

Análise Matemática III

LISTA 8

- (1) Prove que qualquer intervalo e qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ com $m(A) = 0$ são mensuráveis à Lebesgue.
- (2) (Conjunto de Cantor dos terços) Considere $A_0 = [0, 1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtemos assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o processo para I_0 e I_2 , obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos A_n .
- (a) Prove que o chamado conjunto de Cantor dos terços $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é não vazio.
- (b) Prove que A tem medida de Lebesgue nula.
- (c) *Prove que A não é numerável.

Sugestão: Escreva $x \in [0, 1]$ na base 3 na forma $x = (0.a_1a_2\dots)_3$ onde

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$

e $a_k \in \{0, 1, 2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_k \in \{0, 2\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

- (3) Mostre que
- (a) se $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}$, então $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$.
- (b) $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$ para qualquer $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$.
- (c) $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$ gera a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} .
- (4) Seja $\Omega = \{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$, i.e. os elementos de Ω são vectores em \mathbb{R}^n com componentes 0 ou 1. Considere a medida $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ definida para cada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ por $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$.
- Dados $a_1, \dots, a_m \in \{0, 1\}$ com $1 \leq m \leq n$, definimos

$$A_{a_1, \dots, a_m} = \{\omega \in \Omega : \omega_i = a_i, i = 1, \dots, m\}$$

e $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1, \dots, a_m} : a_i \in \{0, 1\}\}$.

- (a) Mostre que μ é uma medida de probabilidade.
- (b) Calcule $\mu(A_{a_1, \dots, a_m})$.
- (c) Determine a σ -álgebra gerada por \mathcal{A}_2 .
- (d) Qual é o cardinal da σ -álgebra gerada por \mathcal{A}_m ?

- (5) Dê um exemplo em \mathbb{R}^2 de um conjunto limitado de medida de Lebesgue nula cuja fronteira não tenha medida nula.
- (6) (Conjunto não mensurável à Lebesgue) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $A_\alpha = \alpha + \mathbb{Q}$.
- Determine $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha$ e $m(A_\alpha)$.
 - Mostre que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ sse $A_\alpha \neq A_\beta$ sse $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.
 - * Considere o conjunto $E \subset [0, 1]$ constituído por um único elemento a_α de cada A_α distinto¹. Logo, $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$ para quaisquer $\alpha, \beta \in E$ tais que $\alpha \neq \beta$. Seja $E_n = q_n + E$, $n \in \mathbb{N}$, onde q_n representa uma sucessão que ordena os racionais em $[-1, 1]$.
 - Mostre que $[0, 1] \subset \cup_n E_n \subset [-1, 2]$ e $m(E_n) = m(E)$.
 - Mostre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.
Sugestão: Suponha que existe $x \in E_i \cap E_j$.
 - Calcule $\sum_n m(E_n)$ e compare com $m(\cup_n E_n)$. Conclua que E não é mensurável à Lebesgue, i.e. $E \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$.
- (7) *Mostre que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ têm a mesma cardinalidade. *Sugestão:* Use o facto de o conjunto de Cantor dos terços (ver questão (2)) ter a mesma cardinalidade de \mathbb{R} e medida de Lebesgue nula.

¹Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.