Análise Matemática III

LISTA 5

(1) Calcule o centróide de $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, z \geq 0\}$.

(2) Considere a superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ obtida como a intersecção entre o cilindro $x^2 + y^2 \leq 2x$ com o cone $x^2 + y^2 = z^2$. Calcule $\int_M f\, dv_2$ onde $f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1$.

(3) Seja $\varphi \colon M \to \mathbb{R}$ onde $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z = f(x, y),\, (x, y) \in V\}$ com $f \in C^1(V)$ e $V \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que

$$\int_M \varphi\, dv_2 = \int_V \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2}\, dx\, dy.$$

(4) Dados $R > r > 0$, considere a 2-variedade de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2,\, z > 0\right\}.$$

(a) Determine a normal unitária ν com terceira componente positiva em cada ponto de M.

(b) Calcule o fluxo de $X(x, y, z) = (0, 1, 1)$ segundo ν, i.e.

$$\int_M X \cdot \nu\, dv_2.$$

Sugestão: Use o teorema da divergência.

(c) Repita a alínea anterior para

$$X(x, y, z) = (x + \arctan(y^2 + z^3), e^{z - x^3}, z^2 - z + 1).$$

(5) Considere o campo vectorial $X \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$X(x, y, z) = (xg(z), -yg(z), z),$$

onde $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que o fluxo de X através do cilindro

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 4,\, 0 < z < 1\}$$

segundo uma normal à sua escolha, não depende de g.

(b) Mostre que existe uma função escalar h tal que $X = \nabla h$ sse g é constante.

(6) *A partir do teorema da divergência, mostre o teorema de Green: Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular, e $P, Q \colon A \to \mathbb{R}$ de classe C^1 num

aberto $A \supset \overline{D}$. Então,

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy.$$

Sugestão: Note que usámos a seguinte notação para o integral de linha de um campo vectorial

$$\int_{\partial D} P\, dx + Q\, dy = \int_{\partial D} (P, Q) \cdot d\gamma$$

onde γ é um caminho que percorre ∂D no sentido anti-horário (directo). A notação faz sentido desde que se escreva $d\gamma = (dx, dy)$.