Análise Matemática II

LISTA 9

(1) Sendo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$f(x,y,z) = (x+y+z, x-y-z)$$
$$g(u,v) = (u+v, u^2-v^2, u^2-2v),$$

calcule a matriz jacobiana de $f \circ g$.

(2) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y,z) = (e^{x^2+y^2+z^2}, 1-xyz^2)$, e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(e^3, 2)$ é

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz jacobiana de $f \circ g$ no ponto $(1,-1,1)$.

(3) Considere $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2^{4/3}x^{5/3}y^2}{(x^2+y^2)^{4/3}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = (t,t)$. Seja $F = f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(b) Calcule $F'(0)$:

(i) Utilizando a expressão de $F(t)$.

(ii) Através da fórmula $F'(0) = Df(0,0)\,Dg(0)$ com $Df(0,0) = \left[\, \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \,\right]$ (regra da cadeia).

(c) O que pode concluir do facto de ter obtido diferentes resultados acima?

(4) Sejam $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = g\left(\frac{1}{1+e^{xy}}, \cos\left(\frac{x^2}{y^2}\right)\right).$$

Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)$ em função das derivadas parciais de g.

(5) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f(1) = f'(1) = 2$ e $f(2) = f'(2) = 1$, e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y,z) = \left(f(x^2) + f(x^2+y^2), f(xyz)\right).$$

(a) Calcule a matriz jacobiana de g.

(b) Sendo $h(x,y) = e^{3-x^2+yx}$, indique o domínio de diferenciabilidade de $h \circ g$ e calcule a matriz jacobiana de $h \circ g$ em $(1,1,2)$.

(6) Sejam $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ e $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em a.

(a) Utilizando a definição, mostre que $\tau(x, y) = xy$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $D\tau(x_0, y_0) = [y_0 \;\; x_0]$.

(b) Prove que $\rho(x) = (f(x), g(x))$ é diferenciável em a.

(c) Note que $fg = \tau \circ \rho$. Utilize o teorema da derivada da função composta para demonstrar que fg é diferenciável em a e

$$D(fg)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a).$$

(7) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$ e $g(x, y) = f(xy)$. Prove que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial y}.$$

(8) Seja $f\colon (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = x^{y^z}.$$

Calcule ∇f.