Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 2 [1]

(1) Seja $C = \{x \in \mathbb{R}\colon x(x^2-2) \leq 0\}$.
   (a) Calcule o conjunto dos minorantes e dos majorantes de C.
   (b) Calcule $C \cap \mathbb{Q}$ e indique, caso existam, o sup e o max de C e de $C \cap \mathbb{Q}$.

(2) Indique os majorantes de $A \cap \mathbb{Q}$ e de $B \cap \mathbb{Q}$, onde

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}\colon \frac{x^2-1}{x} \geq |x-1|\right\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R}\colon \sin x = 0\}.$$

(3) Usando o princípio de indução matemática, prove as seguintes proposições para todo o $n \in \mathbb{N}$:
   (a) (soma dos primeiros n termos da progressão aritmética)

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   (b) (soma dos primeiros n termos da progressão geométrica) para $r \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = r\frac{1-r^n}{1-r}.$$

   (c) (desigualdade de Bernoulli) para $a > 0$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
   (d)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

   (Compare com o resultado de (3a).)

(4) Sejam as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, e os conjuntos $C = \{-1, 0, 1\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R}\colon -2 \leq x \leq 3\}$. Determine os seguintes conjuntos imagem e pré-imagem:
   (a) $f(C)$, $f(D)$, $f(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{R})$.
   (b) $g(C)$, $g(D)$, $g(\mathbb{N})$, $g(\mathbb{R})$.
   (c) $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$.
   (d) $g^{-1}(]4, 5[)$, $g^{-1}(\mathbb{N})$.

[1] As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante deve escrever as suas próprias soluções e compreendê-las.

(5) Diga se as seguintes funções são injectivas e/ou sobrejectivas. Em caso de serem injectivas indique a sua inversa.

(a) $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(b) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$

(c) $u\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $u(x) = x + 1$

(d) $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $v(x) = 1 + |[x]|$, onde $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq x\}$ é a parte inteira de x (i.e. o maior inteiro não superior a x).

(6) (a) Encontre uma bijecção $h_1\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ que envolva a função tangente e outra $h_2\colon \mathbb{R} \to]0,1[$ com a função arctan. Conclua que $\#\mathbb{R} = \#]0,1[$.

(b) Compare $\#A$ e $\#\mathcal{P}(A)$, onde $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto dos subconjuntos de A com

(i) $A = \{1,2,3,4,5\}$

(ii) $A = \emptyset$

(iii) $A = \mathbb{N}$

(7) Determine o conjunto dos majorantes e minorantes dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ indicando, sempre que possível, o supremo e o ínfimo de cada um deles:

(a) $[0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 9\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x-3| \leq 5\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R}\colon x - 1 \geq x\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R}\colon (x-1)/(x+3) > x/(x-2)\}$

(f) $[1,2] \cap \mathbb{Q}$.

(8) (*) Considere a sucessão de Fibonacci dada por

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Prove por indução que

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$