

Análise Matemática III

LISTA 10

- (1) Demonstre as seguintes proposições para $f, g \in L^1(E, \mu)$ usando a definição de integral de Lebesgue:
- (a) Se $f \leq g$ q.t.p., então $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.
 - (b) Se $A \subset E$ com A mensurável, então $\int_A |f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu$.
 - (c) Se $\mu(A) = 0$, então $\int_A f d\mu = 0$.
 - (d) Se A, B são mensuráveis e disjuntos, então $\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$.
 - (e) Se $f = 0$ q.t.p., então $\int_E f d\mu = 0$.
- (2) Usando o teorema da convergência monótona, mostre que:
- (a) Se $f, g \in L^1(E, \mu)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha f + \beta g \in L^1(E, \mu)$ e

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

- (b) Se $f \geq 0$ é mensurável, então $\mu(A) = \int_A f d\mu$ define uma medida.
- (3) Calcule os seguintes limites recorrendo ao teorema da convergência dominada:
- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{r^n}{1+r^{n+2}} dr$
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2} dx$
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^n(x) dx$
 - (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)^n} dx dy$
 - (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+\cos^n(x-y)}{(x^2+y^2+1)^2} dx dy$
- (4) Mostre que para $x \geq 1$ temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt = \log x.$$

Sugestão: Use a regra de Leibnitz.

- (5) Calcule

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \chi_{[0,n]} dm.$$

- (6) * Podemos escrever um número $x \in [0, 1]$ em base 3 como

$$x = (0.a_1a_2a_3 \dots)_3 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$

onde $a_k \in \{0, 1, 2\}$. Considere a função de Cantor $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \sum_{k=1}^N \frac{b_k}{2^k},$$

onde $N = \inf\{k: a_k = 1\}$ e $b_k = a_k/2$ se $k < N$ e $b_N = a_N = 1$, com $x = (0.a_1a_2a_3\dots)_3$ (note que podemos ter $N = +\infty$).

Ou seja, consideramos os algarismos da representação em base 3 de x até aparecer um 1. Por exemplo, se $x = (0.02002212001)_3$, então $N = 7$ e temos os algarismos 020022. Dividimos por 2 cada um de forma a obter os b_k 's 010011 e definimos $b_7 = 1$. Finalmente, $f(x)$ é dado como o número cuja representação em base 2 é $(0.0100111)_2$.

(a) Mostre que:

(i) $f(0) = 0, f(1) = 1$.

(ii) f é crescente em $[0, 1]$ e constante em cada subintervalo de $[0, 1] \setminus A$, onde

$$A = \{x = (0.a_1a_2\dots)_3 \in [0, 1]: a_k \in \{0, 2\}\}.$$

(iii) ** f é contínua em $[0, 1]$. *Sugestão:* Mostre que se f é monótona e sobrejectiva então é contínua.

(iv) $f' = 0$ m-q.t.p. *Sugestão:* Calcule a medida de A .

(v) $f(1-x) = 1 - f(x)$ e $2f(x/3) = f(x)$.

(b) Uma função $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua sse g' existe q.t.p. e é integrável à Lebesgue satisfazendo

$$\int_a^x g'(t) dt = g(x) - g(a)$$

para qualquer $x \in [a, b]$. Determine se a função de Cantor f é absolutamente contínua.