbrace{\lambda^2 g(x,0)}_{=0}$. Concluímos então que a função g é homogénea e que o seu grau de homogeneidade é 2.

4. Seja $g(x,y) = x^2 y$, com $x = 2u + v$ e $y = u\cos v$. Usando a regra da derivada da função composta (regra da cadeia), determine $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)$.

Solução: Como x, y são funções diferenciáveis de u, v e g é uma função diferenciável de x, y, a função composta $g(x(u,v), y(u,v))$ é uma função diferenciável de u, v e as suas derivadas parciais podem ser calculadas através da regra da cadeia. Em particular,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) =& \frac{\partial g}{\partial x}(2u+v, u\cos v) \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}(2u+v, u\cos v) \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\ =& 2(2u+v)u\cos v \cdot 2 + (2u+v)^2 \cdot \cos v \\ =& (12u^2 + 8uv + v^2)\cos v.\end{aligned}$$

5. Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = I$. Mostre que A apenas pode admitir os valores próprios $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. Tomando $n = 2$, dê um exemplo de uma matriz nessas condições cujos valores próprios sejam $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$.

Solução: Se λ é valor próprio de uma qualquer matriz A, então λ^2 é valor próprio de A^2. Como neste caso $A^2 = I$, que admite apenas o valor próprio $\lambda = 1$, sabemos que se certo λ for valor próprio de A então $\lambda^2 = 1$, pelo que se deve ter $\lambda = \pm 1$, como queríamos demonstrar.

Relativamente ao exemplo pedido, a matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tem valores próprios -1 e 1, sendo que também verifica $A^2 = I$.